

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA RAČUNALNIŠTVO IN INFORMATIKO

Neli Blagus

**Iterativni funkcijski sistemi in
konstrukcija fraktalov**

DIPLOMSKO DELO
NA INTERDISCIPLINARNEM UNIVERZITETNEM ŠTUDIJU

Mentorica: prof. dr. Neža Mramor Kosta

Ljubljana, 2010



Št. naloge: 00014/2010

Datum: 15.01.2010

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za računalništvo in informatiko ter Fakulteta za matematiko in fiziko izdaja naslednjo nalogo:

Kandidat: **NELI BLAGUS**

Naslov: **ITERATIVNI FUNKCIJSKI SISTEMI IN KONSTRUKCIJA FRAKTALOV**
ITERATIVE FUNCTION SYSTEMS AND CONSTRUCTING FRACTALS

Vrsta naloge: Diplomsko delo univerzitetnega študija

Tematika naloge:

V diplomskem delu naj bo opisan pojem fraktala v ravnini in pa konstrukcija fraktalov s pomočjo iterativnih funkcijskih sistemov. Delo naj vsebuje definicije potrebnih pojmov iz teorije metričnih prostorov in dokaze lastnosti, ki se uporabljajo. Opisani naj bodo osnovni algoritmi za risanje fraktalov in prikazani primeri tako dobljenih fraktalov v ravnini.

Mentor:

prof. dr. Nežka Mramor Kosta



Dekan Fakultete za računalništvo in informatiko:

prof. dr. Franc Solina

Dekan Fakultete za matematiko in fiziko:

prof. dr. Andrej Likar



Rezultati diplomskega dela so intelektualna lastnina Fakultete za računalništvo in informatiko Univerze v Ljubljani. Za objavljane ali izkoriščanje rezultatov diplomskega dela je potrebno pisno soglasje Fakultete za računalništvo in informatiko ter mentorja.

Besedilo je oblikovano z urejevalnikom besedil $\text{\LaTeX}$.

Namesto te strani **vstavite** original izdane teme diplomskega dela s podpisom mentorja in dekana ter žigom fakultete, ki ga diplomant dvigne v študentskem referatu, preden odda izdelek v vezavo!

IZJAVA O AVTORSTVU

diplomskega dela

Spodaj podpisana Neli Blagus,

z vpisno številko 63050181,

sem avtorica diplomskega dela z naslovom:

Iterativni funkcijski sistemi in konstrukcija fraktalov

S svojim podpisom zagotavljam, da:

- sem diplomsko delo izdelala samostojno pod mentorstvom prof. dr. Neže Mramor Kosta
- so elektronska oblika diplomskega dela, naslov (slov., angl.), povzetek (slov., angl.) ter ključne besede (slov., angl.) identični s tiskano obliko diplomskega dela
- soglašam z javno objavo elektronske oblike diplomskega dela v zbirki "Dela FRI".

V Ljubljani, dne 13. 4. 2010

Podpis avtorice:

Zahvala

V prvi vrsti se zahvaljujem mentorici prof. dr. Neži Mramor Kosta, ker je bila res super pri svetovanju in spremljanju mojega dela. Za pomoč, predvsem pri uporabi Mathematice, se zahvaljujem Damjanu Vrenčurju.

Družini, Gregu ter Katji pa gre velika zahvala za podporo, pomoč in potrpljenje na celotni študijski poti.

Kazalo

Povzetek	2
Abstract	3
1 Uvod	5
2 Motivacija	7
3 Metrični prostor in prostor fraktalov	14
3.1 Cauchyjevo zaporedje	15
3.2 Lastnosti podmnožic metričnega prostora	18
3.3 Hausdorffova metrika	21
4 Transformacije v metričnem prostoru in konstrukcija fraktalov	28
4.1 Negibna točka in fraktali	28
4.2 Iterativni funkcijski sistem	33
4.3 Računanje fraktalov iz iterativnega funkcijskega sistema	36
5 Vrh fraktala	42
5.1 Naslovna funkcija	42
5.2 Vrhnja funkcija	46
5.3 Prevezemanje barv	48
6 Zaključek in nadaljnje delo	55
Seznam slik	56
Literatura	57

Povzetek

Fraktal je matematični objekt, ki ga lahko razdelimo na več delov, vsak izmed njih pa je pomanjšana podoba celotnega fraktala. Tej lastnosti pravimo samopodobnost. Druga tipična lastnost fraktala je neskončna kompleksnost podrobnosti, zato so primerni za predstavitev različnih naravnih struktur. Fraktali so preveč nepravilnih oblik za opis z običajnimi geometrijskimi prijemi, čeprav so pogosto zelo simetrični. Z njimi se ukvarja fraktalna geometrija, ki omogoča tudi učinkovite načine za aproksimacijo fraktalov in naravnih struktur, ki jih fraktali opisujejo, na računalniškem zaslonu. Uporaba fraktalov sega še na področja računalniške grafike, geografije, tudi biomedicine.

Namen diplomskega dela je predstavitev fraktalov v ravnini ter matematičnega ozadja za obravnavo konstrukcije fraktalov. Fraktale lahko konstruiramo s pomočjo hiperboličnih iterativnih funkcijskih sistemov. Takšen sistem sestavljajo skrčitvene funkcije na nekem prostoru, kar pomeni, da točke približujejo eno drugi in s tem like pomanjšajo. Tako s slučajnim ali determinističnim algoritmom nastane fraktal z lastnostjo samopodobnosti. V delu sta obravnavana oba omenjena algoritma ter algoritem prevzemanja barv, ki predstavlja različico slučajnega algoritma.

V grobem je delo sestavljeno iz treh delov. Prvi del je uvod in motivacija v obravnavano tematiko. Drugi del je teoretične narave in opisuje matematične pojme, ki so potrebni za definicijo fraktalov ter predstavitev algoritmov konstrukcije fraktalov. V tretjem delu pa so obravnavani sami algoritmi in možnosti nadaljnjega dela. Rezultati algoritmov so predstavljeni predvsem v slikah, dobljenih s programskim orodjem Mathematica.

Ključne besede:

fraktal, iterativni funkcijski sistem, deterministični algoritem, slučajni algoritem, prevzemanje barv

Abstract

A fractal is a mathematical object, that can be split into several parts, each of which is a minuscule image of the fractal itself. This feature is called self-similarity. The second typical feature of fractals is their infinite complexity of details, because of which they are appropriate for modelling different natural structures. Fractals are too irregular in form to be described with classical geometrical shapes, even though they are often symmetric. The branch of mathematics concerned with fractals is called fractal geometry. It introduces effective methods of approximating fractals as well as natural structures described by them on the computer screen. Fractals can also be applied in computer graphics, geography and even biomedicine.

The main goal of this diploma thesis is to describe fractals in the plane and the mathematical background necessary to define them and to explain their structure. One way of constructing fractals is through hyperbolic iterated function systems. A hyperbolic iterated function system is a system that consists of a finite set of contraction mappings on some metric space. This type of mapping brings points closer to each other and makes shapes smaller. This enables the construction of self similar fractals with the use of a random iteration or a deterministic algorithm. In this diploma thesis, both of these algorithms are described. We also describe the colour stealing algorithm, which is a variation of the random algorithm.

The thesis consists of three parts. The first part is an introduction and motivation of the topics introduced later. The second part is of theoretical nature, describing the mathematical concepts, important for defining fractals and representing algorithms for fractal construction. The last part of the thesis deals with algorithms, as well as possibilities for further work. The results obtained with the algorithms are represented mostly with pictures generated with Mathematica.

Key words:

fractal, iterated function system, deterministic algorithm, random iteration algorithm, colour stealing

Poglavje 1

Uvod

Fraktal je krasen in očarljiv vzorec neskončnih struktur in zapletenosti. Je matematični objekt, ki se ponavlja v vedno manjši obliki, da bi ustvaril nepravilno obliko in površino, ki je ne moremo opisati s klasično geometrijo. Fraktal je oblika, ki je lahko deljena v delce, in ti delci deljeni v manjše kopije originalne oblike. Če ste že videli oblak, ste videli fraktal. Fraktali so v naravnih oblikah vsepovsod okoli nas. Na primer drevo je zelo enostaven fraktal. Ima veje, iz vej rastejo manjše vejice in iz njih še manjše. . .

Vsi opisi fraktalov so si enotni v tem, da je fraktal zanimiv matematični objekt z lastnostjo samopodobnosti. Ime *fraktal* je izzumil Benoit Mandelbrot, ki je avtor fraktalne geometrije. V svoji knjigi *The Fractal Geometry of Nature* ([7]) je opisal vrsto fraktalnih naravnih pojavov. Če si na primer поблиžje ogledamo navadno praproto iz gozda vidimo, da je vsaka veja podobna osnovni praproti in vsaka manjša vejica spet podobna večji veji. Samopodobnost najdemo tudi pri opazovanju cvetače, dreves, snežink, oblakov. . . skratka povsod okoli nas.

Kako pa pravzaprav fraktal nastane? To vprašanje je bilo vodilo za pisanje diplomske naloge. Osnovno gradivo sta pri tem predstavljali knjiga *Superfractals* [4] in njena predhodnica *Fractals Everywhere* [2]. Slike iz diplomske naloge so nastale s programskim orodjem Mathematica, prav tako so z njim programirani vsi opisani algoritmi za konstrukcijo fraktalov. Kot osnova za programiranje je služil paket iz vira [10].

Podrobnejša struktura dela je naslednja:

- Drugo poglavje predstavlja motivacijo v svet fraktalov. Definicijo fraktala, njegove lastnosti in konstrukcijo si ogledamo skozi igro posebnega

nogometa. Namen poglavja je predstavitev pojmov na nematematični način, za lažji uvod v matematični svet fraktalov.

- Tretje poglavje je namenjeno teoretičnemu ozadju fraktalne geometrije. Opisani so osnovni pojmi, ki jih potrebujemo za definicijo fraktala in prostora, v katerem fraktali nastanejo. Dotaknemo se metričnih prostorov, Cauchyjevih zaporedij, zaprtih in odprtih množic, kompaktnosti ter za konec še Hausdorffove metrike.
- Četrto poglavje je jedro dela. V njem se na začetku seznanimo z negibnimi točkami in skrčitvenim izrekom. Po tem imamo dovolj teoretičnega znanja za matematično definicijo fraktala. Predstavimo iterativni funkcijski sistem, s pomočjo katerega fraktale konstruiramo. Za konstrukcijo opišemo dva algoritma, slučajnega in determinističnega.
- Cilj petega poglavja je opisati različico slučajnega algoritma za konstrukcijo fraktalov. Na začetku sta predstavljena pojma naslovna funkcija in prostor naslovov, ki služita organizaciji točk v prostoru. Spoznamo tudi vrhno funkcijo, s katero dosežemo, da imajo točke fraktala enoličen naslov. Za konec je opisan še algoritem prevzemanja barv, s katerim nastanejo čudovito obarvani fraktali.
- V zadnjem poglavju so povzeti rezultati dela in možnosti nadaljnjih raziskav.

Poglavje 2

Motivacija

Za začetek si oglejmo opis fraktalov na preprostem primeru igranja nogometa iz članka [3].

Prvi del

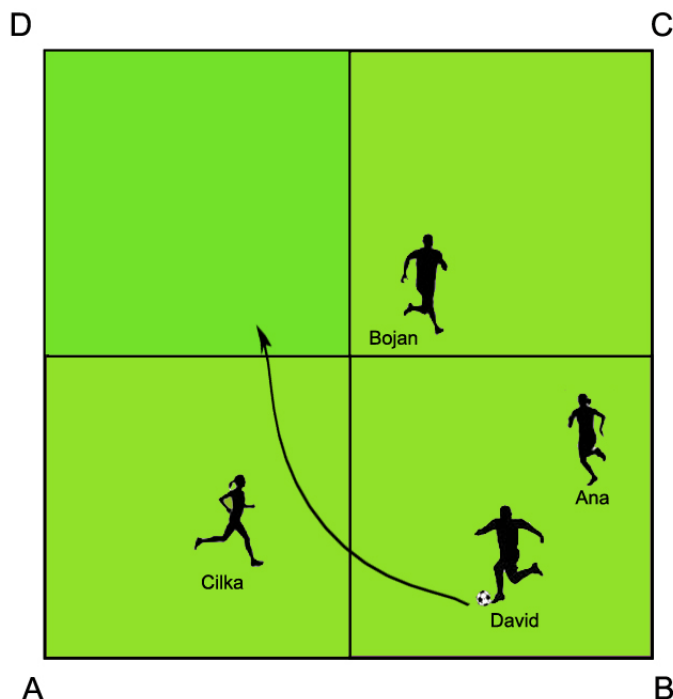
Imamo štiri super igralce nogometa, Ano, Bojana, Cilko in Davida. Vsi popolnoma obvladajo žogo in so neutrudljivi. Žogo lahko udarijo točno v točko, ki si jo zamislijo. Tudi žoga ni navadna. Zanje velja, da se takoj po pristanku na tla ustavi.

Nogomet se odvija na pravokotnem igrišču z oglišči A, B, C in D . Skica igrišča je na sliki 2.1. Vsak igralec ima “svoje” oglišče, ki je enako začetnici njegovega imena: Anino je A , Bojanovo B , Cilkin C ter Davidovo D .

Sama igra ni čisto podobna navadnemu nogometu, saj ni timske igre, niti golov. Igralci se držijo le dveh pravil:

1. žogo vedno udari tisti, ki prvi pride do nje,
2. igralec žogo vedno udari tako, da pade na polovico poti med trenutnim položajem žoge in njegovim ogliščem.

Prvo pravilo pomeni, da je zaporedje udarcev žoge naključno. Izbira igralca, ki bo naslednji udaril žogo, ni odvisna od položaja igralcev in žoge na igrišču, niti od tega, kdo jo je udaril nazadnje. Ne da se zanesljivo napovedati, kdo bo žogo udaril naslednji. Naključno zaporedje udarcev lahko zapišemo v obliki $ABCADCDBBADCDACBDCABD\dots$, kjer vsaka črka pomeni začetnico igralca, ki je v določenem koraku udaril žogo.



Slika 2.1: Nogometno igrišče, kjer igrajo igralci Ana, Bojan, Cilka in David. David udaril žogo na polovico poti med trenutnim položajem žoge in ogliščem D .

Drugo pravilo pomeni, da kadar prva pride do žoge Ana, jo udari na polovico poti med trenutnim položajem žoge in ogliščem A , ko pride prvi do žoge Bojan, jo udari na polovico poti med trenutnim položajem in ogliščem B , Cilka cilja na polovico poti do C , David pa do D .

Igra se odvija neskončno dolgo. Kar se v tem času dogaja z žogo, je presenetljivo. Skoraj gotovo žoga skače povsod po igrišču ter se poljubno približa vsaki točki igrišča. Kjerkoli na igrišču narišemo majhen krog, je žoga gotovo enkrat padla v njega in bo še kdaj padla vanj.

Zapišimo vse skupaj bolj formalno. Ana, Bojan, Cilka in David predstavljajo funkcije na prostoru igrišča. Ana predstavlja funkcijo iz katerekoli točke igrišča v spodnji levi kvadrat, Bojan v spodnji desni, Cilka v zgornji desni in David v zgornji levi (glej sliko 2.1). Označimo igrišče z $\square$. Potem velja

- $\text{Ana}(\square) = \text{spodnja leva četrtina igrišča},$
- $\text{Bojan}(\square) = \text{spodnja desna četrtina igrišča},$

- Cilka($\square$) = zgornja desna četrtina igrišča,
- David($\square$) = zgornja leva četrtina igrišča.

Vse funkcije skupaj določajo enačbo za celotno igrišče:

$$\square = \text{Ana}(\square) \cup \text{Bojan}(\square) \cup \text{Cilka}(\square) \cup \text{David}(\square).$$

Z drugimi besedami to pomeni, da je celo igrišče unija štirih četrtin igrišča oziroma, da je sestavljeno iz štirih kopij samega sebe.

Drugi del

Nogometašica Cilka si zlomi nogo. Ne more več igrati, njeni soigralci pa z igro nadaljujejo. Njihovo zaporedje udarcev žoge je še vedno naključno, na primer *ABDBDABDBADBDBDA...*. Očitno nihče od njih ne brca žoge v zgornjo desno četrtino proti oglišču *C*.

Kaj se v tem primeru dogaja z žogo? Da izvemo, jo namočimo v rdečo barvo. Sedaj žoga na igrišču nariše piko, vsakič ko pade na tla. Po nekaj tisoč udarcih nastane podoba iz slike 2.2.

Presenetljivo je, da je nastala slika vedno enaka. Neodvisna je od tega, v kakšnem zaporedju so igralci brcali žogo, ali kje so začeli igrati. Pravimo ji trikotnik Sierpinskega. Kot v prejšnjem, tudi v tem primeru velja, da bo narisani krog okoli vsake točke trikotnika žoga obiskala večkrat.

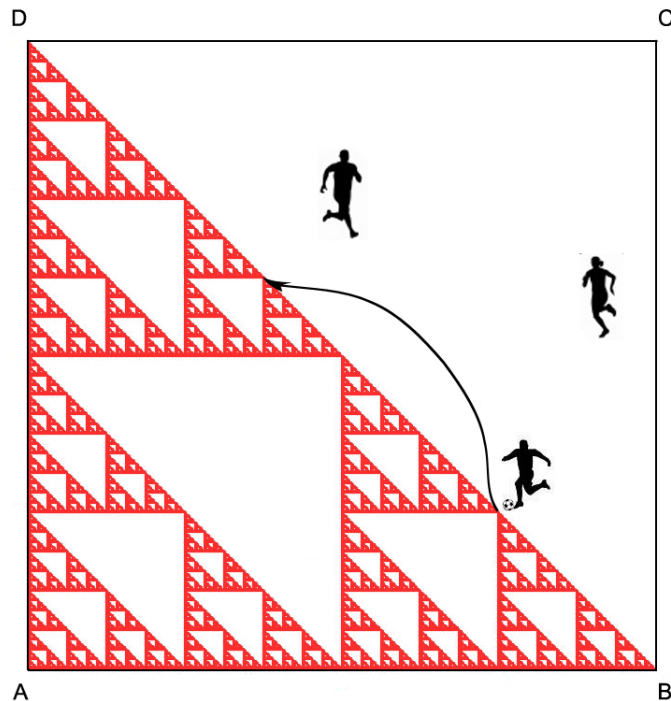
Označimo trikotnik s $\triangle$. Opazimo, da je sestavljen iz treh kopij samega sebe. Enačba zanj je

$$\triangle = \text{Ana}(\triangle) \cup \text{Bojan}(\triangle) \cup \text{David}(\triangle).$$

Tretji del

Cilka ozdravi in se vrne v igro. Igralcem postane dolgočas, zato malce spremenijo način igre. Sedaj vsak igralec udarja žogo po svojem sistemu, vedno enako in zanesljivo. Pravila so naslednja:

- vsak ima na igrišču svoj četverokotnik in vedno udari žogo nekam vanj,
- igralci žogo udarjajo tako, da ravno črto preslikajo v ravno črto (iz treh točk igrišča *P*, *Q* in *R*, ki ležijo na isti premici, na primer Ana udari žogo v točke *Ana(P)*, *Ana(Q)*, *Ana(R)*, ki tudi ležijo na isti premici),



Slika 2.2: V primeru igre treh igralcev na igrišču nastane slika trikotnika Sierpinskega.

