

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA RAČUNALNIŠTVO IN INFORMATIKO
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Janez Starc

Analiza pokra z zveznimi vrednostmi

DIPLOMSKO DELO
NA INTERDISCIPLINARNEM UNIVERZITETNEM ŠTUDIJU

Mentor: izred. prof. dr. Martin Juvan

Ljubljana, 2010



Št. naloge: 00018/2010

Datum: 01.09.2010

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za računalništvo in informatiko ter Fakulteta za matematiko in fiziko izdaja naslednjo nalogo:

Kandidat: **JANEZ STARC**

Naslov: **ANALIZA POKRA Z ZVEZNIMI VREDNOSTMI**
ANALYSIS OF CONTINUOUS POKER MODELS

Vrsta naloge: Diplomsko delo univerzitetnega študija

Tematika naloge:

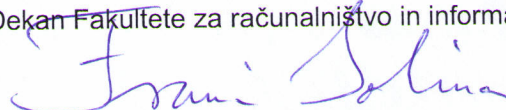
Kandidat naj v diplomskem delu najprej predstavi osnovne pojme iz teorije iger. Nato naj natančno analizira nekaj preprostih modelov igre poker za dva igralca, pri katerih je vrednost roke, s katero igra posamezni igralec, naključno izbrano število z zaprtega enotskega intervala. V zaključku naj kandidat na osnovi opravljenih izračunov predstavljene modele primerja med seboj, lastnosti dobljenih optimalnih strategij pa naj primerja z obnašanjem pri pravem pokru.

Mentor:



prof. dr. Martin Juvan



Dekan Fakultete za računalništvo in informatiko:


prof. dr. Franc Solina

Dekan Fakultete za matematiko in fiziko:


prof. dr. Andrej Likar



Rezultati diplomskega dela so intelektualna lastnina Fakultete za računalništvo in informatiko ter Fakultete za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani. Za objavlanje ali izkoriščanje rezultatov diplomskega dela je potrebno pisno soglasje Fakultete za računalništvo in informatiko, Fakultete za matematiko in fiziko ter mentorja.

Besedilo je oblikovano z urejevalnikom besedil \LaTeX .

Namesto te strani **vstavite** original izdane teme diplomskega dela s podpisom mentorja in dekana ter žigom fakultete, ki ga diplomant dvigne v študentskem referatu, preden odda izdelek v vezavo!

IZJAVA O AVTORSTVU

diplomskega dela

Spodaj podpisani/-a Janez Starc,

z vpisno številko 63050214,

sem avtor/-ica diplomskega dela z naslovom:

Analiza pokra z zveznimi vrednostmi

S svojim podpisom zagotavljam, da:

- sem diplomsko delo izdelal/-a samostojno pod mentorstvom izred. prof. dr. Martina Juvana
- so elektronska oblika diplomskega dela, naslov (slov., angl.), povzetek (slov., angl.) ter ključne besede (slov., angl.) identični s tiskano obliko diplomskega dela
- soglašam z javno objavo elektronske oblike diplomskega dela v zbirki "Dela FRI".

V Ljubljani, dne 8. 9. 2010

Podpis avtorja:

Zahvala

Zahvaljujem se mentorju izred. prof. dr. Martinu Juvanu za nasvete in natančne popravke, ki so bili potrebni za izdelavo diplomskega dela.

Zahvaljujem se staršema za podporo v celotnem času šolanja.

Na koncu bi se še rad zahvalil vsem prijateljem iz knjižnice, ki so me podpirali pri izdelavi diplomskega dela.

Kazalo

Povzetek	1
Abstract	2
1 Uvod	3
2 Pravila pokra	5
3 Teorija iger	8
3.1 Normalna oblika	8
3.2 Razširjena oblika	16
3.3 Bayesove igre	18
4 Modeli pokra z zveznimi vrednostmi	21
4.1 Opis modela	21
4.2 La Relance	23
4.3 Von Neumannov model	27
4.4 Model z eno stavo	32
4.5 Von Neumannov model s povišanjem	39
4.6 Model z dvema stavama	45
5 Sklepne ugotovitve	48
Seznam slik	51
Literatura	52

Povzetek

Poker z zveznimi vrednostmi je različica pokra, kjer karte nadomestimo z vrednostmi iz nekega intervala. V diplomskem delu predstavimo več takih modelov pokra, v katerih nastopata dva igralca. Na začetku igre dobita oba igralca neodvisni naključni vrednosti. Temu sledi en krog stavljenja. Zmaga tisti igralec, ki ima višjo vrednost, oziroma tisti, ki ni odstopil.

Predstavljeni modeli sodijo med Bayesove igre z ničelno vsoto za dva igralca z neskončnim prostorom tipov. Za vsak model poiščemo vsaj eno Bayes-Nashevo ravnovesje in vrednost igre. Bayes-Nashevo ravnovesje je pravzaprav par optimalnih strategij za oba igralca. Optimalna strategija zagotavlja igralcu določen pričakovani izkupiček ne glede na strategijo nasprotnika. Temu izkupičku igralca, ki je prvi na vrsti, pravimo tudi vrednost igre. Vrednost igre nam torej pove, kateri igralec ima prednost in koliko znaša ta prednost.

Vse možne izide igre lahko predstavimo z drevesom igre. Predstavljeni modeli imajo majhna drevesa igre. Z večanjem drevesa igre postane iskanje Bayes-Nashevih ravnovesij težko rešljiv problem. Zato v zaključku predstavimo možnosti iskanja Bayes-Nashevih ravnovesij. Poleg tega naredimo primerjavo vseh predstavljenih modelov in izluščimo strateške značilnosti, ki so skupne tako tem modelom, kot tudi drugim različicam pokra.

Ključne besede:

poker, model z zveznimi vrednostmi, teorija iger, Bayesova igra, Bayes-Nashevo ravnovesje, optimalna strategija

Abstract

Poker with continuous values is a variant of poker where cards are replaced by values from some interval. In our work, we describe several such models for two players. In the beginning both players are dealt independent random values according to a uniform distribution on unit interval. This is followed by a round of betting. If one player folds, his opponent wins. On the other hand, if the game comes to the showdown, the player with the higher value wins.

The described models are two-player zero-sum Bayesian games with infinite type sets. For each model we find at least one Bayes-Nash equilibrium and the value of the game. Bayes-Nash equilibrium consists of both players' optimal strategies. Optimal strategy guarantees a player certain expected payoff no matter which strategy his opponent plays. This expected payoff of the player who acts first is also called the value of the game. This value tells us which player has the edge and how big it is.