- če žogo udarijo iz dveh različnih točk, jo udarijo v točki, ki sta bližje skupaj, kot začetni točki (igralci predstavljajo skrčitveno funkcijo).

Zaporedje udarcev ostaja naključno. Žogo pomočimo v barvo in opazujemo, kaj nastane po nekaj dneh igranja. Rezultat je podoba praproti, primer igre je na sliki 2.3. Spet opazimo, da je praprot unija štirih kopij same sebe. Označimo jo s P . Enačba praproti se glasi:

$$P = \text{Ana}(P) \cup \text{Bojan}(P) \cup \text{Cilka}(P) \cup \text{David}(P).$$

Funkcije, ki jih predstavljajo igralci, enolično določajo nastalo sliko. V prvem primeru je slika celo igrišče, v drugem trikotnik Sierpinskega in v zadnjem primeru praprot. Torej, če spremenimo način igre, spremenimo sliko.

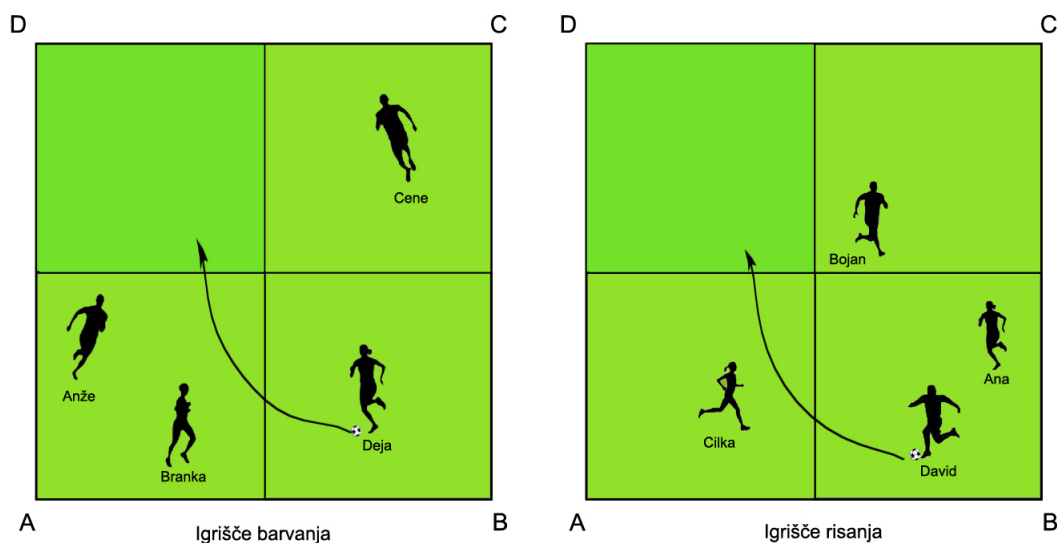


Slika 2.3: Drugačen sistem igre; na igrišču nastane slika praproti.

Sliki, ki jo igralci narišejo na igrišče, pravimo fraktal. Preprosto bi ga lahko opisali kot množico točk na igrišču, ki zadošča enačbi

$$fraktal = Ana(fraktal) \cup Bojan(fraktal) \cup \\ \cup Cilka(fraktal) \cup David(fraktal).$$

Iz enačbe je očitno, da je fraktal sestavljen iz več pomanjšanih kopij samega sebe. Tej lastnosti pravimo samopodobnost. Sistem funkcij, ki jih predstavljajo igralci, imenujemo iterativni funkcijski sistem (IFS). Služi nam za pomoč pri opisu fraktalov. Sestavljen je iz prostora, v našem primeru igrišče, in



Slika 2.4: Nogometni igrišči v primeru dveh ekip.

funkcij na tem prostoru, v primeru nogometa so to igralci. Vsebuje lahko različno število funkcij oziroma igralcev, ki udarjajo žogo konsistentno, vsak po svojem pravilu.

Četrty del

V zgornjih primerih smo se naučili narisati fraktale. Da smo videli, kaj se dogaja z žogo, smo jo pomočili v barvo. Nastal je obarvan fraktal. Poglejmo, kako bi fraktale obarvali drugače, da bi bili še bolj čudoviti. Našim štirim igralcem nogometa se pridružijo prijatelji Anže, Branka, Cene in Deja. Vendar ne motijo njihove igre, temveč zavzamejo sosednje igrišče. Primer igre je na sliki 2.4.

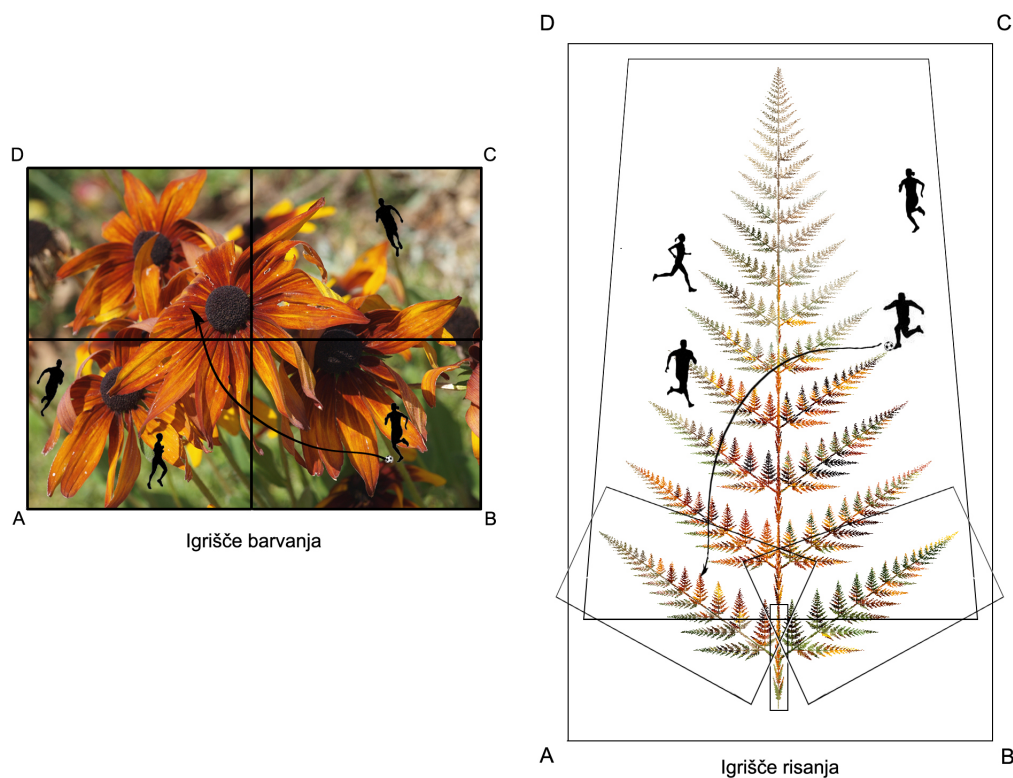
Imenujmo igrišče, kjer so Ana, Bojan, Cilka in David, igrišče risanja. Igrišče Anžeta, Branke, Ceneta in Deje pa naj bo igrišče barvanja. Na igrišče barvanja postavimo poljubno sliko. Na njem se igra kot v prvem delu, torej vsak udarja v svojo četrtino po naključnem zaporedju. Na igrišču risanja pa igrajo po sistemu za praprot.

Pravila igre se malce spremenijo:

- igrišči sta lahko različnih oblik,
- na igrišču barvanja igrajo naključno igro,

- na igrišču risanja v vsakem koraku žoga udari igralec z isto začetnico, kot v tem koraku udari igralec na igrišču barvanja - ko udari Anže, udari Ana, ko udari Branka, udari Bojan, Cilka udari, ko udari Cene ter David, ko udari Deja,
- na igrišču risanja žoga nariše na tleh piko iste barve, kot je barva točke, na kateri pristane žoga na igrišču barvanja.

Rezultat igre na igrišču risanja je praprot, pobarvana z barvami iz slike iz igrišča barvanja. Primer je na sliki 2.5.



Slika 2.5: Primer prevzemanja barv. Igralca z isto začetnico imena udarita istočasno na obeh igriščih. Točka, kamor pade žoga na igrišču risanja, se obarva z barvo točke, kamor je padla žoga na igrišču barvanja. Tako na igrišču risanja nastane praprot, obarvana z barvami iz vhodne slike na igrišču barvanja.

Poglavje 3

Metrični prostor in prostor fraktalov

V fraktalni geometriji nas zanimajo različne nenavadne podmnožice ravnine $\mathbb{R}^2$ ali bolj splošnega prostora $\mathbb{R}^n$. Čeprav so prostori običajno preprosti, lahko v njih "živijo" zelo komplicirani fraktali. Kaj je pravzaprav fraktal? Za začetek naj pomeni kar podmnožico prostora, v katerem živi.

Prostor, označen z $\mathbb{X}$, je množica z neko dodatno strukturo. Poznamo različne prostore. Na primer prostor realnih števil $\mathbb{R}$, v katerem so točke realna števila, ali prostor zveznih funkcij, kjer točke prostora predstavljajo posamezne funkcije. V tem delu bomo največkrat imeli opravka s prostoroma $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^2$.

Pri obravnavi fraktalov nas bodo zanimala razmerja med točkami in njihova organizacija v prostoru. Opišemo jih lahko na več načinov, za nas bo pomemben način s pomočjo funkcije razdalje.

Definicija 3.1. *Metrični prostor* $(\mathbb{X}, d)$ je sestavljen iz prostora $\mathbb{X}$ skupaj s funkcijo $d: \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$. Funkcija d meri razdaljo med pari točk $x, y \in \mathbb{X}$. Pravimo ji *funkcija razdalje* ali *metrika*. Zanje morajo veljati naslednje lastnosti:

1. $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in \mathbb{X}$
2. $0 < d(x, y) < \infty, \forall x, y \in \mathbb{X}, x \neq y$
3. $d(x, x) = 0, \forall x \in \mathbb{X}$
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in \mathbb{X}$

Naj bo $S \subset \mathbb{X}$ podmnožica metričnega prostora $(\mathbb{X}, d)$. Potem je tudi $d: S \times S \rightarrow \mathbb{R}$ metrika in (S, d) metrični prostor.

Metrični prostori igrajo temeljno vlogo v fraktalni geometriji, saj brez metrike težko podamo definicijo fraktala.

Primer. Evklidska razdalja in razdalja Manhattan sta v ravnini $\mathbb{R}^2$ med točkama $x = (x_1, x_2)$ in $y = (y_1, y_2)$ definirani kot

$$d_{evklidska}(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

$$d_{manhattan}(x, y) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

Definicija 3.2. Metriki d_1 in d_2 sta *ekvivalentni*, če in samo če obstaja pozitivna konstanta k , da za vsak $x, y \in \mathbb{X}$ velja

$$\frac{1}{k} \cdot d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq k \cdot d_1(x, y).$$

Funkciji $f: (\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}}) \rightarrow (\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ pravimo *metrična transformacija*, prostoroma $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ in $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ pa *ekvivalentna prostora*, če in samo če je funkcija f bijektivna ter je metrika $d_{\mathbb{X}}$ ekvivalentna metriki d' , definirani kot

$$d'(x, y) = d_{\mathbb{Y}}(f(x), f(y)), \forall x, y \in \mathbb{X}.$$

Fraktalna geometrija se ukvarja z opisom, razvrstitvijo, analizo in opazovanjem fraktalov kot podmnožic metričnih prostorov. Podmnožice imajo različne lastnosti, kot so zaprtost, odprtost, omejenost in polnost.

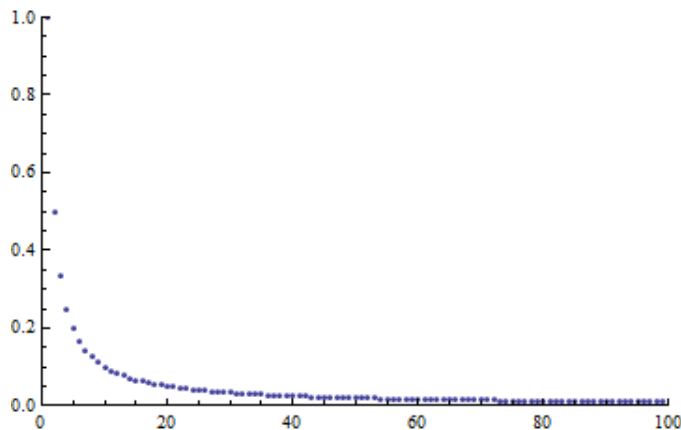
Definicija 3.3. Pravimo, da je lastnost množice $S \subset \mathbb{X}$ *invariantna* oziroma *se ohranja s funkcijo* $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$, če in samo če lastnost, ki velja za množico $f(S)$, velja tudi za množico S .

3.1 Cauchyjevo zaporedje

Definicija 3.4. Zaporedje točk $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ v metričnem prostoru $(\mathbb{X}, d)$ je *Cauchyjevo zaporedje*, če in samo če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja število $N > 0$, da velja

$$d(x_n, x_m) < \epsilon, \forall n, m > N.$$

Z drugimi besedami to pomeni, da so sosednji členi zaporedja čedalje bližje skupaj.



Slika 3.1: Graf zaporedja $\left\{x_n = \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Točke konvergirajo k 0.

Definicija 3.5. Zaporedje točk $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ v metričnem prostoru $(\mathbb{X}, d)$ *konvergira* k točki $x \in \mathbb{X}$, če in samo če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja število $N > 0$, da velja

$$d(x_n, x) < \epsilon, \forall n > N.$$

Točki x v tem primeru pravimo *limita zaporedja* in jo označimo z

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Primer. Naj bo d običajna metrika v $\mathbb{R}$, torej $d(x, y) = |x - y|$. Zaporedje točk

$$\left\{x_n = \frac{1}{n} \mid n = 1, 2, 3, \dots\right\} \subset \mathbb{R} \quad (3.1)$$

konvergira k točki $x = 0$. To zapišemo kot

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Grafičen prikaz zgornjega zaporedja z limito je na sliki 3.1.

Izrek 3.1. Če zaporedje točk $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ v metričnem prostoru $(\mathbb{X}, d)$ konvergira k točki $x \in \mathbb{X}$, je $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ Cauchyjevo zaporedje.

Dokaz. Zaporedje je Cauchyjevo, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja število $N > 0$, da za $n, m > N$ velja $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

Naj bo x limita zaporedja $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. To pomeni, da za $\epsilon > 0$ lahko izberemo $N > 0$ in $n, m > N$, da velja

$$d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2} \text{ ter } d(x_m, x) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Po trikotniški neenakosti izpeljemo

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x) + d(x_m, x) \leq \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

□

Obratno ne velja, kar kaže naslednji primer.

Primer. Vzemimo za zgled zaporedje iz enačbe 3.1 prejšnjega primera. V prostoru $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ je zaporedje Cauchyjevo, ne pa konvergentno, saj njegova limita ni del prostora $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Definicija 3.6. Metrični prostor $(\mathbb{X}, d)$ je *poln*, če in samo če ima vsako Cauchyjevo zaporedje $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ iz $\mathbb{X}$ limito $x \in \mathbb{X}$. Pravimo, da je podmnožica $S \subset \mathbb{X}$ *polna*, če je prostor (S, d) poln.

Definicija 3.7. Naj bosta $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ in $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ metrična prostora. Pravimo, da je funkcija

$$f: (\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}}) \rightarrow (\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$$

zvezna v točki x , če in samo če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$ (odvisen od x in ϵ), da velja

$$d_{\mathbb{Y}}(f(x), f(y)) < \epsilon,$$

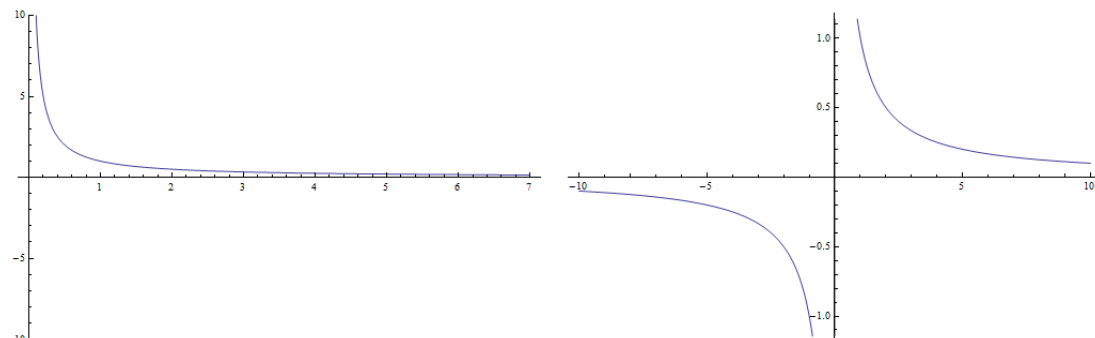
za $d_{\mathbb{X}}(x, y) < \delta$ in $x, y \in \mathbb{X}$.