All possible outcomes of the game can be represented by a game tree. Described models have small game trees. Searching for optimal strategies in large game tree models can become unfeasible. In conclusion, possible procedures for searching for optimal strategies are considered. Furthermore, we compare all models and extract some strategic characteristics which can be also found in real poker.

Key words:

poker, model with continuous values, game theory, Bayesian game, Bayes-Nash equilibrium, optimal strategy

Poglavje 1

Uvod

Poker je danes ena najpopularnejših iger. V velikem razcvetu je predvsem zaradi možnosti igranja preko Interneta. Aktivno igra poker preko spleta več kot milijon igralcev. Vse spletne igralnice skupaj imajo letno za več milijard dolarjev prihodkov. To virtualno igro preko spleta je nekoliko lažje analizirati, kajti v primerjavi s pravo igro v fizičnem prostoru lahko skoraj popolnoma izključimo pomemben faktor. Pri fizični igri igralci skušajo prepoznavati določene vizualne in zvočne znake, ki jih zavedno oziroma nezavedno dajejo nasprotniki, in to izkoristiti v svojo korist. V igri preko spleta pa je teh informacij veliko manj. Kljub temu je igra še zmeraj zelo kompleksna. Zato danes še ni javno znanega algoritma, ki bi premagoval najboljše igralce pokra preko spleta. V delu poskušamo s poenostavitvijo igre poiskati določene strateške zakonitosti igre. Iz igre vzamemo karte in jih zamenjamo s številkami, skrajšamo potek igre na samo en krog stavljenja, število igralcev zmanjšamo na dva itd. Analiziramo več modelov in za vsakega poiščemo optimalno strategijo. Torej strategijo, ki ne glede na strategijo nasprotnika prinaša največji izkupiček. Poleg tega ugotovimo, kateri igralec ima prednost. Izsledke analize se lahko uporabi pri strateškem razmišljanju pri pravem pokru.

Delo poleg uvoda vsebuje še štiri poglavja. Podrobnejša struktura dela je naslednja:

- V drugem poglavju so predstavljena pravila pokra. Opisan je potek igre, določanje zmagovalca, pravila, ki so značilna za posamezne različice, itd.
- Tretje poglavje je namenjeno teoretičnemu ozadju teorije iger. Opisani so osnovni pojmi, ki jih potrebujemo pri analizi modelov. Dotaknemo se normalne oblike, Nashevega ravnovesja, izreka o minimaksu, principa indiferentnosti, razširjene oblike, Bayesovih iger in Bayes-Nashevega

ravnovesja.

- Četrto poglavje je jedro dela. V njem je analiziranih pet modelov: La Relance, von Neumannov model, model z eno stavo, von Neumannov model s povišanjem in model z dvema stavama. Za vsak model poiščemo optimalno strategijo in vrednost igre.
- V zadnjem poglavju so predstavljeni rezultati raziskav. Modeli so primerjani med seboj. Predstavljene so nekatere strateške značilnosti, ki jih vsebujejo modeli. Opisane so možnosti reševanja problema iskanja optimalnih strategij v poljubnem modelu.

Poglavje 2

Pravila pokra

Poker je igra s kartami, ki se igra s standardnim kompletom 52 kart. Igrata jo lahko najmanj dva igralca, največ pa deset ali celo več igralcev. Obstaja več različic pokra: Texas Hold'Em, Omaha, 7 Card Stud itd. Vsak igralec ima na razpolago kup žetonov, ki jih uporablja za stavljenje. Na začetku vsake igre delilec premeša komplet kart. Igralca, ki je delilec, označuje delilski plošček (dealer button), ki se vsako igro premakne v smeri urinega kazalca k naslednjemu igralcu. Nato ponavadi eden ali več igralcev prispeva v *polog* (*pot*) vsiljeno stavo, ki ji rečemo začetna stava (*ante*) ali slepa stava (*blind bet*). V različici Texas Hold'Em igralca levo od delilca prispevata slepi stavi. Igralec bližje delilcu prispeva malo slepo stavo (*small blind*), drugi pa prispeva veliko slepo stavo (*big blind*). Nato delilec razdeli primerno (odvisno od različice) število kart vsakemu igralcu. Nekatere karte so lahko vidne vsem. Vsak igralec pa ima vsaj eno karto, ki jo vidi samo on. V različici Texas Hold'Em vsak igralec dobi dve navzdol obrnjeni karti. Karte, s katerimi igralec razpolaga, se imenujejo *roka* (*hand*).

Nato sledi več krogov stavljenja. V nadaljevanju bomo poiskali potek kroga stavljenja. Igralci so na potezi drug za drugim v smeri urinega kazalca. Vsak lahko vedno *odstopi* (*fold*). Če je pred igralcem že kdo stavil, ima možnost *izenačiti* (*call*) doslej najvišjo stavo ali *povišati* (*raise*). Slednje naredi tako, da hkrati izenači doslej najvišjo stavo in stavi še dodatne žetone. Če pred igralcem še nihče ni stavil, lahko *stavi* (*bet*) ali *preveri* (*check*). Pri preverjanju igralec ne stavi ničesar in s tem oznani, da je na vrsti naslednji igralec. Če je igra brez omejitev (*no-limit*), potem lahko igralec stavi oziroma poviša za poljubno količino žetonov. Če ima igra omejitev pologa (*pot-limit*), potem lahko igralec stavi oziroma poviša za največ toliko, kolikor je trenutno v pologu. Obstaja še različica, v kateri igralec stavi oziroma poviša za točno določeno število

žetonov (fixed limit). Ko so stave vseh preostalih igralcev v igri izenačene, je krog stavljenja zaključen.

Po vsakem krogu stavljenja (razen zadnjem) igralci prejmejo nove karte oziroma jih zamenjajo. Na ta način se njihova roka razvija. V različici 7 Card Stud dobi igralec poleg treh začetnih kart (ena je vidna vsem) še štirikrat po eno karto (zadnjo vidi samo on). V različicah Texas Hold'Em in Omaha delilec na sredino mize razdeli vse skupaj pet kart, ki so skupne vsem. Vsak lahko uporabi tudi karte na sredini, da sestavi svojo najmočnejšo roko.

Igra se lahko konča na dva načina. Če se zgodi, da v igri ostane samo en igralec, potem ta postane zmagovalec in pobere vse žetone, ki so v pologu. Če pa po zadnjem krogu stavljenja ostane več kot en igralec, pride do razkritja kart (showdown). Igralci, ki so ostali v igri, pokažejo svoje karte. Tisti, ki ima glede na lestvico moči rok (hand rankings) najmočnejšo roko, postane zmagovalec in dobi celoten polog. Če ima več igralcev zmagovalne roke, potem si ti razdelijo polog na enake dele. Igralec pri razkritju kart med vsemi kombinacijami petih kart, ki so mu na voljo, izbere tisto, ki je najmočnejša po lestvici moči rok. Vse različice nimajo enakih lestvic moči rok.

Najbolj običajna lestvica je (od najvišje do najnižje kombinacije):

- Kraljeva lestvica (royal flush): A K Q J 10 v isti barvi
(Npr. $A\heartsuit K\heartsuit Q\heartsuit J\heartsuit 10\heartsuit$);
- Barvna lestvica (straight flush) : pet zaporednih kart iste barve
(Npr. $8\spadesuit 7\spadesuit 6\spadesuit 5\spadesuit 4\spadesuit$);
- Poker (four of a kind): štiri karte iste vrednosti
(Npr. $J\spadesuit J\heartsuit J\diamondsuit J\clubsuit 7\spadesuit$);
- Polna hiša (full house): tris in par
(Npr. $2\heartsuit 2\clubsuit 2\diamondsuit Q\clubsuit Q\diamondsuit$);
- Barva (flush): pet kart iste barve
(Npr. $A\diamondsuit 10\diamondsuit 9\diamondsuit 6\diamondsuit 3\diamondsuit$);
- Kenta oz. lestvica (straight): pet zaporednih kart
(Npr. $J\clubsuit 10\spadesuit 9\clubsuit 8\clubsuit 7\heartsuit$);
- Tris (three of a kind): tri karte iste vrednosti
(Npr. $5\heartsuit 5\clubsuit 5\spadesuit A\diamondsuit 4\spadesuit$);
- Dva para (two pair):
(Npr. $A\diamondsuit A\clubsuit 7\heartsuit 7\diamondsuit 10\diamondsuit$);

- Par (one pair): dve karti iste vrednosti
(Npr. $8\heartsuit 8\spadesuit K\spadesuit 6\diamond 2\diamond$);
- Visoka karta (high card): pet različnih kart
(Npr. $K\clubsuit 10\spadesuit 7\heartsuit 4\diamond 2\heartsuit$).

Cilj igre je osvojiti čim večje število žetonov. V normalnih igrah (cash game) lahko igralec, ki izgubi vse žetone, znova kupi žetone in nadaljuje z igro. Igralec lahko vsak trenutek zapusti igro in odnese žetone. Na turnirjih (tournament) pa vsi igralci začnejo z enakim številom žetonov. Če igralcu zmanjka žetonov, izpade iz turnirja. Najvišje uvrščeni igralci prejmejo nagrade.

Poglavje 3

Teorija iger

V tem poglavju so opisani osnovni pojmi iz teorije iger. Predstavitev je povzeta po knjigi [7].

3.1 Normalna oblika

Ena od najosnovnejših predstavitev igre je *normalna oblika* oziroma *strateška oblika*.

Definicija 3.1.1 (Igra v normalni obliki). Igra v *normalni obliki* oziroma v *strateški obliki* za n igralcev je trojka (N, A, u) , kjer je

- N množica n igralcev;
- $A = A_1 \times \dots \times A_n$, kjer je A_i končna množica *akcij*, ki so na voljo igralcu i . Vektor $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$ imenujemo *akcijski profil*;
- $u = (u_1, \dots, u_n)$, kjer je $u_i : A \mapsto \mathbb{R}$ *funkcija izkupička* igralca i .

Igra poteka tako, da vsi igralci istočasno izberejo akcije. Vse izbrane akcije sestavljajo akcijski profil, na podlagi katerega vsak izmed igralcev prejme izkupiček glede na svojo funkcijo izkupička.

Eden najbolj znanih primerov iz teorije iger je igra Zapornikova dilema. Udeleženca te igre sta osebi osumljeni nekega zločina. Preiskovalci nimajo dovolj dokazov za obsodbo. Zato ločijo oba osumljenca (igralca) tako, da ne moreta komunicirati med seboj. Nato vsakemu ponudijo dogovor, po katerem lahko izda drugega v zameno za manjšo kazen (*izdaja*). Lahko pa ostane tiho in tako zavrne dogovor (*molk*). Če en osumljenec izda drugega, drugi pa ostane tiho, je izdajalec izpuščen, drugi pa dobi 10 let zaporne kazni. Če drug drugega

izdata, dobita oba 5 let zaporne kazni. Če oba molčita, pa ju lahko obsodijo le za manjši zločin. V tem primeru dobita 1 leto zaporne kazni.

Najlažje predstavimo igro v normalni obliki z n -dimenzionalno shemo. Na sliki 3.1 je predstavljena shema Zapornikove dileme. Vsaka vrstica predstavlja eno akcijo (odločitev) igralca I, vsak stolpec eno akcijo igralca II, vsak element matrice pa en možen izid igre. Pravzaprav so v vsaki celici sheme zapisani izkupički obeh igralcev tako, da je najprej zapisan izkupiček igralca I, nato pa še izkupiček igralca II.

	molk	izdaja
molk	1, 1	10, 0
izdaja	0, 10	5, 5

Slika 3.1: Igra Zapornikova dilema.

Igre z ničelno vsoto. *Igre z ničelno vsoto* so igre, kjer je vsota vseh izkupičkov igralcev za vsak akcijski profil enaka nič. Pravzaprav je to podmožica iger s *konstantno vsoto*.

Definicija 3.1.2 (Igra s konstantno vsoto). Igra v normalni obliki je *konstantne vsote*, če obstaja taka *konstanta* c , da za vsak akcijski profil $a \in A$ velja $u_1(a) + \dots + u_n(a) = c$. Če je $c = 0$, potem gre za *igro z ničelno vsoto*.

Pri igrah z ničelno vsoto ponavadi igralci na začetku nekaj vložijo, na koncu pa si ta vložek razdelijo v skladu s funkcijami izkupička. Zapornikova dilema ni niti igra z ničelno vsoto niti s konstantno vsoto. Igra z ničelno vsoto je, na primer, igra Enakih kovancev. To igro igrata dva igralca. Vsak od njiju se odloči, ali bo pokazal *grb* ali *cifro*. Če oba pokažeta enako, dobi igralec I oba kovanca, sicer dobi oba kovanca igralec II.