Funkcija f je *zvezna*, če in samo če je zvezna v vsaki točki $x \in \mathbb{X}$, in je *enakomerno zvezna*, če in samo če je možno izbrati δ neodvisno od x .

Če je funkcija $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ zvezna in $S \subseteq \mathbb{X}$, je tudi $f: S \rightarrow \mathbb{Y}$ zvezna.

Primer. Naj bo d evklidska razdalja in funkcija $f_1: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ definirana s predpisom $f_1(x) = 1/x$. Funkcija f_1 je zvezna. Graf zvezne funkcije lahko narišemo z eno potezo, primer je na sliki 3.2.

Poglejmo še funkcijo $f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definirano kot $f_2(x) = f_1(x) = 1/x$. Funkcija f_2 v tem primeru ni zvezna. Grafa funkcije f_2 se ne da narisati z eno potezo.



Slika 3.2: Funkcija f_1 na levi strani je zvezna, f_2 na desni pa ne.

3.2 Lastnosti podmnožic metričnega prostora

Nadaljujmo z opisom osnovnih lastnosti podmnožic metričnega prostora.

Definicija 3.8. Podmnožica prostora $S \subset \mathbb{X}$ je *odprta*, če in samo če za vsak $x \in S$ obstaja realno število $r > 0$, da velja:

$$K(x, r) := \{y \in \mathbb{X} \mid d(x, y) < r\} \subset S.$$

$K(x, r)$ je odprta kroglja s središčem v x in polmerom r .

Definicija 3.9. Naj bo $S \subset \mathbb{X}$ poljubna množica. Točka $x \in \mathbb{X}$ je *robna točka* množice S , če za vsak $r > 0$ velja, da kroglja $K(x, r)$ seka tako S kot $\mathbb{X} \setminus S$.

Množica je odprta, če ne vsebuje nobene svoje robne točke.

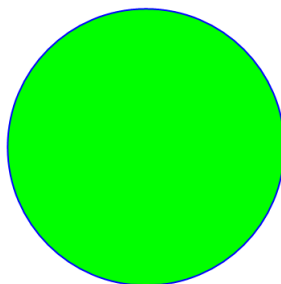
Definicija 3.10. *Zaprta množica* S je podmnožica prostora $\mathbb{X}$, katere komplement je odprta množica. Zaprta množica vsebuje vse svoje robne točke.

Izrek 3.2. *Zaprta podmnožica S polnega metričnega prostora $(\mathbb{X}, d)$ je poln metrični prostor.*

Dokaz. Naj bo $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ Cauchyjevo zaporedje v S . Potem je to zaporedje Cauchyjevo tudi v prostoru $\mathbb{X}$. Ker je $\mathbb{X}$ poln, ima zaporedje limito $x \in \mathbb{X}$. S je zaprta množica, zato je $x \in S$. Torej je tudi S polna. $\square$

Primer. Na sliki 3.3 so točke $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, za katere velja $x^2 + y^2 \leq r^2$. Točke, za katere v enačbi velja enakost, so modre. Točke, za katere velja neenačaj, so zelene.

Zelene točke tvorijo odprto množico. Unija modrih in zelenih točk pa je zaprta množica.



Slika 3.3: Primer odprte in zaprte množice.

Definicija 3.11. Funkcija $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ je *odprta*, če in samo če preslika odprto množico v odprto množico.

Definicija 3.12. Za funkcijo $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ pravimo, da je *homeomorfizem*, če in samo če je injektivna, surjektivna, zvezna in odprta.

Drugače povedano, za funkcijo f velja, da ima inverzno funkcijo f^{-1} , obe funkciji pa sta zvezni.

Za homeomorfizem velja, da ohranja lastnosti množic, kot so odprtost, zaprtost ali povezanost, nepovezanost, omejenost.

Definicija 3.13. Za metrični prostor $(\mathbb{X}, d)$ pravimo, da je *povezan*, če in samo če zanj velja ena izmed ekvivalentnih trditev:

- edini podmnožici $\mathbb{X}$, ki sta hkrati odprti in zaprti, sta prazna množica $\emptyset$ ter cel prostor $\mathbb{X}$,
- prostora $\mathbb{X}$ se ne da razdeliti na dve neprazni, disjunktni, zaprti množici.

$\mathbb{X}$ je *nepovezan*, če ni povezan. $\mathbb{X}$ je *povsem nepovezan*, če so edine neprazne povezane podmnožice iz $\mathbb{X}$, podmnožice z eno samo točko.

Primer. Zaprt interval $[0, 2] \subseteq \mathbb{R}$ je povezan. Unija $[0, 2] \cup [4, 6]$ je nepovezana. Prostor celih števil $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ je povsem nepovezan.

Definicija 3.14. Zaporedju $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{X}$ pravimo *podzaporedje* zaporedja $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{X}$, če obstaja naraščajoče zaporedje pozitivnih števil $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, kjer je $x_{n_k} = y_k$ za vsak $k = 1, 2, \dots$.

Primer. Zaporedje B, C, D, G je podzaporedje končnega zaporedja $A, C, B, D, E, G, C, E, D, B, G$. Naraščajoče zaporedje pozitivnih števil oziroma zaporedje indeksov je v tem primeru 3, 7, 9, 11.

Definicija 3.15. Metrični prostor $(\mathbb{X}, d)$ je *povsem omejen*, če in samo če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja končna množica točk $\{x_1, x_2, \dots, x_L\} \in \mathbb{X}$, da velja

$$\mathbb{X} = \bigcup \{K(x_l, \epsilon) \mid l = 1, 2, \dots, L\}.$$

Z drugimi besedami je metrični prostor povsem omejen, če ga je za vsak $\epsilon > 0$ mogoče pokriti s končno mnogo krogli s polmerom ϵ .

Definicija 3.16. Metrični prostor $(\mathbb{X}, d)$ je *kompakten*, če vsako neskončno zaporedje $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ iz $\mathbb{X}$ vsebuje konvergentno podzaporedje z limito iz $\mathbb{X}$.

Primer. Vsak zaprt omejen interval $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ je kompakten. V splošnem znani Heine-Borelov izrek (glej [6]) pravi, da je množica $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompaktna, če in samo če je zaprta in omejena.

Izrek 3.3. Naj bo $(\mathbb{X}, d)$ poln metrični prostor. $\mathbb{X}$ je kompakten, če in samo če je povsem omejen.

Dokaz. $(\Rightarrow)$ $\mathbb{X}$ je kompakten metrični prostor. Predpostavimo, da ni povsem omejen. Potem za nek $\epsilon > 0$ obstaja neskončno zaporedje $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, za katerega velja

$$d(x_i, x_j) \geq \epsilon, \quad \forall i, j. \quad (3.2)$$

Ker je $\mathbb{X}$ kompakten, vsebuje podzaporedje $\{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$. Zato lahko najdemo taka $s, t \in \{1, 2, \dots\}$, da zanju velja

$$d(x_{n_s}, x_{n_t}) < \epsilon,$$

kar je v protislovju z enačbo 3.2. $\mathbb{X}$ je torej povsem omejen.

$(\Leftarrow)$ $\mathbb{X}$ je povsem omejen metrični prostor. Dokažimo, da je posledično kompakten.

Vzemimo poljubno zaporedje $\{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ iz $\mathbb{X}$. Ker je prostor povsem omejen, ga lahko zapišemo kot unijo krogel s polmerom $\epsilon = 1$

$$\mathbb{X} = \bigcup \{K(x_l, 1) \mid x_l \in \mathbb{X}, l = 1, 2, \dots, L\}.$$

Vsaj ena od teh krogel, recimo $K(y_1, 1)$, vsebuje neskončno členov našega zaporedja. To pomeni, da obstaja taka neskončna podmnožica $N_1 \subset \mathbb{N}$, da je $x_n \in K(y_1, 1)$ za vsak $n \in N_1$.

Prostor lahko $\mathbb{X}$ zapišemo tudi kot unijo krogel s polmerom $\epsilon = 1/2$. Podobno kot prej ugotovimo, da obstaja taka točka $y_2 \in \mathbb{X}$ in taka neskončna podmnožica $N_2 \subset N_1$, da je $x_n \in K(y_2, 1/2)$ za vsak $n \in N_2$.

V k -tem koraku pokrijemo prostor s krogli s polmerom $1/k$ ter najdemo točko $y_k \in \mathbb{X}$ in neskončno množico $N_k \subset N_{k-1}$, da je $x_n \in K(y_k, 1/k)$ za vsak $n \in N_k$.

Vzemimo poljubne $n_1 \in N_1$, $n_2 \in N_2$, $n_3 \in N_3 \dots$. Pokažimo, da je podzaporedje $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ zaporedja $\{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ Cauchyjevo. Vzemimo poljuben $\epsilon > 0$. Izberimo naravno število $k > 2/\epsilon$. Za poljubna $i, j \geq k$ je $n_i \in N_i \subset N_k$ in $n_j \in N_j \subset N_k$. Zato ležita člena x_{n_i} in x_{n_j} izbranega podzaporedja v $K(y_k, 1/k)$. Od tod sledi, da je $d(x_{n_i}, x_{n_j}) < 2/k < \epsilon$. Našli smo Cauchyjevo podzaporedje zaporedja $\{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$, zato je prostor $\mathbb{X}$ res kompakten. $\square$

3.3 Hausdorffova metrika

V tem podpoglavju bomo predstavili Hausdorffovo metriko, ki meri razdalje med nepraznimi kompaktnimi podmnožicami metričnega prostora. Intuitivno sta dve množici blizu po Hausdorffovi metriki, če je vsaka točka ene množice blizu neke točke iz druge množice.

Za razumevanje Hausdorffove metrike bomo na začetku predstavili pojma oddaljenosti točke od množice in oddaljenosti med dvema množicama.

V izrekih in definicijah tega poglavja predpostavimo, da je prostor $(\mathbb{X}, d)$ v vseh primerih poln. Označimo še s $\mathbb{H}(\mathbb{X})$ prostor nepraznih kompaktnih podmnožic prostora $\mathbb{X}$.

Izrek 3.4. *Naj bo $x \in \mathbb{X}$ ter $B \in \mathbb{H}(\mathbb{X})$. Potem obstaja vsaj ena točka $b' = b'(x) \in B$, da velja*

$$d(x, b) \geq d(x, b'(x)), \forall b \in B.$$

Izrek bomo dokazali s pomočjo znanega Weierstrassovega izreka, katerega dokaz je v [8].

Izrek 3.5. (Weierstrassov izrek) *Če je $(\mathbb{X}, d)$ kompakten metrični prostor, je vsaka zvezna realna funkcija na $\mathbb{X}$ omejena in doseže največjo in najmanjšo vrednost.*

Dokaz izreka 3.4. Fiksirajmo $x \in \mathbb{X}$. Potem je funkcija $f: B \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$, definirana kot

$$f(b) = d(x, b), \forall b \in B,$$

zvezna, B pa kompaktna. Po izreku 3.5 sledi, da obstaja vsaj ena točka iz B , v kateri je vrednost funkcije f minimalna. To točko imenujmo $b' \in B$, ker pa je točka b' odvisna tudi od x , pišemo $b' = b'(x)$. $\square$

Definicija 3.17. Definirajmo

$$\mathcal{D}_B(x) := \min\{d(x, b) \mid b \in B\}.$$

$\mathcal{D}_B(x)$ pravimo *funkcija najkrajše oddaljenosti* od množice B .

Definicija 3.18. Razdalja med $A \in \mathbb{H}(\mathbb{X})$ in $B \in \mathbb{H}(\mathbb{X})$ je definirana kot

$$\mathcal{D}_B(A) := \max\{\mathcal{D}_B(a) \mid a \in A\}, \forall A, B \in \mathbb{H}(\mathbb{X}).$$

Izrek 3.6. Za vsak $A, B, C \in \mathbb{H}(\mathbb{X})$ velja:

$$\mathcal{D}_B(A) \leq \mathcal{D}_B(C) + \mathcal{D}_C(A).$$

Dokaz. Za vsak $a \in A$ velja

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_B(a) &= \min_{b \in B} d(a, b) \\ &\leq \min_{b \in B} (d(a, c) + d(c, b)), \forall c \in C \\ &= d(a, c) + \min_{b \in B} d(c, b), \forall c \in C \\ &= d(a, c) + \mathcal{D}_B(c). \end{aligned}$$

Ker zgornje velja za $\forall c \in C$, velja tudi za najmanj oddaljen $c \in C$, zato

$$\mathcal{D}_B(a) \leq \mathcal{D}_C(a) + \mathcal{D}_B(c).$$

Enako lahko sklepamo za zadnjo enačbo. Če velja za vsak $c \in C$ ter vsak $a \in A$, velja tudi za najbolj oddaljen a ter najmanj oddaljen c :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_B(a) &\leq \mathcal{D}_C(a) + \mathcal{D}_B(c) \\ \max_{a \in A} \mathcal{D}_B(a) &\leq \max_{a \in A} \mathcal{D}_C(a) + \max_{c \in C} \mathcal{D}_B(c) \\ \mathcal{D}_B(A) &\leq \mathcal{D}_C(A) + \mathcal{D}_B(C). \end{aligned}$$

□

Izrek 3.7. Definirajmo razdaljo

$$d_{\mathbb{H}(\mathbb{X})}(A, B) := \max\{\mathcal{D}_B(A), \mathcal{D}_A(B)\}, \forall A, B \in \mathbb{H}(\mathbb{X}).$$

$(\mathbb{H}(\mathbb{X}), d_{\mathbb{H}(\mathbb{X})})$ je metrični prostor.

Dokaz. Označimo $d_{\mathbb{H}(\mathbb{X})}$ z $d_{\mathbb{H}}$. $(\mathbb{H}(\mathbb{X}), d_{\mathbb{H}})$ je metrični prostor, če zanj veljajo vse lastnosti iz definicije 3.1.

$$\begin{aligned}
1. \quad d_{\mathbb{H}}(A, B) &= \max\{\mathcal{D}_B(A), \mathcal{D}_A(B)\} = \\
&= \max\{\mathcal{D}_A(B), \mathcal{D}_B(A)\} = \\
&= d_{\mathbb{H}}(B, A)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2. \quad d_{\mathbb{H}}(A, B) &= \max\{\mathcal{D}_B(A), \mathcal{D}_A(B)\} = \\
&= \max\left\{\max_{a \in A} \min_{b \in B} d(a, b), \max_{b \in B} \min_{a \in A} d(b, a)\right\}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow d_{\mathbb{H}}(A, B) = d(a, b)$ za nek $a \in A$ in nek $b \in B$. Za $d(a, b)$ velja, da je med 0 in ∞ . Torej isto velja tudi za razdaljo $d_{\mathbb{H}}(A, B)$, $\forall A, B \in \mathbb{H}(\mathbb{X})$, $A \neq B$.

$$3. \quad d_{\mathbb{H}}(A, A) = \max\{\mathcal{D}_A(A), \mathcal{D}_A(A)\} = \mathcal{D}_A(A)$$

$\Rightarrow$ Razdalja množice od same sebe je enaka 0.

4. Po izreku 3.6 velja $\mathcal{D}_B(A) \leq \mathcal{D}_C(A) + \mathcal{D}_B(C)$ in $\mathcal{D}_A(B) \leq \mathcal{D}_A(C) + \mathcal{D}_C(B)$. Zato

$$\begin{aligned}
d_{\mathbb{H}}(A, B) &\leq \max\{\mathcal{D}_C(A) + \mathcal{D}_B(C), \mathcal{D}_A(C) + \mathcal{D}_C(B)\} \\
&\leq \max\{\mathcal{D}_C(A), \mathcal{D}_A(C)\} + \max\{\mathcal{D}_B(C), \mathcal{D}_C(B)\} \\
&= d_{\mathbb{H}}(A, C) + d_{\mathbb{H}}(C, B).
\end{aligned}$$

□

Definicija 3.19. Metriki $d_{\mathbb{H}} = d_{\mathbb{H}(\mathbb{X})}$ pravimo *Hausdorffova metrika*. Razdaljo $d_{\mathbb{H}}(A, B)$ imenujemo *Hausdorffova razdalja med točkama* $A, B \in \mathbb{H}(\mathbb{X})$.

Izrek 3.8. $\forall A, B, C, D \in \mathbb{H}(\mathbb{X})$ velja

$$d_{\mathbb{H}}(A \cup B, C \cup D) \leq \max\{d_{\mathbb{H}}(A, C), d_{\mathbb{H}}(B, D)\}.$$

Dokaz.

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_A(B \cup C) &= \max_{x \in B \cup C} \min_{a \in A} d(a, x) \\
&= \max\left\{\max_{b \in B} \min_{a \in A} d(a, b), \max_{c \in C} \min_{a \in A} d(a, c)\right\} \\
&= \max\{\mathcal{D}_A(B), \mathcal{D}_A(C)\}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathcal{D}_{A \cup B}(C \cup D) = \max\{\mathcal{D}_{A \cup B}(C), \mathcal{D}_{A \cup B}(D)\}.$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{A \cup B}(C) &= \max_{c \in C} \min_{x \in A \cup B} d(c, x) \\
&= \max_{c \in C} \min\{\min_{a \in A} d(c, a), \min_{b \in B} d(c, b)\} \\
&\leq \min\{\max_{c \in C} \min_{a \in A} d(c, a), \max_{c \in C} \min_{b \in B} d(c, b)\} \\
&= \min\{\mathcal{D}_A(C), \mathcal{D}_B(C)\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \mathcal{D}_{A \cup B}(C) \leq \mathcal{D}_A(C) \text{ in } \mathcal{D}_{A \cup B}(D) \leq \mathcal{D}_B(D) \\
&\Rightarrow \mathcal{D}_{A \cup B}(C \cup D) \leq \max\{\mathcal{D}_A(C), \mathcal{D}_B(C)\} \\
&\Rightarrow \mathcal{D}_{C \cup D}(A \cup B) \leq \max\{\mathcal{D}_C(A), \mathcal{D}_D(B)\}.
\end{aligned}$$

Iz tega sledi

$$\begin{aligned}
d_{\mathbb{H}}(A \cup B, C \cup D) &= \max\{\mathcal{D}_{A \cup B}(C \cup D), \mathcal{D}_{C \cup D}(A \cup B)\} \\
&\leq \max\{\max\{\mathcal{D}_A(C), \mathcal{D}_B(D)\}, \max\{\mathcal{D}_C(A), \mathcal{D}_D(B)\}\} \\
&\leq \max\{\mathcal{D}_A(C), \mathcal{D}_B(D), \mathcal{D}_C(A), \mathcal{D}_D(B)\} \\
&= \max\{\max\{\mathcal{D}_A(C), \mathcal{D}_C(A)\}, \max\{\mathcal{D}_D(B), \mathcal{D}_B(D)\}\} \\
&= \max\{d_{\mathbb{H}}(A, C), d_{\mathbb{H}}(B, D)\}.
\end{aligned}$$

□

Na tem mestu lahko nadgradimo definicijo fraktala. Za zdaj bo fraktal pomenil podmnožico prostora $(\mathbb{H}(\mathbb{X}), d_{\mathbb{H}(\mathbb{X})})$. Prostoru $(\mathbb{H}(\mathbb{X}), d_{\mathbb{H}(\mathbb{X})})$ zato pravimo prostor fraktalov.