Strategije v igrah normalne oblike. Do sedaj smo definirali akcije, ki so na voljo posameznim igralcem, nismo pa še definirali množice strategij, ki so jim na voljo. Denimo, da igralci zaporedoma večkrat igrajo isto igro. Strategiji, kjer igralec vsakič izbere isto akcijo, pravimo *čista strategija*. Po drugi strani

se lahko igralec odloči, da bo izbral akcije naključno po neki verjetnostni porazdelitvi. Taki strategiji pravimo *mešana strategija*. Obstajajo še druge vrste strategij, vendar bomo v nadaljevanju potrebovali samo ti dve.

Definicija 3.1.3 (Mešana strategija). Naj bo (N, A, u) igra v normalni obliki. Množica *mešanih strategij* S_i igralca i je množica vseh verjetnostnih porazdelitev nad A_i .

Definicija 3.1.4. Množica *profilov mešanih strategij* je kartezični produkt posameznih množic mešanih strategij $S_1 \times \cdots \times S_n$.

S $s_i(a_i)$ označimo verjetnost, da bo igralec i izbral akcijo a_i , kadar bo uporabljal strategijo s_i . Podmnožici akcij, katerih verjetnost izbire je pozitivna, pravimo *nosilec* s_i .

Definicija 3.1.5 (Nosilec). *Nosilec* mešane strategije s_i za igralca i je množica akcij $\{a_i \in A_i \mid s_i(a_i) > 0\}$.

Poseben primer mešanih strategij so čiste strategije (v nosilcu je ena sama akcija). Iz sheme izkupičkov znamo razbrati izkupičke igralcev, če vsi igrajo čiste strategije. Potrebno pa je še definirati izkupičke igralcev, ko uporabljajo mešane strategije. Takim izkupičkom pravimo *pričakovani izkupički*. Izračunamo jih tako, da za vsak profil akcij izračunamo izkupičke in jih utežimo glede na verjetnost profila.

Definicija 3.1.6 (Pričakovani izkupiček). Naj bo (N, A, u) igra v normalni obliki. *Pričakovani izkupiček* u_i igralca i glede na profil mešanih strategij $s = (s_1, \dots, s_n)$ je definiran kot

$$u_i(s) = \sum_{a \in A} u_i(a) \prod_{j=1}^n s_j(a_j).$$

Analiza igre. Tisti, ki se ukvarjajo s teorijo iger, velikokrat iščejo take podmnožice izidov posameznih iger, ki so zanimive iz takšnega ali drugačnega razloga. Tem pravimo *koncepti rešitev*. Eden takih konceptov je, na primer, *Nashevo ravnovesje*, ki ga je podrobno obravnaval John Forbes Nash – eden od utemeljiteljev teorije iger.

Poglejmo sedaj igro z igralčevega vidika. Igralec ponavadi želi poiskati strategijo, ki bi mu prinašala največji pričakovani izkupiček. Taki strategiji pravimo *optimalna strategija*. Če bi igralec vedel, kakšne strategije bodo uporabljali nasprotniki, bi mu bilo lažje poiskati optimalno strategijo. Naj

bo $s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$ profil strategij brez strategije igralca i . Podobno pišemo $-i$ za množico igralcev brez igralca i . Potem lahko profil strategij zapišemo tudi kot $s = (s_i, s_{-i})$. Če bi igralci $-i$ zagotovo igrali s_{-i} , potem bi igralec i , če bi želel maksimizirati svoj izkupiček, igral strategijo, ki ji pravimo *najboljši odgovor*.

Definicija 3.1.7 (Najboljši odgovor). *Najboljši odgovor* igralca i na profil strategij s_{-i} je mešana strategija $s_i^* \in S_i$, za katero velja $u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i})$ za vsako strategijo $s_i \in S_i$.

Najboljši odgovor ni nujno en sam. Pravzaprav je najboljših odgovorov neskončno mnogo razen v izjemnem primeru, ko je edini najboljši odgovor čista strategija. Če nosilec najboljšega odgovora s^* vsebuje več kot eno akcijo, potem je igralcu vseeno, katero izbere. Drugače bi želel zmanjšati verjetnost izbire vsaj ene akcije na nič. Torej je *vsaka* mešana strategija s takim nosilcem najboljši odgovor.

Vendar igralec ne ve, katere strategije bodo uporabljali ostali igralci. Zato najboljši odgovor še ni koncept rešitev. V splošnem ne porodi zanimivih izidov iger. Vendar nam njegova ideja pomaga izpeljati koncept rešitev, ki mu pravimo Nashevo ravnovesje.

Definicija 3.1.8. Profil strategij $s = (s_1, \dots, s_n)$ je Nashevo ravnovesje, če za vsakega igralca i velja, da je njegova strategija s_i najboljši odgovor na s_{-i} .

Nashevo ravnovesje je *stabilen* profil strategij. Noben igralec ne bi spremenil svoje strategije, če bi vedel za strategije ostalih igralcev. V nekaterih igrah Nashevo ravnovesje vedno obstaja.

Izrek 3.1.1 (Nash, 1951). *Vsaka igra s končnim številom igralcev in akcijskih profilov ima vsaj eno Nashevo ravnovesje.*

Naslednji koncept rešitev so *dominantne strategije*. Definirajmo najprej, kdaj strategija dominira drugo. Strategija igralca i dominira drugo, kadar prinaša igralcu i večji izkupiček kot druga za vsak profil strategij ostalih igralcev. Obstajajo tri različne vrste dominiranja, ki jih definiramo v naslednji definiciji.

Definicija 3.1.9 (Dominiranje). Naj bosta s_i in s'_i strategiji igralca i in S_{-i} množica vseh profilov strategij ostalih igralcev. Potem

1. s_i *strogo dominira* s'_i , če za vsak $s_{-i} \in S_{-i}$ velja $u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i})$.

2. s_i šibko dominira s'_i , če za vsak $s_{-i} \in S_{-i}$, velja $u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i})$ in če za vsaj en $s_{-i} \in S_{-i}$ velja $u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i})$.
3. s_i zelo šibko dominira s'_i , če za vsak $s_{-i} \in S_{-i}$ velja $u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i})$.

Če ena strategija dominira vse ostale, pravimo, da je *dominantna*.

Definicija 3.1.10 (Dominantna strategija). Strategija nekega igralca je *strogo (šibko; zelo šibko) dominantna*, če strogo (šibko; zelo šibko) dominira vse ostale strategije tega igralca.

Vsak profil strategij (s_1, \dots, s_n) , v katerem je vsaka strategija s_i zelo šibko dominantna, je Nashevo ravnovesje. Če pa profil strategij vsebuje same strogo dominantne strategije, potem je to edino Nashevo ravnovesje. Nasproten koncept rešitev so *dominirane strategije*.

Definicija 3.1.11 (Dominirana strategija). Strategija s_i je *strogo (šibko; zelo šibko) dominirana*, če obstaja strategija s'_i , ki strogo (šibko; zelo šibko) dominira s_i .

Strategije, ki je šibko dominirana, se igralcu ne splača igrati, kajti raje uporabi strategijo, ki jo šibko dominira. Če odstranimo šibko dominirane strategije, nam ostanejo samo *dopustne* strategije. Po takšnem odstranjevanju nam vedno ostane vsaj en profil strategij, ki je Nashevo ravnovesje.

Definicija 3.1.12 (Dopustna strategija). Strategija je *dopustna*, če ni šibko dominirana.

Maksmin in minmaks strategije. Maksmin strategija igralca i v igri za n igralcev s konstantno vsoto je strategija, ki maksimizira njegov najslabši možen izkupiček v situaciji, ko vsi ostali igralci igrajo take strategije, ki najbolj škodijo igralcu i . Vrednost maksmin je najmanjši izkupiček, ki je zagotovljen igralcu i , če igra maksmin strategijo.

Definicija 3.1.13 (Maksmin). *Maksmin strategija* igralca i je

$$\arg \max_{s_i} \min_{s_{-i}} u_i(s_i, s_{-i}).$$

Njegova *maksmin vrednost* je $\max_{s_i} \min_{s_{-i}} u_i(s_i, s_{-i})$.

Čeprav so maksmin strategije koncept rešitev, ki je smiseln v igrah, kjer se igralci istočasno odločijo, katero akcijo bodo izbrali, ga lahko razumemo tudi drugače. Maksmin strategija je najboljša odločitev igralca i , kadar se mora odločiti za eno strategijo, ostali igralci pa nato glede na to strategijo izberejo take strategije, ki minimizirajo izkupiček igralca i . Če tudi bodo igralci igrali druge strategije, bo igralec i dobil izkupiček, ki je večji ali enak maksmin vrednosti. Zato je maksmin strategija primerna odločitev za konzervativnega igralca, ki ne želi delati predpostavk o strategijah ostalih igralcev, ampak želi igrati tako, da bo izgubil čim manj.

Podoben koncept rešitev je *minmaks strategija*. V igrah za dva igralca minmaks strategija prvega igralca povzroči, da je maksimalen izkupiček drugega igralca minimalen. *Minmaks vrednost* pa predstavlja ta minimum. Na podoben način, a nekoliko bolj zapleteno, obstaja v igrah z več igralci minmaks strategija igralca j proti igralcu i . Za nadaljnje potrebe definirajmo minmaks strategijo in minmaks vrednost samo za dva igralca.

Definicija 3.1.14 (Minmaks). *Minmaks strategija* za igralca i proti igralcu $-i$ v igri za dva igralca je $\arg \min_{s_i} \max_{s_{-i}} u_{-i}(s_i, s_{-i})$. *Minmaks vrednost* igralca $-i$ je $\min_{s_i} \max_{s_{-i}} u_{-i}(s_i, s_{-i})$.

Podobno kot prej si lahko predstavljamo, da najprej igralec $-i$ razkrije, katero strategijo bo igral. Minmaks strategija je tista strategija igralca i , ki minimizira izkupiček igralca $-i$.

Profil maksmin strategij je profil mešanih strategij, v katerem je vsaka komponenta profila maksmin strategija. Podobno lahko v igrah za dva igralca definiramo profil minmaks strategij. V igrah z ničelno vsoto za dva igralca obstaja zelo tesna povezava med profilom maksmin strategij in profilom minmaks strategij. Poleg tega so ti koncepti rešitev povezani z Nashevimi ravnovesjem.

Izrek 3.1.2 (Izrek o minimaksu (von Neumann, 1928)). *V vsaki končni igri z ničelno vsoto za dva igralca v vsakem Nashevem ravnovesju vsak igralec prejme izkupiček, ki je enak njegovi maksmin vrednosti in minmaks vrednosti.*

S pomočjo izreka lahko sklepamo o naslednjih lastnostih igre z ničelno vsoto za dva igralca:

1. Vsaka maksmin vrednost posameznega igralca je enaka njegovi minmaks vrednosti. Po dogovoru pravimo maksmin vrednosti prvega igralca *vrednost igre*.
2. Za vsakega igralca je množica maksmin strategij enaka množici minmaks strategij.

3. Vsak profil maksmin strategij in vsak profil minmaks strategij je Nashevo ravnovesje. To so tudi vsa Nasheva ravnovesja. Zato imajo vsa Nasheva ravnovesja enak vektor izkupičkov. Torej, prva komponenta tega vektorja je izkupiček prvega igralca – vrednost igre.

Na primer, vrednost igre Enakih kovancev je nič. Edino Nashevo ravnovesje je sestavljeno iz enakih strategij, kjer oba igralca naključno z enako verjetnostjo izbirata grb ali cifro. Ta strategija je tudi maksmin in minmaks strategija za oba igralca.

Princip indiferentnosti. Razlaga principa indiferentnosti je povzeta po tretjem poglavju drugega dela iz knjige [5]. Pri iskanju optimalnih strategij si lahko pomagamo s principom indiferentnosti. Razložili bomo, kako to poteka v igrah z ničelno vsoto za dva igralca, ki jim pravino tudi *matrične igre*. V takih igrah označimo mešano strategijo igralca I s $p = (p_1, \dots, p_m)$, kjer je $p_k = s_1(a_k)$ in m število akcij igralca I. Mešano strategijo igralca II označimo s $q = (q_1, \dots, q_n)$, kjer je $q_l = s_2(a_l)$ in n število akcij igralca II. Vrednost igre označimo z V . Igro pa predstavimo z $m \times n$ matriko A , kjer je a_{ij} izkupiček igralca I, kadar igra i -to akcijo, igralec II pa j -to akcijo. Če je p optimalna, potem po izreku o minimaksu velja, da ne glede na to, katero čisto strategijo igra igralec II, bo pričakovani izkupiček igralca I vsaj V . Torej,

$$\sum_{i=1}^m p_i a_{ij} \geq V \text{ za vsak } j = 1, \dots, n. \quad (3.1)$$

Podobno velja za igralca II. Če je q optimalna, imamo:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} q_j \leq V \text{ za vsak } i = 1, \dots, m. \quad (3.2)$$

Iz izreka o minimaksu tudi sledi, da kadar oba igralca igrata optimalni strategiji, potem je pričakovani izkupiček prvega igralca enak V . Torej,

$$V = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i a_{ij} q_j. \quad (3.3)$$

Naslednji preprosti izrek – *izrek o ravnovesju* – dokazuje, za katere vrednosti j velja enakost v (3.1) in za katere vrednosti i velja enakost v (3.2).