Zaporedje točk, iz katerega fraktal nastane, je Cauchyjevo zaporedje iz prostora fraktalov. Obstoj limite takšnega zaporedja in posledično fraktala je odvisen od polnosti prostora fraktalov.

Z naslednjima izrekoma bomo spoznali, pod kakšnimi pogoji je prostor fraktalov poln.

Izrek 3.9. (Razširitvena lema) *Naj bo $\{A_n \in \mathbb{H}(\mathbb{X})\}_{n=1}^{\infty}$ Cauchyjevo zaporedje v prostoru $(\mathbb{H}(\mathbb{X}), d_{\mathbb{H}})$. Predpostavimo, da je $\{x_{n_j} \in A_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ Cauchyjevo zaporedje v prostoru $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$, kjer je $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ naraščajoče zaporedje pozitivnih števil. Potem obstaja Cauchyjevo zaporedje $\{x_n \in A_n\}_{n=1}^{\infty}$ v prostoru $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$, katerega podzaporedje je $\{x_{n_j} \in A_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$.*

Dokaz. Naj bo $n_0 = 0$. Za vsak $j \in \{1, 2, 3, \dots\}$ in $n \in \{n_{j-1} + 1, \dots, n_j\}$ izberimo $x_n \in A_n$ tako, da velja

$$\mathcal{D}_{A_n}(x_{n_j}) = d_{\mathbb{X}}(x_n, x_{n_j}).$$

x_n je najbližja točka x_{n_j} v množici A_n . Tako dobimo zaporedje $\{x_{n_j} \in A_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$, ki je podzaporedje zaporedja $\{x_n \in A_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Sedaj imamo podzaporedje in zaporedje, dokazati moramo še, da je zaporedje $\{x_n \in A_n\}_{n=1}^{\infty}$ Cauchyjevo.

Naj bo dan $\epsilon > 0$. Potem obstaja $N_1 > 0$, da za vsak $n_k, n_l \geq N_1$ velja $d_{\mathbb{X}}(x_{n_k}, x_{n_l}) \leq \epsilon$. Obstaja tudi $N_2 > 0$, da za vsak $m, n \geq N_2$ velja $d_{\mathbb{H}}(A_n, A_m) \leq \epsilon$.

Po trikotniški neenakosti je

$$d_{\mathbb{X}}(x_m, x_n) \leq d_{\mathbb{X}}(x_m, x_{n_k}) + d_{\mathbb{X}}(x_{n_k}, x_{n_l}) + d_{\mathbb{X}}(x_{n_l}, x_n). \quad (3.3)$$

Izberimo k , da bo $m \in \{n_{k-1} + 1, n_{k-1} + 2, \dots, n_k\}$ in takšen l , da bo $n \in \{n_{l-1} + 1, n_{l-1} + 2, \dots, n_l\}$ ter bo veljalo $m, n \geq \max\{N_1, N_2\}$.

Potem veljajo neenakosti

$$d_{\mathbb{X}}(x_m, x_{n_k}) = \mathcal{D}_{A_m}(x_{n_k}) \leq \mathcal{D}_{A_m}(A_{n_k}) \leq d_{\mathbb{H}}(A_m, A_{n_k}) \leq \frac{\epsilon}{3},$$

$$d_{\mathbb{X}}(x_{n_l}, x_n) = \mathcal{D}_{A_{n_l}}(x_n) \leq \mathcal{D}_{A_{n_l}}(A_n) \leq d_{\mathbb{H}}(A_{n_l}, A_n) \leq \frac{\epsilon}{3},$$

$$d_{\mathbb{X}}(x_{n_l}, x_{n_k}) = \mathcal{D}_{A_{n_l}}(x_{n_k}) \leq \mathcal{D}_{A_{n_l}}(A_{n_k}) \leq d_{\mathbb{H}}(A_{n_l}, A_{n_k}) \leq \frac{\epsilon}{3},$$

iz katerih zaradi trikotniške neenakosti v enačbi 3.3 sledi

$$d_{\mathbb{X}}(x_m, x_n) \leq \epsilon, \forall m, n \geq \max\{N_1, N_2\}.$$

Zaporedje je res Cauchyjevo. □

Izrek 3.10. (Izrek o polnosti prostora fraktalov) *Naj bo $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ poln metrični prostor. Potem je tudi $(\mathbb{H}(\mathbb{X}), d_{\mathbb{H}})$ poln metrični prostor.*

Če je $\{A_n \in \mathbb{H}(\mathbb{X})\}_{n=1}^{\infty}$ Cauchyjevo zaporedje, potem lahko $A := \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ opišemo kot

$$A = \{x \in \mathbb{X} \mid \text{obstaja Cauchyjevo zaporedje } \{x_n \in A_n\}_{n=1}^{\infty}, \text{ ki konvergira k } x\}.$$

Dokaz. Dokaz izreka bomo razdelili na pet delov ter dokazali vsakega posebej.

(1) $A \neq \emptyset$.

Da A res ne bo prazna množica, moramo dokazati obstoj Cauchyjevega zaporedja $\{x_n \in A_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Najdemo lahko naraščajoče zaporedje pozitivnih števil $\{N_i\}_{i=1}^{\infty}$, da bo za $n, m > N_i$ veljalo $d_{\mathbb{H}}(A_n, A_m) < 1/2^i$.

Izberimo $x_{N_1} \in A_{N_1}$. Ker velja $d_{\mathbb{H}}(A_{N_1}, A_{N_2}) \leq 1/2$, lahko najdemo tudi $x_{N_2} \in A_{N_2}$, da bo $d_{\mathbb{X}}(x_{N_1}, x_{N_2}) < 1/2$.

Z indukcijo po j v x_{N_j} dobimo neskončno zaporedje $\{x_{n_j} \in A_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$, da za vsak $j \in \{1, 2, 3, \dots\}$ velja $d_{\mathbb{X}}(x_j, x_{j+1}) < 1/2^j$. Zaporedje je očitno Cauchyjevo.

Po izreku 3.9 obstaja konvergentno zaporedje $\{x_n \in A_n\}_{n=1}^{\infty}$, katerega podzaporedje je $\{x_{n_j} \in A_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$. Ker je $\mathbb{X}$ poln, limita zaporedja obstaja in je iz A .

(2) A je zaprta in zato polna množica (glej izrek 3.2).

Predpostavimo, da zaporedje $\{a_i \in A\}_{i=1}^{\infty}$ konvergira k $a \in \mathbb{X}$. Da je množica A zaprta, mora veljati vsebovanost $a \in A$.

Najdemo lahko naraščajoče zaporedje pozitivnih števil $\{N_n\}_{n=1}^{\infty}$, da bo veljalo $d_{\mathbb{X}}(a_{N_n}, a) < 1/n$.

Iz definicije A sledi, da za $a_i \in A$ obstaja zaporedje $\{a_{i,n} \in A_n\}_{n=1}^{\infty}$, ki konvergira k a_i za vsak $i \in \{1, 2, \dots\}$.

Torej lahko najdemo naraščajoče zaporedje pozitivnih števil $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$, da velja $d_{\mathbb{X}}(a_{N_n, M_n}, a_{N_n}) < 1/n$.

Po trikotniški neenakosti sledi

$$d_{\mathbb{X}}(a_{N_n, M_n}, a) \leq d_{\mathbb{X}}(a_{N_n, M_n}, a_{N_n}) + d_{\mathbb{X}}(a_{N_n}, a) < \frac{2}{n}.$$

Zaporedje $\{x_{N_n} = a_{N_n, M_n} \in A_{N_n}\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentno z limito a . Po definiciji A velja tudi $a \in A$.

(3) Dokažimo, da za nek $\epsilon > 0$ obstaja tak N , da za $n \geq N$ velja

$$A \subset \mathcal{B}_{A_n}(\epsilon) := \{x \in \mathbb{X} \mid \mathcal{D}_{A_n}(x) \leq \epsilon\}.$$

Za vsak $A, B \in \mathbb{H}(\mathbb{X})$ velja

$$A \subset \mathcal{B}_B(d_{\mathbb{H}}(B, A)) \text{ in } B \subset \mathcal{B}_A(d_{\mathbb{H}}(A, B)). \quad (3.4)$$

Za $\epsilon > 0$ obstaja $N > 0$, da za $n, m \geq N$ velja $d_{\mathbb{H}}(A_n, A_m) < \epsilon$. Po enačbi 3.4 zato velja $A_m \subset \mathcal{B}_{A_n}(\epsilon)$.

Naj bo $\{a_m \in A_m\}_{m=1}^{\infty}$ zaporedje, ki konvergira k $a \in A$. Potem je $a_m \in \mathcal{B}_{A_n}(\epsilon)$ za vsaka $n, m \geq N$.

Množica $\mathcal{B}_{A_n}(\epsilon)$ je zaprta, ker je A_n kompaktna. Torej velja $a \in \mathcal{B}_{A_n}(\epsilon)$ za vsak $n \geq N$ in posledično $A \subset \mathcal{B}_{A_n}(\epsilon)$, $\forall n \geq N$.

(4) A je povsem omejena in zaradi (2) kompaktna.

Recimo, da A ni povsem omejena. Potem za nek $\epsilon > 0$ obstaja zaporedje $\{x_i \in A\}_{i=1}^{\infty}$, da $d_{\mathbb{X}}(x_i, x_j) \geq \epsilon$ za $i \neq j$.

Po točki (3) velja $A \subset \mathcal{B}_{A_n}(\epsilon/3)$, za nek dovolj velik n . Od tod sledi, da lahko za vsak x_i najdemo ustrezen $y_i \in A_n$, da velja $d_{\mathbb{X}}(x_i, y_i) \leq \epsilon/3$.

Ker je A_n kompaktna množica, za zaporedje $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ obstaja konvergentno podzaporedje $\{y_{j_i}\}_{i=1}^{\infty}$. Zato lahko najdemo točki y_{j_1} in y_{j_2} , za kateri velja $d_{\mathbb{X}}(y_{j_1}, y_{j_2}) < \epsilon/3$. Po trikotniški neenakosti sledi

$$d_{\mathbb{X}}(x_{j_1}, x_{j_2}) \leq d_{\mathbb{X}}(x_{j_1}, y_{j_1}) + d_{\mathbb{X}}(y_{j_1}, y_{j_2}) + d_{\mathbb{X}}(y_{j_2}, x_{j_2}) < \epsilon.$$

Prišli smo v protislovje. A je povsem omejena množica. Hkrati je tudi polna in po (2) kompaktna.

(5) $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.

Iz (4) sledi, da $A \in \mathbb{H}(\mathbb{X})$. Za $\epsilon > 0$ obstaja $N > 0$, da za $n, m \geq N$ velja $d_{\mathbb{H}}(A_n, A_m) < \epsilon/2$ in $A \subset \mathcal{B}_{A_n}(\epsilon/2)$.

Naj bo $n \geq N$ in $y \in A_n$. Potem obstaja naraščajoče zaporedje pozitivnih števil večjih od n $\{N_i\}_{i=1}^{\infty}$, da za $m, k \geq N_j$ velja $A_m \subset \mathcal{B}_{A_k}(\epsilon/2^{j+1})$.

Velja $A_n \subset \mathcal{B}_{A_{N_1}}(\epsilon/2)$.

Ker je $y \in A_n$, obstaja točka $x_{N_1} \in A_{N_1}$, da $d_{\mathbb{X}}(y, x_{N_1}) < \epsilon/2$. Podobno je $x_{N_1} \in A_{N_1}$ in obstaja točka $x_{N_2} \in A_{N_2}$, da $d_{\mathbb{X}}(x_{N_1}, x_{N_2}) < \epsilon/2^2$. Z indukcijo v tej smeri lahko dokažemo obstoj zaporedja $\{x_{N_j} \in A_{N_j}\}_{j=1}^{\infty}$, za katerega velja $d_{\mathbb{X}}(x_{N_j}, x_{N_{j+1}}) < \epsilon/2^{j+1}$.

Sledi, da je zaporedje $\{x_{N_j} \in A_{N_j}\}_{j=1}^{\infty}$ Cauchyjevo, z limito $x \in A$ ter $d(y, x_{N_j}) < \epsilon$ za vsak j .

Iz slednjega velja $d(y, x) < \epsilon$, torej $A_n \subset \mathcal{B}_A(\epsilon)$ za vsak $n \geq N$. Po (3) velja, da $A \subset \mathcal{B}_{A_n}(\epsilon)$ za velike n . Torej $d_{\mathbb{H}}(A_n, A) \leq \epsilon$ za vsak dovolj velik n . A je res limita zaporedja $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$.

□

Poglavje 4

Transformacije v metričnem prostoru in konstrukcija fraktalov

Fraktalna geometrija se ukvarja z zapletenimi podmnožicami preprostih prostorov, kot so na primer $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{C}$. Poudarek je na podmnožicah, ki jih generirajo preproste geometrijske transformacije prostora samega vase in so zanj invariantne. Primer takšne preproste transformacije v prostoru $\mathbb{R}^2$ je afina transformacija.

4.1 Negibna točka in fraktali

Definicija 4.1. Imamo prostor $\mathbb{X}$ in funkcijo $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$. Točki $a \in \mathbb{X}$, za katero velja

$$f(a) = a,$$

pravimo *negibna točka* funkcije f .

Negibne točke so pomembne, saj povedo, kateri deli prostora ostanejo nespremenjeni po delovanju funkcije.

Primer. Funkcija $f(x) = x^2 - 3x + 4$ ima negibno točko v $x = 2$, saj je $f(2) = 2$.

Definicija 4.2. Za množico $S \subset \mathbb{X}$, pravimo da je *invariantna za funkcijo* $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$, če in samo če velja

$$f^{-1}(S) = S.$$

To pomeni, da velja tudi

$$f(S) = S,$$

saj za vsak $s \in S$ obstaja $u \in f^{-1}(S)$, da je $f(u) = s$, zato je $S \subseteq f(S)$. Po drugi strani imamo $u = f(s)$ za nek $s \in S = f^{-1}(S)$, zato $f(s) = u \in S$. Torej je $f(S) \subseteq S$.

V obratno smer ne moremo sklepati, razen če je funkcija f injektivna.

Primer. Poglejmo si funkcijo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, podano s predpisom $f(x) = x^2$ na množici $S = [0, 1] \in \mathbb{R}$. Velja $f(S) = S$. Inverz funkcije f je $f^{-1}(S) = \sqrt{x}$, ki slika v množico $[-1, 1] \in \mathbb{R}$. Torej $f^{-1}(S) \neq S$.

Naj bo $\mathbb{H}(\mathbb{X})$ prostor nepraznih kompaktnih podmnožic prostora $\mathbb{X}$. Potem je invarinatna množica $A \in \mathbb{H}(\mathbb{X})$ za funkcijo $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ negibna točka funkcije $\tilde{f}: \mathbb{H}(\mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{H}(\mathbb{X})$, podane s predpisom $\tilde{f}(A) = f(A)$.

V nadaljevanju bomo za funkcijo $\tilde{f}$ uporabljali kar oznako f .

Definicija 4.3. Naj bo $(\mathbb{X}, d)$ metrični prostor. Funkciji $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ pravimo da je *Lipschitzova z Lipschitzovo konstanto* $l \in \mathbb{R}$, če in samo če velja

$$d(f(x), f(y)) \leq l \cdot d(x, y), \quad \forall x, y \in \mathbb{X}. \quad (4.1)$$

Funkcija f je *skrčitev* ali *skrčitvena funkcija*, če je Lipschitzova z Lipschitzovo konstanto $l \in [0, 1)$. Konstanti $l \in [0, 1)$ v tem primeru pravimo *skrčitveni faktor*.

Skrčitvena funkcija ima vsaj eno negibno točko. Še bolj pomembno za nas pa bo dejstvo, da ima skrčitvena funkcija nad polnim metričnim prostorom enolično določeno negibno točko. O tem govori naslednji izrek.

Izrek 4.1. (Banachov skrčitveni izrek) *Naj bo $\mathbb{X}$ poln metrični prostor in $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ skrčitvena funkcija s skrčitvenim faktorjem l . Potem ima funkcija f enolično negibno točko $a \in \mathbb{X}$. Če vzamemo poljubno točko $x_0 \in \mathbb{X}$ in sestavimo zaporedje, ki je podano z rekurzivnim predpisom $x_n = f(x_{n-1})$ za $n = 1, 2, 3, \dots$, to zaporedje konvergira k negibni točki funkcije f .*

Velja tudi

$$d(x_0, a) \leq \frac{d(x_0, x_1)}{1 - l}. \quad (4.2)$$

Dokaz. Dokažimo enoličnost negibne točke s protislovjem. Recimo, da ima funkcija f dve negibni točki, a in b . Potem velja

$$d(a, b) = d(f(a), f(b)),$$

ker sta obe točki negibni. Ker je f skrčitev, je

$$d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq l \cdot d(a, b).$$

Velja, da je $d(a, b) > 0$, ker sta a in b različni točki, zato lahko z $d(a, b)$ delimo in ostane

$$1 \leq l.$$

Prišli smo v protislovje, ker je $l \in [0, 1)$.

Naslednje, kar želimo dokazati je, da za katerikoli začetni $x_0 \in \mathbb{X}$, zaporedje $x_n = f(x_{n-1})$ za $n \geq 0$ konvergira k negibni točki funkcije f . Ker velja

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq l d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq l^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) \leq \dots \leq l^n d(x_0, x_1), \end{aligned}$$

lahko dokažemo, da je zaporedje $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ Cauchyjevo.

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq l^n d(x_0, x_1) + l^{n+1} d(x_0, x_1) + l^{n+2} d(x_0, x_1) + \dots + l^{m-1} d(x_0, x_1) \\ &= d(x_0, x_1)(l^n + l^{n+1} + l^{n+2} + \dots + l^{m-1}) \\ &\leq d(x_0, x_1)(l^n + l^{n+1} + l^{n+2} + \dots) \\ &= d(x_0, x_1) \cdot l^n \cdot (1 + l + l^2 + \dots) \\ &\leq d(x_0, x_1) \frac{l^n}{1-l} \end{aligned}$$

Za vsak $\epsilon > 0$ izberemo $N > 1$, da velja $(l^N/(1-l))d(x_0, x_1) < \epsilon$. Potem za vsak $m > n \geq N$ velja

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_0, x_1) \frac{l^n}{1-l} \leq d(x_0, x_1) \frac{l^N}{1-l} < \epsilon.$$

S tem smo dokazali, da je zaporedje ras Cauchyjevo. Prostor $\mathbb{X}$ je poln, zato ima zaporedje $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ limito v $\mathbb{X}$.

Naj bo $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Ker je funkcija f zvezna, velja

$$f(a) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = a.$$

Zgoraj smo dokazali, da velja

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_0, x_1) \frac{l^n}{1-l}.$$

Če je $n = 0$, dobimo

$$d(x_0, x_m) \leq d(x_0, x_1) \frac{1}{1-l}.$$

Naj gre $m \rightarrow \infty$. Potem je

$$d(x_0, a) \leq d(x_0, x_1) \frac{1}{1-l},$$

kar ustreza enačbi 4.2 izreka. $\square$

Primer. Funkcija $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definirana kot $f(x) = \frac{2}{3} + \frac{x}{3}$, je skrčitev nad metričnim prostorom $(\mathbb{R}^2, d_{\text{evklidska}})$. Skrčitveni faktor je $l = \frac{1}{3}$.

Za $x_0 = 0$ dobimo zaporedje

$$x_n = 1 - \frac{1}{3^n}.$$

Negibna točka funkcije f je rešitev enačbe $\frac{2}{3} + \frac{a}{3} = a$, torej $a = 1$ in je tudi limita zaporedja $0, \frac{2}{3}, \frac{8}{9}, \frac{26}{27}, \dots$

Skrčitvene funkcije v osnovnem prostoru $\mathbb{X}$ so uporabne za konstrukcijo skrčitvenih funkcij v prostoru $\mathbb{H}(\mathbb{X})$. Negibne točke takšnih skrčitev v $\mathbb{H}(\mathbb{R}^2)$ so primeri fraktalov.

Naslednji izrek pravi, da funkcija $f: \mathbb{H}(\mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{H}(\mathbb{X})$ podeduje lastnost skrčitvene funkcije $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ v osnovnem prostoru.

Izrek 4.2. *Naj bo $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ skrčitev nad metričnim prostorom $(\mathbb{X}, d)$ s skrčitvenim faktorjem l . Potem je $f: \mathbb{H}(\mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{H}(\mathbb{X})$ tudi skrčitev nad metričnim prostorom $(\mathbb{H}(\mathbb{X}), d_{\mathbb{H}})$ s skrčitvenim faktorjem l .*

Dokaz. Dokazati želimo, da za $A, B \in \mathbb{H}(\mathbb{X})$ velja $d_{\mathbb{H}}(f(A), f(B)) \leq l \cdot d_{\mathbb{H}}(A, B)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{f(A)}(f(B)) &= \max_{a \in A} \min_{b \in B} \{d(f(a), f(b))\} \\ &\leq l \max_{a \in A} \min_{b \in B} \{d(a, b)\} \\ &= l \mathcal{D}_A(B). \end{aligned}$$

Iz tega sledi, da je

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}(f(A), f(B)) &= \max\{\mathcal{D}_{f(A)}(f(B)), \mathcal{D}_{f(B)}(f(A))\} \\ &\leq l \max\{\mathcal{D}_A(B), \mathcal{D}_B(A)\} \\ &= l d_{\mathbb{H}}(A, B). \end{aligned}$$

$\square$

Torej, če imamo skrčitveno funkcijo $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ v polnem metričnem prostoru $\mathbb{X}$ z negibno točko $a \in \mathbb{X}$, potem je tudi $f: \mathbb{H}(\mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{H}(\mathbb{X})$ skrčitev v polnem metričnem prostoru z negibno točko $A = \{a\}$.

Izrek 4.3. *Naj bodo $f_n: \mathbb{H}(\mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{H}(\mathbb{X})$ za vsak $n = 1, 2, 3, \dots, N$, $N \in \mathbb{N}$ skrčitve nad metričnim prostorom $(\mathbb{H}(\mathbb{X}), d_{\mathbb{H}})$ s skrčitvenimi faktorji l_n . Potem je $\mathcal{F}: \mathbb{H}(\mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{H}(\mathbb{X})$ definirana kot*

$$\mathcal{F}(B) = f_1(B) \cup f_2(B) \cup \dots \cup f_N(B) \quad (4.3)$$

skrčitev s skrčitvenim faktorjem $l = \max\{l_n \mid n = 1, 2, \dots, N\}$.

Dokaz. Dokažimo izrek za $N = 2$. Po izreku 3.8 za vsak $A, B, C, D \in \mathbb{H}(\mathbb{X})$ velja:

$$d_{\mathbb{H}}(A \cup B, C \cup D) \leq \max\{d_{\mathbb{H}}(A, C), d_{\mathbb{H}}(B, D)\}.$$

Torej $\forall A, B \in \mathbb{H}(\mathbb{X})$ velja

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B)) &= d_{\mathbb{H}}(f_1(A) \cup f_2(A), f_1(B) \cup f_2(B)) \\ &\leq \max\{d_{\mathbb{H}}(f_1(A) \cup f_1(B), d_{\mathbb{H}}(f_2(A) \cup f_2(B))\} \\ &\leq \max\{l_1 d_{\mathbb{H}}(A, B), l_2 d_{\mathbb{H}}(A, B)\} \\ &= \max\{l_1, l_2\} d_{\mathbb{H}}(A, B). \end{aligned}$$

□

Na tem mestu imamo dovolj teoretičnega znanja, da formalno definiramo fraktal.

Definicija 4.4. Naj bo $\mathbb{X}$ poln metričen prostor in funkcije $f_n: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ skrčitve. Kompaktni množici $A \subseteq \mathbb{X}$, ki je enolična negibna točka funkcije $\mathcal{F}: \mathbb{H}(\mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{H}(\mathbb{X})$, definirane v 4.3, pravimo *atraktor množice funkcij $\{f_n\}$ oziroma fraktal, povezan z $\{\mathbb{X}; f_1, f_2, \dots, f_N\}$.*

Atraktor bomo običajno označevali z A . Zanj velja samopodobna enačba:

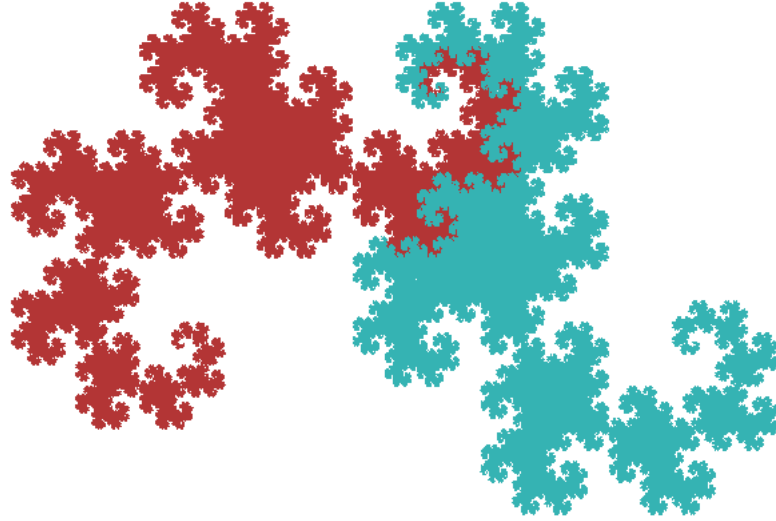
$$\mathcal{F}(A) = A = f_1(A) \cup f_2(A) \cup \dots \cup f_N(A).$$

Lastnost samopodobnosti pomeni, da lahko fraktal zapišemo kot unija večih kopij samega sebe.

Primer. Slika 4.1 predstavlja primer fraktala, povezanega z

$$\left\{ \mathbb{R}^2; \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \right), \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + 1, \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \right) \right\}.$$

Iz slike je razvidno, da je fraktal unija dveh pomanjšanih kopij samega sebe, ena kopija je rjave, druga modre barve.



Slika 4.1: Primer atraktorja, imenovanega Heighwayjev zmaj.

4.2 Iterativni funkcijski sistem

V prejšnjem razdelku smo definirali fraktal. Naslednja stvar, ki nas bo zanimala pa je, kako fraktal nastane in kako ga narisati.

Definicija 4.5. *Iterativni funkcijski sistem* ali *IFS* je sistem, sestavljen iz končnega zaporedja funkcij $f_i: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ za $i = 1, 2, \dots, N$ in $N \geq 1$. Označimo ga z oznako $\mathcal{F} = \{\mathbb{X}; f_1, f_2, \dots, f_N\}$. Najpogosteje je prostor $\mathbb{X}$ metričen, funkcije f_i so Lipshitzove.

IFS z verjetnostmi je IFS skupaj z zaporedjem verjetnosti $p_1, p_2, \dots, p_N$, $p_i \in \mathbb{R}$ in $\sum_{i=1}^N p_i = 1$. Sistem označimo z $\mathcal{F} = \{\mathbb{X}; f_1, f_2, \dots, f_N; p_1, p_2, \dots, p_N\}$. Verjetnost p_i je povezana s funkcijo f_i , $\forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$. To pomeni, da je verjetnost, da v koraku k izberemo funkcijo f_i , enaka p_i (glej slučajni algoritem v razdelku 4.3).

Če verjetnosti niso podane, se običajno privzamejo verjetnosti $p_i = \frac{1}{N}$ za vsak $i = 1, 2, \dots, N$. Torej so izbori funkcij enako verjetni za vsak i .

Definicija 4.6. Naj bo $(\mathbb{X}, d)$ poln metrični prostor in $\{f_1, f_2, \dots, f_N\}$ končno zaporedje skrčitvenih funkcij $f_n: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ za $n = 1, 2, \dots, N$. Potem je sistem funkcij $\{\mathbb{X}; f_1, f_2, \dots, f_N\}$ *skrčitven* ali *hiperboličen IFS*. *Skrčitveni faktor hiperboličnega IFS* je $l = \max\{l_1, l_2, \dots, l_N\}$, kjer je l_i skrčitveni faktor funkcije f_i za $i = 1, 2, \dots, N$.

Definicija 4.7. *Afina funkcija* $\mathcal{A}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je sestavljena iz linearne transformacije $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, kateri sledi translacija oziroma premik. To lahko zapišemo kot

$$(\mathcal{A}(x, y))^T = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix},$$

kjer so $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.

Primer. Sistem funkcij

$$\mathcal{F} = \left\{ \mathbb{R}^2; f_1(x, y) = \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right), f_2(x, y) = \left(\frac{1}{2}(x+1), \frac{1}{2}y\right), \right. \\ \left. f_3(x, y) = \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}(y+1)\right) \right\}$$

je primer afinega hiperboličnega IFS. Delovanje vsake funkcije posebej je prikazano na sliki 4.2: f_1 preslika kvadrat $[0, 1]^2$ v levo spodnjo četrtino, f_2 ga preslika v desno spodnjo četrtino, f_3 pa v levo zgornjo četrtino.

V primeru IFS oblike $\mathcal{F} = \{\mathbb{X}; f_1, f_2, \dots, f_N\}$, so funkcije f_i definirane tako, da takoj vidimo, kako delujejo nad točko $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Lahko pa bi IFS zapisali v obliki tabele, ki ji pravimo afina koda IFS. Afine funkcije v afini kodi so definirane s koeficienti a, b, c, d, e, f v enačbi

$$f(x, y) = (ax + by + c, dx + ey + f).$$

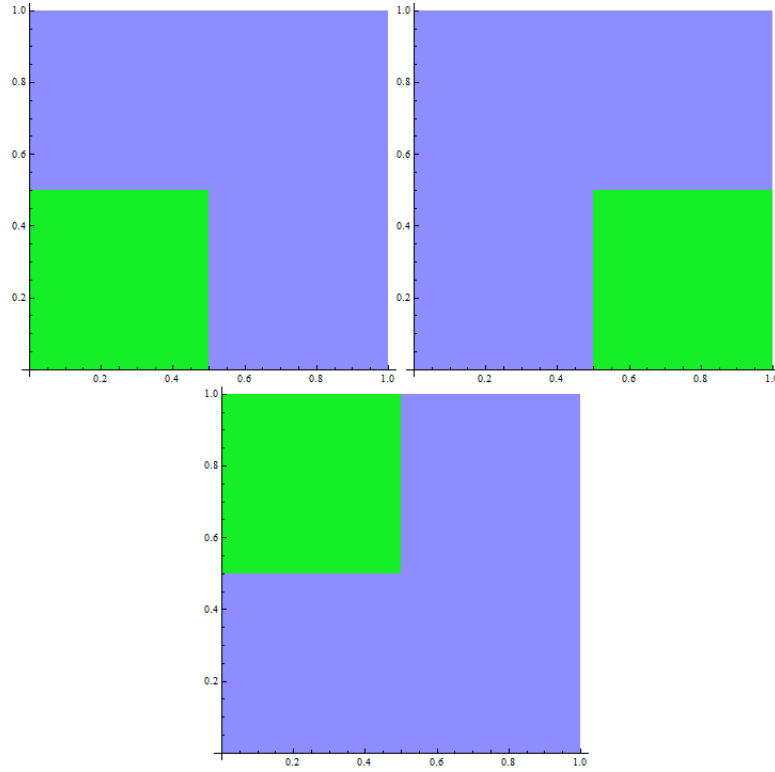
V kodi so prav tako lahko definirane verjetnosti, ki pripradajo funkcijam f_i .

Primer. IFS koda v spodnji tabeli predstavlja hiperbolični IFS

$$\mathcal{F} = \left\{ \mathbb{R}^2; \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right), \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{4}\right), \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}y\right) \right\},$$

katerega atraktor je na sliki 4.3. Atraktor je znan pod imenom trikotnik Sierpinskega.

n	a	b	c	d	e	f	p
1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$



Slika 4.2: Primer delovanja afinih funkcij f_1 , f_2 in f_3 na enotskem kvadratu, označenem z modro barvo. Zeleni so kvadrati po transformaciji.

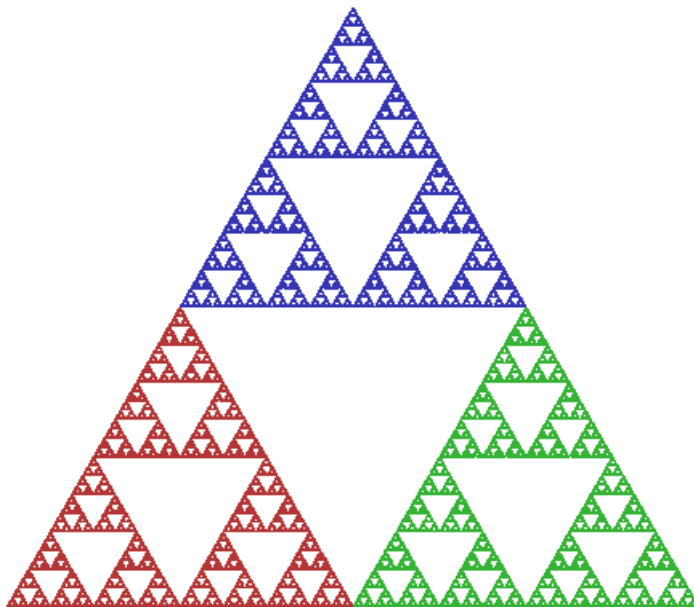
Definicija 4.8. Naj bo $\mathcal{F}$ IFS z verjetnostmi in A njegov atraktor. Definirajmo množico

$$O_{\mathcal{F}} := \{f_i(A) \cap f_j(A) \mid i, j \in \{1, 2, \dots, N\}, i \neq j\},$$

ki ji pravimo *množica prekrivajočih točk* (angl. set of overlapping points) atraktorja IFS.

IFS je nepovezan, če in samo če velja $O_{\mathcal{F}} = \emptyset$. IFS je prekrivajoč, če in samo če je $O_{\mathcal{F}}$ neprazna odprta množica. IFS je dotikajoč, če in samo če ni niti nepovezan niti prekrivajoč.

Množico prekrivajočih točk bomo ponazorili v naslednjem poglavju pri definiciji naslovne funkcije.



Slika 4.3: Primer atraktorja IFS, imenovanega trikotnik Sierpinskega.

4.3 Računanje fraktalov iz iterativnega funkcijskega sistema

V tem razdelku si bomo ogledali dva algoritma za konstrukcijo fraktalov. Prvi je slučajni algoritem, pri katerem narišemo fraktal tako, da začnemo s poljubno začetno točko in v vsakem koraku izračunamo naslednjo točko. Dobimo zaporedje točk in po nekaj tisoč korakih zadovoljivo aproksimacijo fraktala. Drugi algoritem je deterministični in se od slučajnega razlikuje v tem, da začnemo z množico točk in v vsakem koraku dobimo novo množico. Dobimo zaporedje množic, ne točk, kot pri slučajnem algoritmu.