Izrek 3.1.3 (Izrek o ravnovesju). Naj bo A matrika igre v normalni obliki z ničelno vsoto za dva igralca, V vrednost igre, p optimalna strategija igralca I in q optimalna strategija igralca II. Potem velja

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}q_j = V \text{ za vsak } i, \text{ za katerega velja } p_i > 0, \quad (3.4)$$

in

$$\sum_{i=1}^m p_i a_{ij} = V \text{ za vsak } j, \text{ za katerega velja } q_j > 0. \quad (3.5)$$

Dokaz. Dokažimo izrek s protislovjem. Denimo, da obstaja tak k , za katerega velja $p_k > 0$ in $\sum_{j=1}^n a_{kj}q_j \neq V$. Potem iz (3.2) sledi $\sum_{j=1}^n a_{kj}q_j < V$. Ampak iz (3.3) sledi, da je

$$V = \sum_{i=1}^m p_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}q_j \right) < \sum_{i=1}^m p_i V = V.$$

Ker velja stroga neenakost za k -ti člen vsote, velja stroga neenakost za celotno enačbo, ki je zato v protislovju. S tem smo dokazali (3.4). Dokaz (3.5) poteka na enak način. \square

Zgornji izrek si lahko razlagamo tudi na drugačen način: če obstaja optimalna strategija igralca I, ki ima v nosilcu akcijo a_i , potem je izkupiček igralca I, če igra čisto strategijo a_i , proti vsaki optimalni strategiji igralca II enak vrednosti igre.

Z izrekom 3.1.3 si lahko pomagamo pri iskanju optimalnih strategij. Postopek iskanja optimalne strategije za igralca I je sledeč: poskušajmo poiskati rešitev sistema enačb, ki ga sestavljajo tiste enačbe (3.5), za katere mislimo, da je $q_j > 0$. Po drugi strani pravimo, da igralec I išče tako strategijo, da bo igralec II *indiferenten* med njegovimi (dobrimi) čistimi strategijami. Temu pravimo *princip indiferentnosti*. Podobno postopek lahko uporabimo za iskanje optimalnih strategij igralca II.

Primer. V igri Lih ali Sod oba igralca istočasno izbereta številko 0, 1 ali 2. Če je seštevek številkih lih, zmaga Lih (igralec I). Če pa je seštevek sod, zmaga Sod (igralec II). Zmagovalec dobi od nasprotnika seštevek številkih. Matrika igre

je

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Na prvi pogled je težko ugotoviti, kateri igralec ima prednost. Če bi nekajkrat igrali to igro, bi bili morda prepričani, da mora Sod izbirati vsa tri števila. Če to drži, potem mora optimalna strategija Lihega po principu indiferentnosti zadoščati naslednjemu sistemu enačb:

$$\begin{aligned} p_2 - 2p_3 &= V \\ p_1 - 2p_2 + 3p_3 &= V \\ -2p_1 + 3p_2 - 4p_3 &= V \\ p_1 + p_2 + p_3 &= 1. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Rešitev sistema štirih enačb s štirimi neznankami je strategija $p = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ in $V = 0$. Vsaka izmed prvih treh enačb iz (3.6) nam pove izkupiček igralca I, če igralec II izbere eno od čistih strategij. Torej kakorkoli Sod igra, bo izkupiček Lihega vsaj 0. Podobno kot za Lihega, poskušajmo poiskati optimalno strategijo za Sodega. Predpostavimo, da je p optimalna (Lih izbira vse številke). Ker je matrika igre simetrična, mora tudi strategija q zadoščati sistemu enačb (3.6). Tudi izkupiček Sodega je vsaj 0. Torej je optimalna strategija obeh igralcev je enaka $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. Vrednost igre pa je $V = 0$.

3.2 Razširjena oblika

Z *razširjeno obliko* lažje predstavimo igre, v katerih ni nujno, da so igralci na potezi istočasno. Predstavitev takih iger v razširjeni obliki je lahko eksponentno manjša kot predstavitev istih iger v normalni obliki. Igro v normalni obliki najlažje predstavimo z matriko, igro v razširjeni obliki pa z drevesom. Primer je prikazan na sliki 3.2.

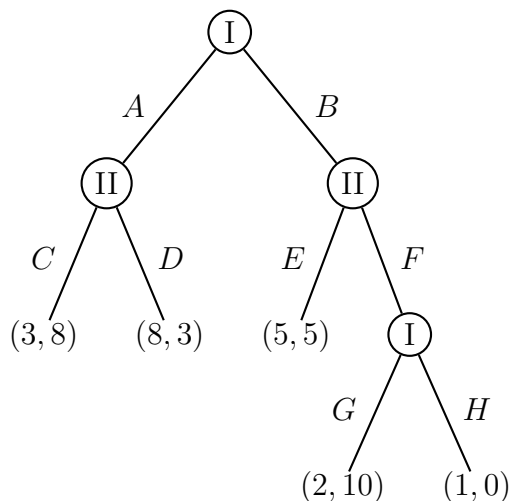
Definicija 3.2.1 (Igra v razširjeni obliki). Igra v razširjeni obliki je osmerka $G = (N, A, H, Z, \chi, \rho, \sigma, u)$, kjer A , H , Z , χ in σ skupaj tvorijo usmerjeno drevo s korenem in kjer je

- A množica akcij, ki predstavlja tudi povezave drevesa;
- H množica odločitvenih (notranjih) vozlišč;

- Z množica končnih vozlišč;
- $\chi : H \mapsto 2^A$ funkcija, ki vsakemu odločitvenemu vozlišču dodeli množico akcij;
- $\sigma : H \times \chi(A) \mapsto H \cup Z$ funkcija, ki vsakemu odločitvenemu vozlišču in akciji dodeli drugo odločitveno ali končno vozlišče;
- N množica n igralcev;
- $\rho : H \mapsto N$ funkcija, ki vsakemu odločitvenemu vozlišču dodeli igralca, ki izbira akcijo na tem vozlišču;
- $u = (u_1, \dots, u_n)$, kjer je $u_i : Z \mapsto \mathbb{R}$ funkcija izkupička igralca i na končnih vozliščih Z .