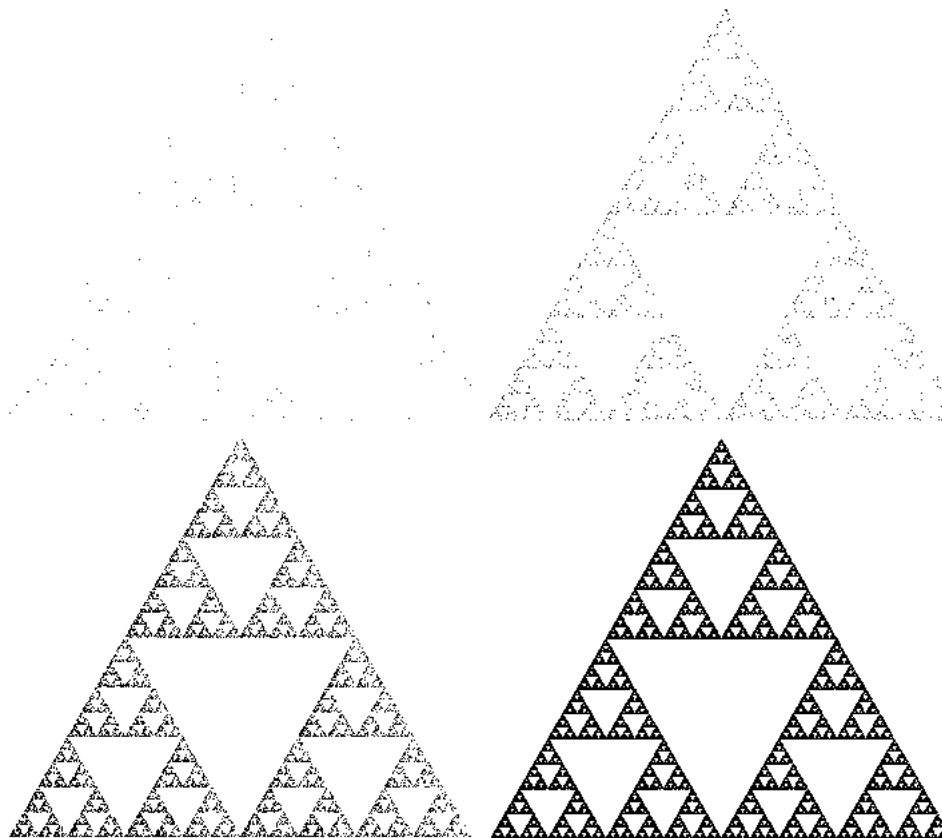
Slučajni algoritem

Naj bo $\mathcal{F} = \{\mathbb{X}; f_1, f_2, \dots, f_N; p_1, p_2, \dots, p_N\}$ hiperboličen IFS z verjetnostmi. Za začetno izbran $x_0 \in \mathbb{X}$ rekurzivno in neodvisno izračunamo

$$x_i \in \{f_1(x_{i-1}), f_2(x_{i-1}), \dots, f_N(x_{i-1})\} \text{ za } i = 1, 2, 3, \dots$$

Na vsakem koraku je verjetnost dogodka $x_i = f_k(x_{i-1})$ enaka p_k .

S tem konstruiramo zaporedje $\{x_i \mid i = 1, 2, 3, \dots\} \subset \mathbb{X}$, ki konvergira k atraktorju hiperboličnega IFS.



Slika 4.4: Trikotnik Sierpinskega, dobljen s slučajnim algoritmom. Slike prikazujejo različno število iteracij algoritma.

Takšnemu slučajnemu algoritmu pravimo tudi igra kaosa. Razlog, da z igro kaosa nastane atraktor IFS, sloni na ergodskem izreku (angl. ergodic theorem). Več o njem je v [9].

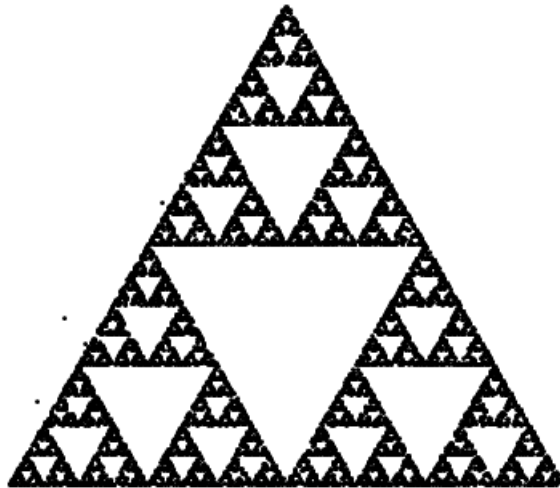
Primer. Naj bo $\mathcal{F}$ hiperboličen IFS

$$\mathcal{F} = \left\{ \mathbb{R}^2; \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right), \left(\frac{1}{2}(x+1), \frac{1}{2}y\right), \left(\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right), \frac{1}{2}\left(y+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \right\},$$

katerega atraktor je trikotnik Sierpinskega.

Slika 4.4 prikazuje rezultat slučajnega algoritma za 100, 1000, 10000 in 100000 iteracij.

Primer. V prejšnjem primeru je bila začetna točka $x_0 = (0, 0)$ del atraktorja. Izkaže se, da lahko začnemo s katerokoli drugo točko, ki vemo, da ni v



Slika 4.5: Trikotnik Sierpinskega, dobljen s slučajnim algoritmom, pri čemer je začetna točka zunaj trikotnika.

atraktorju, ali je celo daleč stran od njega. Po nekaj iteracijah vseeno dobimo željeni atraktor. Le v prvih nekaj iteracijah se pojavi kakšna točka, ki ne leži na atraktorju. Primer je na sliki 4.5.

Če iz atraktorja odstranimo prvih nekaj generiranih točk, bo končna slika enaka, ne glede na začetno točko.

Determinističen algoritem

Determinističen algoritem temelji na skrčljivosti funkcij IFS. Hitrost konvergence algoritma je določena s skrčitvenim faktorjem. V splošnem je algoritem počasnejši od slučajnega algoritma, zato se uporablja redkeje.

Naj bo $(\mathbb{X}, d)$ poln metrični prostor in $\mathcal{F} = \{\mathbb{X}; f_1, f_2, \dots, f_N\}$ hiperboličen IFS s skrčitvenim faktorjem l . Naj bo A atraktor IFS $\mathcal{F}$. Za izbrano začetno množico $A_0 \in \mathbb{H}(\mathbb{X})$ se naslednje množice A_i izračunajo po rekurzivni enačbi

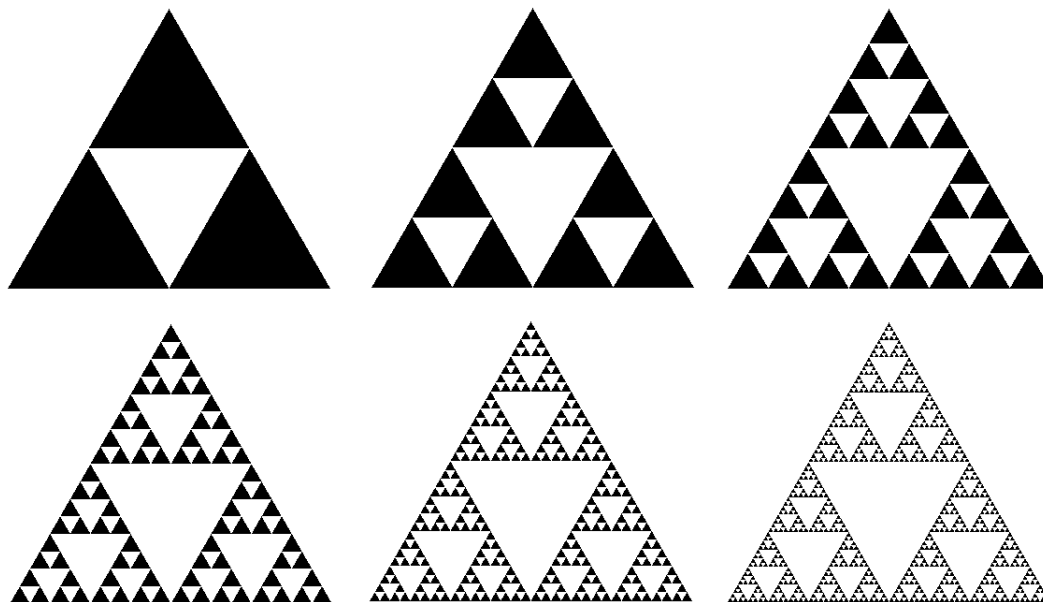
$$A_{i+1} = \mathcal{F}(A_i) = f_1(A_i) \cup f_2(A_i) \cup \dots \cup f_N(A_i), \forall i = 0, 1, 2, \dots$$

Na ta način dobimo zaporedje $\{A_i | i = 0, 1, 2, 3, \dots\}$, ki konvergira k atraktorju IFS $\mathcal{F}$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} A_i = A.$$

Stopnja konvergence algoritma je geometrijska:

$$d(A_i, A) \leq l^i \cdot d(A_0, A), \forall i \in \mathbb{N}.$$



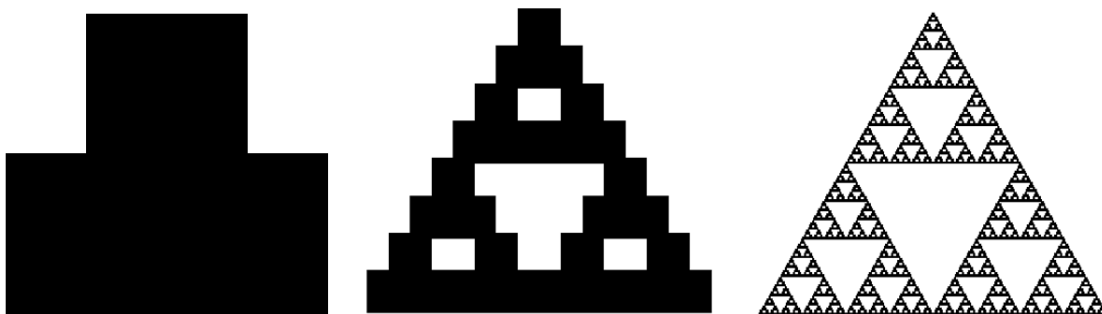
Slika 4.6: Trikotnik Sierpinskega dobljen z determinističnim algoritmom. Začetna množica A_0 je enakostranični trikotnik. Slika prikazuje 6 korakov determinističnega algoritma, od množice A_1 levo zgoraj, do A_6 desno spodaj.

Slučajni algoritem ima kar nekaj prednosti v primerjavi z determinističnim. Porabi manj prostora ter je v splošnem hitrejši. Omogoča tudi učinkovitejše računanje povečav atraktorja. V obeh algoritmih so dobljene slike odvisne od natančnosti, s katero so točke izračunane, od skrčljivosti funkcij IFS, od izbire barv ter tudi od implementacije algoritmov.

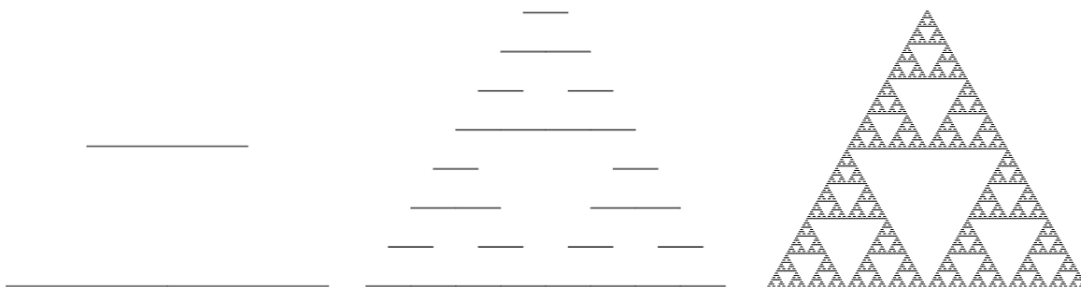
Primer. Slika 4.6 prikazuje korake determinističnega algoritma za isti hiperbolični IFS kot v primeru pri slučajnem algoritmu. Začetna množica A_0 je enakostranični trikotnik. Na sliki so v zgornji vrsti od leve proti desni množice A_1 , A_2 , A_3 , v spodnji vrsti pa A_4 , A_5 in A_6 .

Če bi namesto enakostraničnega trikotnika izbrali za začetno množico kvadrat, poljuben trikotnik, točko ali kakšno drugo množico, bi po nekaj korakih dobili za vse primere enak rezultat. Primera sta na slikah 4.7 in 4.8. Začetni množici sta kvadrat na sliki 4.7 in daljica na sliki 4.8. Opazimo, da smo že po nekaj korakih dobili podoben atraktor kot v primeru začetne množice enakostraničnega trikotnika.

Primer. Oglejmo si pomemben primer kompaktnega metričnega prostora, ki



Slika 4.7: Trikotnik Sierpinskega dobljen z determinističnim algoritmom, kjer je začetna množica enotski kvadrat. Na sliki so trije vmesni koraki algoritma, množice A_1 , A_3 in A_7 .



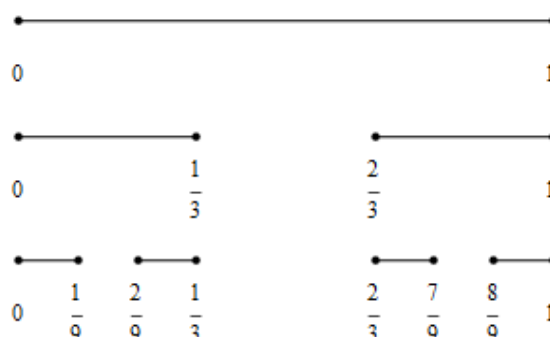
Slika 4.8: Trikotnik Sierpinskega dobljen z determinističnim algoritmom, kjer je začetna množica daljica dolžine 1. Na sliki so trije vmesni koraki algoritma, množice A_1 , A_3 in A_7 .

se imenuje Cantorjeva množica. Množico generira IFS

$$\mathcal{F} = \left\{ \mathbb{R}; f_1(x) = \frac{1}{3}x, f_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \right\}.$$

Z determinističnim algoritmom jo lahko opišemo takole:

- 1. korak:** iz zaprtega intervala $C_0 = [0, 1]$ odstranimo srednjo tretjino, tj. odprti interval $(1/3, 2/3)$, in dobimo množico $C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$,
 - 2. korak:** iz obeh zaprtih intervalov $[0, 1/3]$ in $[2/3, 1]$ odstranimo srednjo tretjino in dobimo množico $C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$,
- splošno:** z odstranjevanjem tretjin nadaljujemo in dobimo padajoče zaporedje množic $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots$, v katerem množico C_n dobimo tako, da iz C_{n-1} odstranimo vse srednje tretjine.



Slika 4.9: Konstrukcija Cantorjeve množice; na sliki so množice C_0 , C_1 in C_2 od zgoraj navzdol.

Cantorjevo množico definiramo kot presek tega zaporedja:

$$C = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i.$$

Cantorjeva množica je primer nepovezanega fraktala. Prvi trije koraki generiranja množice so na sliki 4.9.

Poglejmo še nekaj njenih lastnosti. (C, d) je metrični prostor z metriko $d(x, y) = |x - y|$. C je zaprta podmnožica $\mathbb{R}$, saj je definirana kot presek zaprtih množic C_i za $i = 1, 2, \dots$. C je tudi omejena množica, saj leži na intervalu $[0, 1]$. Zato je C kompakten prostor.

Poglavje 5

Vrh fraktala

5.1 Naslovna funkcija

Zaradi preglednosti in uporabnosti je dobro, če so točke v prostoru organizirane. Organiziranost lahko med drugim dosežemo z uporabo naslovov iz prostora naslovov. Namen naslova je unikatna identifikacija točke. Sestavljen je iz končnega ali neskončnega zaporedja števil in simbolov. Posamezna točka lahko ima enega ali več naslovov.

Prostor naslovov bomo potrebovali za predstavitev množice točk fraktala.

Primer. Naslov točke na premici $\mathbb{R}$ je lahko njena binarna ali decimalna vrednost, točke v prostoru $\mathbb{R}^2$ pa so določene na primer z urejenim desetiškim parom oblike (x, y) .

Naslov točke sestavljajo simboli iz abecede simbolov, imenujmo jo $\mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ je sestavljena iz neprazne končne množice med seboj različnih simbolov. Primera abecede sta $\{1, 2, \dots, N\}$ in $\{A, B, \dots, Z\}$.

Uvedimo oznako $\Omega'_{\mathcal{A}}$, ki predstavlja množico končnih nizov, sestavljenih iz simbolov abecede $\mathcal{A}$. Množica vsebuje nize oblike

$$\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_K,$$

kjer je $\sigma_i \in \mathcal{A}$ za vsak $i \in \{1, 2, \dots, K\}$ in $K \geq 0$. Oznaka $|\sigma|$ predstavlja dolžino niza $\sigma \in \Omega'_{\mathcal{A}}$.

Definicija 5.1. *Stikanje* ali *konkatenacija* dveh nizov $\sigma, \omega \in \Omega'_{\mathcal{A}}$ je operacija na nizih, definirana s predpisom

$$\sigma\omega = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{|\sigma|} \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{|\omega|}.$$

Druga pomembna oznaka je $\Omega_{\mathcal{A}}$, predstavlja pa množico neskončnih nizov, sestavljenih iz simbolov abecede $\mathcal{A}$. Element $\Omega_{\mathcal{A}}$ je

$$\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_i \dots,$$

kjer je $\sigma_i \in \mathcal{A}$ za vsak $i \in \{1, 2, \dots\}$.

Množica $\Omega'_{\mathcal{A}}$ je števna, $\Omega_{\mathcal{A}}$ pa je za $|\mathcal{A}| > 1$ neštevna.

Primer. Prostor naslovov $\Omega'_{\{0,1\}}$ vsebuje točke kot so na primer: 1, 0101, 1111111111, 101001010101001011010101, $\emptyset$.

Prostor naslovov $\Omega_{\{0,1\}}$ vsebuje na primer točke: $\bar{1} = 1111111111\dots$, $010111001\dots$, $101000000\dots$.

Definicija 5.2. Naj bo $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{X}$ preslikava iz prostora $\Omega \subset \Omega'_{\mathcal{A}} \cup \Omega_{\mathcal{A}}$ v prostor $\mathbb{X}$. Preslikavi φ pravimo *naslovna funkcija* prostora $\mathbb{X}$, točke iz prostora Ω so *naslovi*, Ω pa *prostor naslovov*.

Točka $\sigma \in \Omega$, za katero velja $\varphi(\sigma) = x$, je *naslov točke* $x \in \mathbb{X}$.

$\varphi^{-1}(\{x\}) = \{\sigma \in \Omega \mid \varphi(\sigma) = x\}$ je *množica vseh naslovov točke* $x \in \mathbb{X}$.

Definicija 5.3. Definirajmo *funkcijo razdalje* med nizoma $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots$ ter $\omega = \omega_1 \omega_2 \omega_3 \dots$ v prostoru $\Omega_{\mathcal{A}}$:

$$d_{\Omega}(\sigma, \omega) = \begin{cases} 0, & \text{če } \omega = \sigma, \\ \frac{1}{2^m}, & \text{če } \sigma \neq \omega, \text{ pri čemer je } m \text{ najmanjše število, da } \omega_m \neq \sigma_m. \end{cases}$$

Izrek 5.1. $(\Omega_{\mathcal{A}} \cup \Omega'_{\mathcal{A}}, d_{\Omega})$ je metrični prostor.

Dokaz. Preverimo, da veljajo 4 lastnosti metričnega prostora.

1. $d(\sigma, \omega) = \frac{1}{2^m}$, prav tako $d(\omega, \sigma) = \frac{1}{2^m}$, kjer je m najmanjši indeks, da velja $\omega_m \neq \sigma_m$, torej je $d(\sigma, \omega) = d(\omega, \sigma)$
2. $0 < d(\sigma, \omega) = \frac{1}{2^m} < \infty$.
3. $d_{\Omega}(\sigma, \sigma) = 0$ velja po definiciji.
4. Preverimo še trikotniško neenakost.

$$\begin{aligned} d(\sigma_1, \sigma_2) &\leq d(\sigma_1, \sigma_3) + d(\sigma_3, \sigma_2) \\ \frac{1}{2^{m_1}} &\leq \frac{1}{2^{m_2}} + \frac{1}{2^{m_3}} \end{aligned}$$

Možnosti za m_1, m_2 in m_3 so tri.

Če velja $m_1 = m_2 = m_3$, lahko množimo neenačbo z 2^{m_1} , ker so vsi indeksi m_1, m_2 in m_3 pozitivni. Dobimo $1 \leq 2$, kar je res.

V primeru, da je $m_1 = \max\{m_1, m_2, m_3\}$, množimo z 2^{m_1} in dobimo $1 \leq 2^{m_1-m_2} + 2^{m_1-m_3}$, kar velja, ker so indeksi pozitivni.

Zadnja možnost je, da je eden izmed m_2 in m_3 največji. Brez škode za splošnost lahko predpostavim, da je to m_3 . Neenakost pomnožimo z 2^{m_3} in dobimo $2^{m_3-m_1} \leq 2^{m_3-m_2} + 1$ od tod pa $0 \leq 1 + 2^{m_3-m_2} - 2^{m_3-m_1}$. Spet so možnosti tri. Če je $m_1 = m_2$, je $0 \leq 1 + 2^{m_3-m_2} - 2^{m_3-m_2} = 1$, kar je res. Lahko je $m_1 > m_2$. Potem izpostavimo $2^{m_3-m_1}$ in dobimo $0 \leq 1 + 2^{m_3-m_2} - 2^{m_3-m_1} = 1 + 2^{m_3-m_1}(2^{m_1-m_2} - 1)$, kar velja, ker sta potenci $m_3 - m_1$ in $m_1 - m_2$ pozitivni. Zadnja možnost je $m_2 > m_1$. Izpostavimo $2^{m_3-m_2}$ in dobimo $0 \leq 1 + 2^{m_3-m_2} - 2^{m_3-m_1} = 1 + 2^{m_3-m_2}(1 - 2^{m_2-m_1})$, kar velja, ker sta obe potenci 2 pozitivni.

□

Naj bo $\omega \in \Omega'_A$. Definirajmo transformacijo $f_\omega: \Omega_A \cup \Omega'_A \rightarrow \Omega_A \cup \Omega'_A$ kot

$$f_\omega = \omega\sigma, \forall \sigma \in \Omega_A \cup \Omega'_A.$$

Primer. $f_1(0100101\dots) = 10100101\dots$, $f_11(0100101\dots) = 110100101\dots$

Definicija 5.4. *Pomična transformacija* $S: \Omega_A \cup \Omega'_A \rightarrow \Omega_A \cup \Omega'_A$ je definirana kot

$$S(\sigma) = \begin{cases} \sigma_2\sigma_3\dots \in \Omega_A, \text{ za } \sigma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\dots \in \Omega_A, \\ \sigma_2\sigma_3\dots\sigma_k \in \Omega'_A, \text{ za } \sigma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\dots\sigma_k \in \Omega'_A \end{cases}$$

in $S(\emptyset) = \emptyset$.

Za abecedo $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ velja

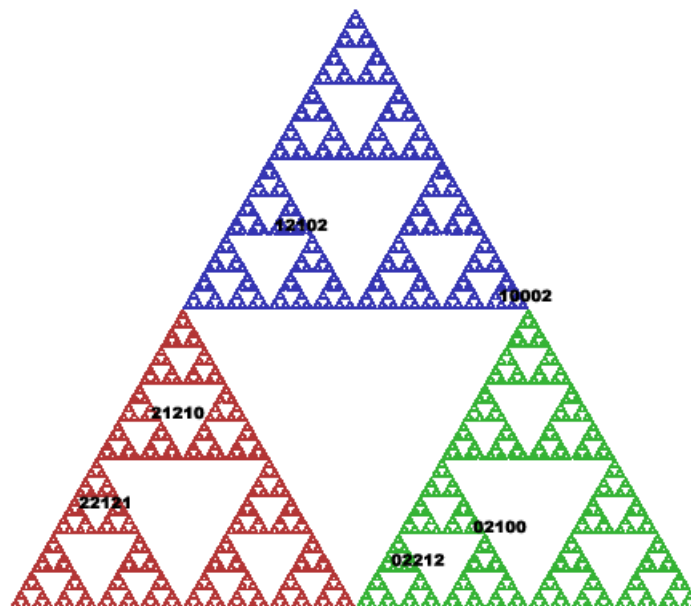
$$S^{-1}(\sigma) = \{f_0(\sigma), f_1(\sigma)\}, \forall \sigma \in \Omega_A \cup \Omega'_A \setminus \emptyset.$$

Definicija 5.5. Podmnožici $\Omega \subset \Omega_A$ pravimo *pomično invarianten podprostor* prostora Ω_A , če

$$S(\Omega) = \Omega.$$

Primer. Oglejmo si koncept naslovov na atraktorju hiperboličnega IFS

$$\mathcal{F} = \left\{ \mathbb{R}^2; f_1(x, y) = \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right), f_2(x, y) = \left(\frac{1}{2}(x+1), \frac{1}{2}y\right), \right. \\ \left. f_3(x, y) = \left(\frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}), f_4(x, y)\frac{1}{2}(y + \frac{\sqrt{3}}{2})\right) \right\}.$$



Slika 5.1: Trikotnik Sierpinskega z označenimi začetki naslovov nekaj točk.

Atraktor A je unija treh disjunktnih množic $A = f_1(A) \cup f_2(A) \cup f_3(A)$, ki so na sliki 5.1 v različnih barvah (f_0 zelene, f_1 modre in f_2 rjave barve). Vsaka izmed teh treh množic je spet unija treh disjunktnih množic

$$\begin{aligned} f_0(A) &= f_0(f_0(A)) \cup f_1(f_0(A)) \cup f_2(f_0(A)), \\ f_1(A) &= f_0(f_1(A)) \cup f_1(f_1(A)) \cup f_2(f_1(A)), \\ f_2(A) &= f_0(f_2(A)) \cup f_1(f_2(A)) \cup f_2(f_2(A)). \end{aligned}$$

Od tu izpeljemo naslavljanje točke z zaporedjem funkcij, ki vodijo do nje. Točkam atraktorja, ki so v podmnožici $f_0(A)$, se naslov začne z 0, točkam iz podmnožice $f_1(A)$ se začne z 1, točkam iz f_2 pa z 2. Natančneje kot želimo določiti lego točke, daljši je naslov.

Poglejmo si najbolj levo točko na sliki 5.1 z označenim naslovom 22121. Naslov se začne z 2, ker točka leži v spodnjem levem trikotniku, dobljenim s funkcijo f_2 . Naslednja 2 v naslovu pomeni, da je znotraj tega trikotnika točka spet v spodnjem levem trikotniku... Tako glede na lego dobimo naslov točke, dolžine kolikor natančne želimo.

Vsaj tri točke atraktorja imajo dva naslova, ker preseki $f_0 \cap f_1$, $f_0 \cap f_2$ in $f_1 \cap f_2$ vsebujejo po eno točko. Točk z dvema ali več naslovi ni veliko, zato je IFS $\mathcal{F}$ v tem primeru dotikajoč (glej definicijo 4.8).

Če ima vsaka točka atraktorja po en naslov, je IFS nepovezan. Če pa ima veliko točk dva ali več naslovov, je IFS prekrivajoč. Pomembno je, da se pojmi dotikajoč, nepovezan in prekrivajoč nanašajo na IFS, ne na atraktor, saj je lahko ista množica atraktor večih IFS.

5.2 Vrhnja funkcija

V [4] je predstavljen pojem fraktalovega vrha. Izraz označuje naslovno funkcijo atraktorja nekega IFS, pri kateri ima vsaka točka atraktorja enoličen naslov, tudi v primeru prekrivajočega IFS. Vrh fraktala se v fraktalni geometriji uporablja na primer za definicijo slik, ki so invariantne glede na IFS, ali definicijo transformacij med dvema fraktaloma.

Definicija 5.6. Definirajmo zvezno transformacijo $\phi: \Omega_{\{1,2,\dots,N\}} \rightarrow A$ iz prostora naslovov na atraktor A hiperboličnega IFS $\mathcal{F} = \{\mathbb{X}; f_1, f_2, \dots, f_N\}$:

$$\phi(\sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n}(x) \text{ za } \sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \in \Omega_{\{1,2,\dots,N\}},$$

za vsak $x \in \mathbb{X}$, kjer je

$$f_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n}(x) := f_{\sigma_1} \circ f_{\sigma_2} \circ \dots \circ f_{\sigma_n}(x).$$

$\phi(\sigma)$ je *naslovna funkcija* IFS $\mathcal{F}$.

Za atraktor A velja

$$A = \{\phi(\sigma) \mid \sigma \in \Omega\}.$$

Zveza med funkcijo ϕ in pomično transformacijo $S: \Omega_{\{1,2,\dots,N\}} \rightarrow \Omega_{\{1,2,\dots,N\}}$ je

$$\phi(\sigma) = f_{\sigma_1}(\phi(S(\sigma))), \forall \sigma \in \Omega_{\{1,2,\dots,N\}}.$$

Koncept vrha fraktala temelji na dejstvu, da so nizi iz prostora naslovov urejeni z relacijo $<$. Tako lahko vsaki točki atraktorja dodelimo enoličen naslov. Relacija $<$ na prostoru naslovov $\Omega = \Omega_{\{1,2,\dots,N\}}$ je definirana kot

$$\sigma < \omega, \text{ če in samo če } \sigma_k > \omega_k,$$

kjer je k najmanjši indeks, za katerega velja $\sigma_k \neq \omega_k$. Po tej relaciji so vsi elementi Ω manjši ali enaki $11111\dots$ ter večji ali enaki $NNNNN\dots$. Za poljubna dva različna elementa iz Ω torej velja, da je eden strogo večji od drugega.

Množica vseh naslovov točke $x \in A$ je $\phi^{-1}(x)$. Množica je zaprta, saj je A zaprta, zato je $A \setminus \{x\}$ odprta in je tudi $\phi^{-1}(A \setminus \{x\}) = \phi^{-1}(A) \setminus \phi^{-1}(\{x\}) = \Omega \setminus \phi^{-1}(x)$ odprta. Sledi, da je $\phi^{-1}(x)$ navzgor omejena in zaprta, zato vsebuje enolično določen maksimalni element. Označimo ga s $\tau(x)$.

Definicija 5.7. Naj bo $\mathcal{F}$ hiperboličen IFS z atraktorjem A in naslovno funkcijo $\phi: \Omega \rightarrow A$. Potem je funkcija $\tau: A \rightarrow \Omega$, definirana kot

$$\tau(x) = \max\{\sigma \in \Omega \mid \phi(\sigma) = x\},$$

vrhnja funkcija $\mathcal{F}$. Množici

$$G_\tau := \{(x, \tau(x)) \mid x \in A\}$$

pravimo *graf vrha IFS* ali krajše *vrh IFS*.

Opišimo vrhno funkcijo še na drug način. IFS

$$\widehat{\mathcal{F}} = \{\mathbb{X} \times \Omega \mid \widehat{f}_1, \widehat{f}_2, \dots, \widehat{f}_N\},$$

kjer je $\widehat{f}_n(x, \sigma) = (f_n(x), s_n(\sigma))$ in $s_n(\sigma) = n\sigma$ stik znaka n z nizom σ , imenujemo dvig IFS $\mathcal{F}$.

Če razdaljo na $\mathbb{X} \times \Omega$ definiramo kot

$$d_{\mathbb{X} \times \Omega}((x, \sigma), (y, \omega)) := d_{\mathbb{X}}(x, y) + d_{\Omega}(\sigma, \omega) \text{ za } (x, \sigma), (y, \omega) \in \mathbb{X} \times \Omega,$$

je $\widehat{\mathcal{F}}$ hiperboličen IFS s skrčitvenim faktorjem $\max\{\frac{1}{2}, l\}$, kjer je l skrčitveni faktor $\mathcal{F}$.

Naj bo $\widehat{A}$ atraktor $\widehat{\mathcal{F}}$. Vrh IFS $\mathcal{F}$ je

$$G_\tau := \{(x, \sigma) \in \widehat{A} \mid (x, \omega) \in \widehat{A} \Rightarrow \omega \leq \sigma\}.$$

Za aproksimacijo G_τ lahko uporabimo igro kaosa. Na začetku nastavimo naslove vseh točk na najmanjše možne, to je $NNNNN \dots = \overline{N}$. Začnemo v točki $X_0 = (x_0, \overline{N}) \in A \times \Omega$ in računamo rekurzivno

$$X_{k+1} = (x_{k+1}, \sigma_{k+1}\sigma_k \dots \sigma_1 \overline{N}) = \widehat{f}_{\sigma_{k+1}}(X_k) \text{ za } k = 0, 1, 2, \dots$$

Nov naslov točke x_{k+1} na $(k+1)$ koraku postane $\sigma_{k+1}\sigma_k \dots \sigma_1 \overline{N}$, če je ta večji od trenutnega naslova. Dolžino naslovov običajno nastavimo na neko fiksno dolžino in jih sproti režemo, da so vsi enako dolgi.

Primer. Oglejmo si IFS

$$\mathcal{F}_1 = \left\{ [0, 1] \subset \mathbb{R}; f_1(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}, f_2(x) = \frac{2}{3}x \right\},$$

katerega atraktor je zaprti interval $[0, 1]$. $\mathcal{F}_1$ je primer prekrivajočega IFS, ker presek $f_1([0, 1]) \cap f_2([0, 1])$ ni prazen.

Dvig $\mathcal{F}_1$ je

$$\widehat{\mathcal{F}}_1 = \left\{ [0, 1] \times \Omega_{\{1,2\}} \subset \mathbb{R}; f_1(x, \sigma) = \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}, 1\sigma\right), f_2(x, \sigma) = \left(\frac{2}{3}x, 2\sigma\right) \right\}.$$

Atraktor IFS $\mathcal{F}_1$ želimo narisati. Na y -osi imamo naslove točk iz prostora naslovov, zato jih bomo “pretvorili” v prijaznejšo obliko za izris. Prostor naslovov $\Omega_{\{1,2\}}$ vložimo v interval $[0, 1]$ tako, da ga identificiramo s Cantorjevo množico, ki jo generira IFS

$$\widehat{\mathcal{F}}_2 = \{[0, 1]; w_1(y) = 0.499999y + 0.500001, w_2(y) = 0.49999y\}.$$

To je res Cantorjeva množica, saj dobimo različice Cantorjeve množice tako, da namesto odstranjevanja srednje tretjine v vsakem intervalu, odstranjujemo odseke v poljubnem stalnem razmerju.

Atraktor $\widehat{\mathcal{F}}_2$ je interval $[0, 1]$, torej smo res pokrili vse možne naslove točk med naslovoma 22222... (točka 0 intervala) in 11111... (točka 1 na intervalu).

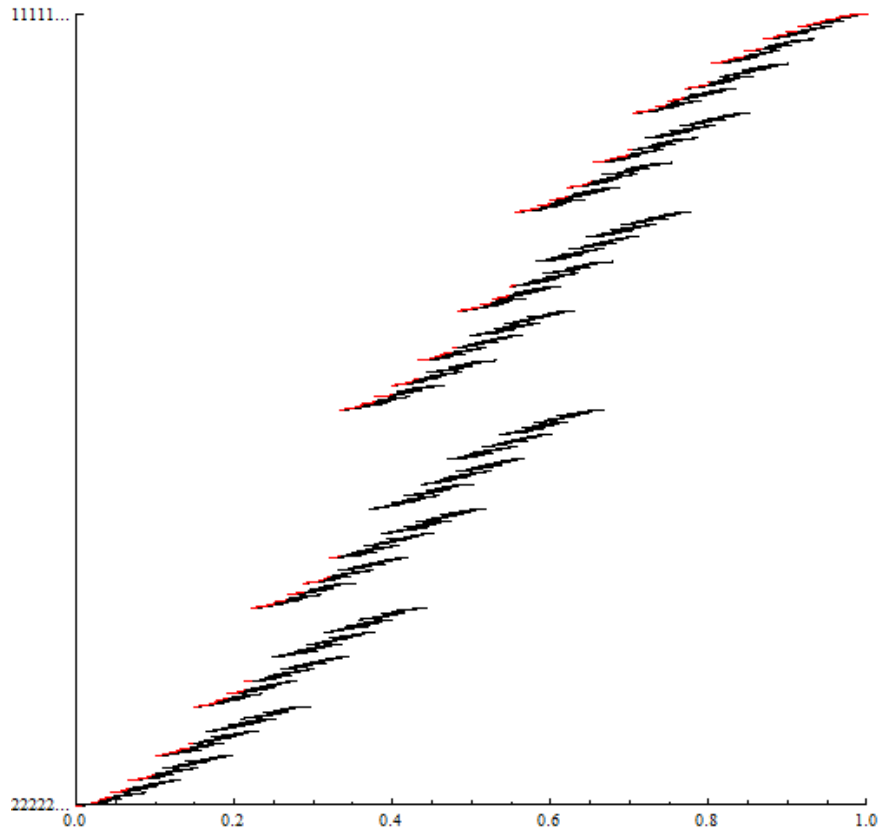
IFS $\widehat{\mathcal{F}}_1$ in $\widehat{\mathcal{F}}_2$ “zložimo” skupaj in dobimo IFS

$$\widetilde{\mathcal{F}}_1 = \{[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{2}{3}x, w_1(y)\right), \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}, w_2(y)\right)\},$$

katerega atraktor je na sliki 5.2. Na x -osi so točke, na y -osi pa njihovi naslovi. Vrh IFS je označen z rdečo barvo.