Čista strategija igralca i igre v razširjeni obliki je seznam akcij, ki jih igralec i izbere; v vsakem vozlišču, ki mu pripada, izbere eno akcijo.

Definicija 3.2.2. Naj bo $G = (N, A, H, Z, \chi, \rho, \sigma, u)$ igra v razširjeni obliki. Potem je čista strategija igralca i kartezični produkt $\prod_{h \in H, \rho(h)=i} \chi(h)$.



Slika 3.2: Igra v razširjeni obliki.

Zgornja definicija je nekoliko nespretna, kajti strategija igralca vsebuje odločitve na vseh vozliščih igralca, tudi na tistih, do katerih se med igro zaradi

ostalih akcij (odločitev) nikoli ne pride. Na primer čisti strategiji igre na sliki 3.2 sta

$$S_1 = \{(A, G), (A, H), (B, G), (B, H)\},$$

$$S_2 = \{(C, E), (C, F), (D, E), (D, F)\}.$$

Ko igralec I enkrat izbere akcijo A , postane vozlišče (G ali H) nepomembno.

	(C, E)	(C, F)	(D, E)	(D, F)
(A, G)	3, 8	3, 8	8, 3	8, 3
(A, H)	3, 8	3, 8	8, 3	8, 3
(B, G)	5, 5	2, 10	5, 5	2, 10
(B, H)	5, 5	1, 0	5, 5	1, 0

Slika 3.3: Igra s slike 3.2 v normalni obliki.

Definiciji najboljšega odgovora in Nashevega ravnovesja sta v igrah razširjene oblike enaki kot v igrah normalne oblike. Pravzaprav je možno iz razširjene oblike igro *prevesti* v normalno obliko. Na sliki 3.3 je igra s slike 3.2 prevedena v normalno obliko. Opazimo lahko, da sta prostora strategij enaka kot tudi Nasheva ravnovesja. Normalna oblika, prevedena iz razširjene, lahko vsebuje odvečno informacijo. Na primer, na sliki 3.3 je 16 različnih izidov, medtem ko jih je na sliki 3.2 samo 5.

3.3 Bayesove igre

Definicija. Do sedaj smo opisovali igre, v katerih so igralci vedeli, kakšno igro igrajo. Natančneje, vedeli so: koliko igralcev igra, katere akcije so na voljo vsakemu igralcu in kakšne so funkcije izkupičkov. Po drugi strani pa obstajajo

igre, ki jim pravimo *Bayesove igre* oziroma *igre z nepopolno informacijo*, v katerih igralci nimajo vseh informacij o igri. Morda jim katera od zgoraj naštetih lastnosti ni znana. Vsako tako igro lahko prevedemo na več iger, ki imajo vse lastnosti enake, le funkcije izkupičkov so drugačne. Igralci imajo neko skupno predznanje o igri. To je pravzaprav verjetnostna porazdelitev nad množico prevedenih iger. Bayesovo igro definiramo podobno kot igro v normalni obliki, le da ji dodamo nov pojem – *tip*, ki vpelje negotovost o funkcijah izkupička.

Definicija 3.3.1. Bayesova igra je peterka (N, A, Θ, p, u) , kjer je:

- N množica n igralcev;
- $A = A_1 \times \cdots \times A_n$ množica akcijskih profilov, kjer je A_i končna množica *akcij*, ki so na voljo igralcu i ;
- $\Theta = \Theta_1 \times \cdots \times \Theta_n$, kjer je Θ_i prostor tipov igralca i ;
- $p : \Theta \mapsto [0, 1]$ je skupno predznanje o tipih;
- $u = (u_1, \dots, u_n)$, kjer je $u_i : A \times \Theta \mapsto \mathbb{R}$ *funkcija izkupička* igralca i .

Predpostavimo, da je vse naštetu v zgornji definiciji znano vsem igralcem. Samo igralec sam pa ve, kateri tip ima. Definicija tipa je nekoliko nejasna. V splošnem je igralčev tip vsa informacija, ki jo igralec ima in ni skupno predznanje.

Analiza igre. Definirajmo najprej prostor strategij igralca v Bayesovi igri. Čista strategija $\alpha_i : \Theta_i \mapsto A_i$ je preslikava, ki vsakemu tipu igralca i priredi akcijo, ki jo igra, če bi imel ta tip. Mešana strategija pa je verjetnostna porazdelitev akcij. Označimo mešano strategijo igralca i z $s_i \in S_i$, kjer je S_i množica vseh mešanih strategij igralca i . S $s_j(a_j | \theta_j)$ pa označimo verjetnost, da igralec j v mešani strategiji s_j igra akcijo a_j , če je njegov tip θ_j .

Podobno kot v igrah v normalni obliki, le da upoštevamo še tipe igralcev, definiramo pričakovani izkupiček.

Definicija 3.3.2. *Pričakovani izkupiček* igralca i v Bayesovi igri (N, A, Θ, p, u) , kjer je njegov tip θ_i in profil mešanih strategij s , je definiran kot

$$EU(s, \theta_i) = \sum_{\theta_{-i} \in \Theta_i} p(\theta_{-i} | \theta_i) \sum_{a \in A} \left(\prod_{j \in N} s_j(a_j | \theta_j) \right) u_i(a, \theta_{-i}, \theta_i).$$

Torej, če želimo izračunati pričakovani izkupiček igralca i , moramo za vsako možno dodelitev tipov ostalim igralcem θ_{-i} in vsak možen profil akcij a izračunati funkcijo izkupička $u_i(a, \theta_{-i}, \theta_i)$ in pri tem upoštevati pogojno verjetnost profila tipov θ_{-i} ostalih igralcev, če ima i tip θ_i , in pogojno verjetnost profila akcij a glede na profil tipov θ .

Sedaj lahko definiramo najboljši odgovor v Bayesovi igri.

Definicija 3.3.3. Množico *najboljših odgovorov* igralca i na profil mešanih strategij s_{-i} definiramo kot

$$BR_i(s_{-i}) = \arg \max_{s_i \in S_i} \sum_{\theta_i \in \Theta_i} p(\theta_i) EU_i((s_i, s_{-i}), \theta_i).$$

Najboljši odgovor BR_i je pravzaprav strategija, ki v povprečju, uteženim z verjetnostmi posameznih tipov igralca i , od vseh strategij igralca i prinaša največji izkupiček. Ker lahko več mešanih strategij prinaša enak izkupiček, je BR_i množica.