5.3 Prevezemanje barv

Prišli smo do zadnjega dela naloge, kjer bomo spoznali algoritem prevzemanja barv. Namenjen je kreiranju slik fraktalovega vrha. Možnosti uporabe algoritma so v računalniški grafiki, pri slikovnih vodnih žigih (angl. image watermarking) ter pri procesiranju in stiskanju slik. Preden pa si ogledamo sam algoritem, bomo potrebovali še matematično definicijo slike.



Slika 5.2: Primer vrhnje funkcije. Vrh IFS je označen z rdečo barvo.

Definicija 5.8. Definirajmo *slikovno funkcijo* $\mathfrak{P}$ kot

$$\mathfrak{P}: D_{\mathfrak{P}} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathfrak{C},$$

kjer je $\mathfrak{C}$ *prostor barv*, $D_{\mathfrak{P}}$ pa *domena slike*. Vrednost $\mathfrak{P}(x)$ pomeni barvo slike v točki $x \in D_{\mathfrak{P}}$. Prostor vseh slik iz barv prostora $\mathfrak{C}$ označimo z $\Pi = \Pi_{\mathfrak{C}}$.

Prostor barv $\mathfrak{C} = [0, 255]^3$ je podmnožica prostora $\mathbb{R}^3$. Komponentam točke $c = (c_1, c_2, c_3) \in \mathfrak{C}$ pravimo barvne komponente, kjer je c_1 komponenta rdeče, c_2 komponenta zelene in c_3 komponenta modre barve.

Domena slike $D_{\mathfrak{P}}$ je pomemben del definicije slike. Lahko je črta, krivulja, odprta krožnica, zaprt kvadrat ali katera druga podmnožica prostora $\mathbb{R}^2$. Največkrat množico domene zapišemo v obliki

$$D_{\mathfrak{P}} = \square = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_L \leq x \leq x_D, y_L \leq y \leq y_d\},$$

kjer je $(x_L, y_L) \in \mathbb{R}^2$ spodnji levi, $(x_D, y_D) \in \mathbb{R}^2$ pa zgornji desni kot slike.

Definicija 5.9. Definirajmo domeno slike

$$D_{\mathfrak{P}} = \square = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x, y \leq 1\},$$

slikovno funkcijo

$$\mathfrak{P}_B: \square \rightarrow \mathfrak{C}$$

ter hiperbolična IFS

$$\mathcal{F}_R = \{\square \mid f_1, f_2, \dots, f_N\} \text{ in } \mathcal{F}_B = \{\square \mid \tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \dots, \tilde{f}_N\}.$$

Indeks R pomeni risanje, B pa barvanje. Najbosta A_R in A_B atraktorja $\mathcal{F}_R$ in $\mathcal{F}_B$. Definirajmo še vrhno funkcijo $\mathcal{F}_R$ kot

$$\tau_R: A_R \rightarrow \Omega$$

in naslovno funkcijo $\mathcal{F}_B$

$$\phi_B: \Omega \rightarrow A_B \subset \square.$$

Potem je slika $\mathfrak{P}_R: A_R \rightarrow \mathfrak{C}$, definirana kot

$$\mathfrak{P}_R = \mathfrak{P}_B \circ \phi_B \circ \tau_R,$$

enolično določena z $\mathcal{F}_R$, $\mathcal{F}_B$ in $\mathfrak{P}_B$. Pravimo ji *ukradena slika* (angl. stolen picture), ker je nastala s *prevzemanjem* ali *krajo barv* (angl. colour stealing).

Algoritem prevzemanja barv

Algoritem prevzemanja barv je različica slučajnega algoritma in poteka v naslednjih korakih:

- izberemo vhodno sliko $\mathfrak{P}_B$, iz katere bodo prevzete barve z IFS $\mathcal{F}_B$,
- risali bomo na izhodno sliko $\mathfrak{P}_R$, z IFS $\mathcal{F}_R$,
- dve igri kaosa se bosta izvajali istočasno, ena na vhodni sliki, druga na izhodni,
- na začetku generiramo zaporedje slučajnih števil $\{k_i\}_{i=0}^{\infty}$, ki bo enako za oba IFS.
- IFS risanja: začnemo s točko (x_0, y_0) in na i -tem koraku z zgoraj dobljenim slučajnim k_i izračunamo točko $(x_i, y_i) = f_{k_i}(x_{i-1}, y_{i-1})$. Na ta način dobimo zaporedje $\{(x_i, y_i) = f_{k_i}(x_{i-1}, y_{i-1}) \mid i = 1, 2, \dots\}$.

- IFS barvanja: začnemo s točko (w_0, v_0) ter z istimi k_i , kot pri IFS risanja, generiramo zaporedje $\{(w_i, v_i) = \tilde{f}_{k_i}(w_{i-1}, v_{i-1}) \mid i = 1, 2, \dots\}$.
- V i -tem koraku točko (x_i, y_i) atraktorja IFS $\mathcal{F}_R$ pobarvamo z barvo točke (w_i, v_i) na vhodni sliki.

Primer. Opišimo prvih nekaj korakov algoritma. Za vhod izberemo poljubno sliko poljubne velikosti. IFS risanja naj bo

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_R = \{\square \subset \mathbb{R}^2; f_1(x, y) &= (0.03x, 0.18y), \\ f_2(x, y) &= (0.2x - 0.2y, 0.2x + 0.2y + 0.1), \\ f_3(x, y) &= (-0.2x + 0.2y, 0.2x + 0.2y + 0.1), \\ f_4(x, y) &= (0.85x, 0.85y + 0.2)\},\end{aligned}$$

IFS barvanja pa

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_B = \{\square \subset \mathbb{R}^2; \tilde{f}_1(x, y) &= (0.2x, 0.2y), \\ \tilde{f}_2(x, y) &= (0.8x + 0.2, 0.2y), \\ \tilde{f}_3(x, y) &= (0.2x, 0.8y + 0.2), \\ \tilde{f}_4(x, y) &= (0.8x + 0.2, 0.8y + 0.2)\}.\end{aligned}$$

Število funkcij in posamezne verjetnosti morajo biti enake pri obeh IFS. V našem primeru so $p_1 = 0.05$, $p_2 = p_3 = 0.125$ ter $p_4 = 0.7$. To pomeni, da bosta funkciji f_i in $\tilde{f}_i$ na vsakem koraku izbrani z verjetnostjo p_i za $i = 1, 2, 3, 4$.

Za začetek si pogledjmo atraktorja obeh IFS, ki sta na sliki 5.3. Atraktor $\mathcal{F}_R$ je praprot, atraktor $\mathcal{F}_B$ pa kvadrat. Vidimo, da je kvadrat poln, kar pomeni da bodo pokrite vse točke na vhodni sliki.

Naključni generator nam generira zaporedje $\{k_1, k_2, k_3, \dots\} = \{4, 4, 2, \dots\}$. Zaporedje pomeni, da bomo v prvem koraku izbrali funkciji $\tilde{f}_4$ in f_4 , v drugem tudi $\tilde{f}_4$ in f_4 , v tretjem $\tilde{f}_2$ in $f_2 \dots$

Začeli bomo s točkama $(x_0, y_0) = (0, 0)$ in $(w_0, v_0) = (0, 0)$.

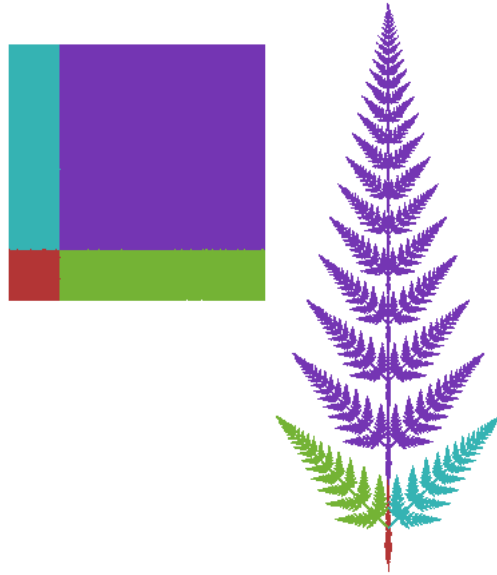
1. korak: $k_1 = 4$, zato z IFS barvanja dobimo

$$\tilde{f}_4(w_0, v_0) = \tilde{f}_4(0, 0) = (0.2, 0.2) = (w_1, v_1),$$

z IFS risanja pa

$$f_4(x_0, y_0) = f_4(0, 0) = (0, 0.2) = (x_1, y_1).$$

Točko (x_1, y_1) narišemo z barvo točke (w_1, v_1) .



Slika 5.3: Kvadrat na levi je atraktor IFS risanja $\mathcal{F}_R$, praprot na desni pa IFS barvanja $\mathcal{F}_B$.

2. korak: $k_2 = 4$, zato z IFS barvanja dobimo

$$\tilde{f}_4(w_1, v_1) = \tilde{f}_4(0.2, 0.2) = (0.36, 0.36) = (w_2, v_2),$$

z IFS risanja pa

$$f_4(x_1, y_1) = f_4(0, 0.2) = (0, 0.37) = (x_2, y_2).$$

Točko (x_2, y_2) narišemo z barvo točke (w_2, v_2) .

3. korak: $k_3 = 2$, dobimo točki

$$\tilde{f}_2(w_2, v_2) = (0.488, 0.072) = (w_3, v_3)$$

in

$$f_2(x_2, y_2) = (-0.074, 0.174) = (x_3, y_3).$$

Točko (x_3, y_3) narišemo z barvo točke (w_3, v_3) .

V i -tem koraku s funkcijama $\tilde{f}_{k_i}$ in f_{k_i} izračunamo (w_i, v_i) in (x_i, y_i) . Slednjo narišemo z barvo točke (w_i, v_i) . Na koncu na izhodni sliki dobimo atraktor IFS risanja $\mathcal{F}_R$, obarvan z barvami iz vhodne slike. Barve iz slike izbiramo z IFS $\mathcal{F}_B$.

Končen rezultat je na sliki 2.5.

Pogljemo še vlogo vrha fraktala pri algoritmu prevzemanja barv. Kot že omenjeno, z vpeljavo vrha dosežemo, da ima vsaka točka enolično določen naslov. V zgoraj opisanem algoritmu to naredimo s preverjanjem, če je neka točka že bila narisana. Če točka (x_k, y_k) še ni bila narisana, torej še ni bila pobarvana, jo narišemo z barvo točke (w_k, v_k) . Če pa je že bila narisana in jo čez nekaj korakov spet želimo narisati, preverimo, v katerem primeru ima večji naslov. V primeru, da je star naslov večji, pustimo staro barvo, sicer jo narišemo z barvo točke (w_k, v_k) .

Primer. IFS risanja naj bo

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_R = \{\square \subset \mathbb{R}^2; f_1(x, y) &= (0, 0.18y), \\ f_2(x, y) &= (-0.15x - 0.28y, 0.26x + 0.24y + 0.44), \\ f_3(x, y) &= (0.2x - 0.26y, 0.23x + 0.22y + 1.6), \\ f_4(x, y) &= (0.85x + 0.04y, -0.04x + 0.85y + 1.6)\},\end{aligned}$$

IFS barvanja pa

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_B = \{\square \subset \mathbb{R}^2; \tilde{f}_1(x, y) &= (0.5x, 0.5y), \\ \tilde{f}_2(x, y) &= (0.5x + 0.5, 0.5y), \\ \tilde{f}_3(x, y) &= (0.5x, 0.5y + 0.5), \\ \tilde{f}_4(x, y) &= (0.5x + 0.5, 0.5y + 0.5)\}.\end{aligned}$$

Vhodna slika in rezultat algoritma prevzemanja barv sta na sliki 5.4.

Poglejmo nekaj lastnosti dobljene slike oziroma atraktorja IFS $\mathcal{F}_R$.

- Barve se združujejo podobno kot so združene na vhodni sliki, čeprav se podobe iz vhodne slike ne ohranijo.
- Če bi vhodno sliko malo spremenili, bi se majhna sprememba poznala tudi na izhodni sliki. Isto velja za majhno spremembo IFS barvanja.
- Kot pri splošnem slučajnem algoritmu, tudi v tem primeru velja, da na končno sliko ne vpliva izbira začetne točke. Posebej še, če točke iz prvih nekaj korakov odstranimo.

Čudovite slike, ki nastanejo z algoritmom prevzemanja barv, so posledica dveh stvari. Tega, da ima preslikava iz vhodne slike v fraktal zaradi zvezne naslovne funkcije visoko stopnjo zveznosti, ter dejstva, da slike narave vsebujejo čudovite barvne palete, zveze med barvami in pozicijami točk, navidezne zveznosti in nezveznosti.

Podrobneje je algoritem predstavljen v [4] in [1].



Slika 5.4: Praprot na levi predstavlja rezultat algoritma prevzemanja barv. Slika na desni je vhod algoritma. Iz nje se barve prevzemajo.

Poglavje 6

Zaključek in nadaljnje delo

V diplomski nalogi smo obravnavali dva algoritma za konstrukcijo fraktalov s pomočjo iterativnega funkcijskega sistema, slučajni in deterministični algoritem. Oba algoritma smo podkrepili s teoretičnim ozadjem, z definicijami pojmov iz teorije metričnih prostorov in nazornimi primeri. V petem poglavju smo se dotaknili pojma fraktalovega vrha ter predstavili še različico slučajnega algoritma, algoritem prevzemanja barv. Vsi algoritmi in primeri iz diplomskega dela so bili sprogramirani s programskim orodjem Mathematica. Namen dela, opisati pojem fraktala v ravnini in konstrukcije fraktalov s pomočjo iterativnih funkcijskih sistemov, je bil dosežen.

Odločitev za pisanje diplomske naloge na temo fraktalov je padla ob branju članka *Transformations between Self-Referential Sets* ([5]). Prvotni namen dela je tako bil predstavitev transformacij med samopodobnimi množicami. Sama simulacija takšnih transformacij, na primer s programskim orodjem Mathematica, ni tako zahtevna, zahtevano matematično ozadje za njihovo definicijo in predstavitev pa se je izkazalo za preobsežno za okvire diplomske naloge. Zato so možnosti za nadaljnje delo v raziskanju vrhnjega dinamičnega sistema (angl. topological dynamical system) ter od tod fraktalnih transformacij (angl. fractal transformations). Oboje je predstavljeno v knjigi *Superfractals* ([4]). V diplomski nalogi tudi nismo obravnavali mer (angl. measures), polgrup in orbit množic (angl. orbits of sets) ter superfraktalov (angl. superfractals), ki so poglavitna tema v [4]. Iz vseh teoretičnih podlag bi bilo zanimivo raziskati in predstaviti tudi uporabnost fraktalov na različnih področjih, predvsem v računalništvu.

Slike

2.1	Nogometno igrišče	8
2.2	Trikotnik Sierpinskega	10
2.3	Praprot	11
2.4	Nogometni igrišči dveh ekip	12
2.5	Primer prevzemanja barv	13
3.1	Limita zaporedja	16
3.2	Zvezna in nezvezna funkcija	18
3.3	Odprta in zaprta množica	19
4.1	Primer atraktorja	33
4.2	Afine funkcije	35
4.3	Atraktor IFS	36
4.4	Trikotnik Sierpinskega, dobljen s slučajnim algoritmom 1	37
4.5	Trikotnik Sierpinskega, dobljen s slučajnim algoritmom 2	38
4.6	Primer determinističnega algoritma 1	39
4.7	Primer determinističnega algoritma 2	40
4.8	Primer determinističnega algoritma 3	40
4.9	Cantorjeva množica	41
5.1	Primer naslovne funkcije	45
5.2	Primer vrhnje funkcije	49
5.3	Atraktorja IFS barvanja in IFS risanja	52
5.4	Prevzemanje barv	54

Literatura

- [1] (2003) M. F. Barnsley, *Ergodic theory, fractal tops and colour stealing*. Dostopno na:
http://www.maths.anu.edu.au/~barnsley/pdfs/fractal_tops.pdf
- [2] M. F. Barnsley, *Fractals ewerywhere*, Academic Press, San Diego, USA, 1993, pogl. 2, 3, 4.
- [3] (2003) M. F. Barnsley, *Fractal transformations*. Dostopno na:
<http://www.maths.anu.edu.au/~barnsley/pdfs/nigel4.pdf>
- [4] M. F. Barnsley, *Superfractals*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2006, pogl. 1, 2, 4.
- [5] M. F. Barnsley, *Transformations between Self-Referential Sets*, v zborniku *American Mathematical Monthly*, Integre Technical Publishing Co., Inc., Washington, april 2009, str. 291-304.
- [6] M. Cencelj, D. Repovš, *Topologija*, Pedagoška fakulteta Univerze v Ljubljani, Ljubljana, 2001, str. 81.
- [7] B.B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman and Company, 1982.
- [8] J. Vrabec, *Metrični prostori*, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana, 1993, str. 144-145.
- [9] (2010) Ergodic theory. Dostopno na:
http://en.wikipedia.org/wiki/Ergodic_theory
- [10] (2009) Fractal geometry packages. Dostopno na:
<http://facstaff.unca.edu/mcmclur/FractalGeometryMaterials.zip>