V Bayesovih igrah obstaja podoben koncept rešitev, kot obstaja Nashevo ravnovesje pri igrah v normalni obliki. Imenujemo ga Bayes-Nashevo ravnovesje.

Definicija 3.3.4. *Bayes-Nashevo ravnovesje* je profil mešanih strategij s , za katerega velja $\forall i : s_i \in BR_i(s_{-i})$.

Definicija Bayes-Nashevega ravnovesja je pravzaprav enaka definiciji Nashovega ravnovesja. Vsak igralec igra tisto strategijo, ki je najboljši odgovor na strategije ostalih igralcev. Obe ravnovesji se razlikujeta le v definicijah najboljšega odgovora in pričakovenega izkupička. Kljub podobnosti obeh ravnovesij izgleda Bayes-Nashevo ravnovesje bolj zapleteno. Vendar lahko vsako Bayesovo igro prevedemo v normalno obliko, podobno kot smo to naredili za igre v razširjeni obliki. Prevedena normalna oblika Bayesove igre ima akcijo za vsako čisto strategijo. Torej, akcije igralca i so preslikave iz Θ_i v A_i . Izkaže se, da so Bayes-Nasheva ravnovesja v Bayesovi igri natanko taka kot Nasheva ravnovesja v isti igri, prevedeni v normalno obliko. Zato lahko uporabimo Nashev izrek in izrek o minimaksu neposredno za končne Bayesove igre.

V nadaljevanju bomo analizirali Bayesove igre, ki niso končne (prostora tipov obeh igralcev bosta neskončna). Zato zgoraj omenjenih izrekov ne moremo uporabiti na takih igrah. Izkaže pa se, da lahko uporabimo izrek o obstoju ravnovesja [9, 8]. Iz tega sledi, da imajo tudi omenjene igre optimalne strategije.

Poglavje 4

Modeli pokra z zveznimi vrednostmi

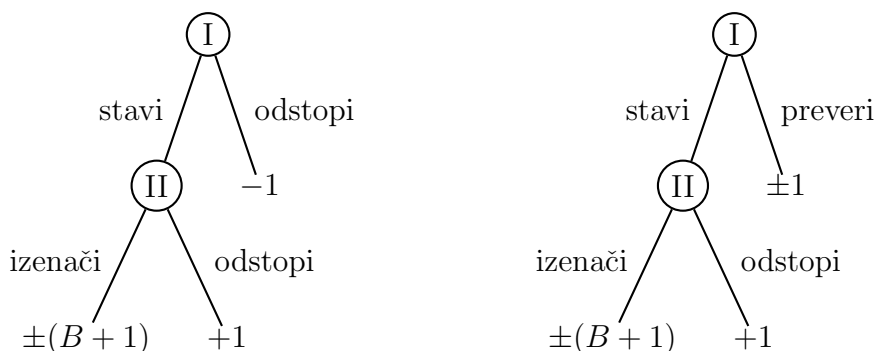
V tem poglavju so opisani modeli pokra z zveznimi vrednostmi, ki so povzeti po [3] in [4].

4.1 Opis modela

Poker z zveznimi vrednostmi je različica pokra podobna različicam s kartami, le da namesto kart igralci prejmejo naključne vrednosti iz nekega intervala. V naših modelih bomo obravnavali poker, ki ga igrata dva igralca. Igralec I prejme vrednost X , kjer je X slučajna spremenljivka, enakomerno porazdeljena na intervalu $[0, 1]$. Na enak način prejme igralec II vrednost Y . Spremenljivka Y je enako porazdeljena kot X . V našem primeru sta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki. Kar pa ne bi veljalo, če bi igralca prejela karte iz končnega kupa kart. Skozi celotno igro igralca poznata svoji vrednosti, vendar ne veta ničesar o vrednosti nasprotnika. Na začetku oba igralca prispevata *začetno stavo (ante)*, ki znaša 1 enoto. V primerjavi z različicami s kartami v tej različici sledi samo en krog stavljenja. Igra se konča, ko so vse stave izenačene ali ko eden od igralcev odstopi. Če pride do razkritja vrednosti, zmaga tisti z višjo vrednostjo. Torej, če velja $X > Y$, potem zmaga igralec I. V nasprotnem primeru je $Y > X$ in zmagovalec je igralec II. Ne obravnavamo pa primera $X = Y$, kajti verjetnost, da imata igralca enaki vrednosti, je enaka 0. Formalno je zgoraj opisani model *Bayesova igra za dva igralca z neskončnim prostorom tipov*.

V zgodovini sta se pojavila dva osnovna modela pokra z zveznimi vrednostmi, ki ju ločimo glede na pravila stavljenja. Prvega je leta 1938 opisal

Borel v knjigi *Application de la théorie des probabilités aux jeux de hasard* [1]. V petem poglavju imenovanem Le jeu de poker je analiziral poker, ki ga poimenuje *La Relance*. V tej igri lahko igralec I (tako na začetku, ko je na vrsti) *odstopi* ali *stavi* B enot, kjer je $B > 0$ določen pred začetkom igre. V slednjem primeru lahko igralec II *izenači* tako, da doda B enot v polog, ali pa *odstopi*. Če igralec II izenači, igralca razkrijeta svoji vrednosti. Zmaga igralec, ki ima višjo vrednost. Ta igralec tudi pobere celotni polog, v katerem sta $2B + 2$ enoti. Torej, eden v igri izgubi $B + 1$ enoto, medtem ko njegov nasprotnik enak znesek zasluži. Če pa kateri od igralcev predčasno odstopi, njegov nasprotnik zasluži 1 enoto – nasprotnikovo začetno stavo.



Slika 4.1: Drevo La Relance (levo) in von Neumannovega modela (desno).

Pravila igre naših modelov najlažje ponazorimo z drevesom igre v razširjeni obliki. Na sliki 4.1 sta prikazani drevesi dveh iger. Vsaka povezava ponazarja odločitev (v splošnem najmanj dve), ki jih ima igralec na razpolago. V listih pa je zapisan zaslužek (oziroma izguba, če je predznak negativen) igralca I. Znak plus–ali–minus pomeni, da je prišlo do razkritja rok. Če je zmagal igralec I, vzamemo pozitiven znak, sicer pa vzamemo negativnega.

Drugo različico, ki je podobna različici La Relance, je analiziral John von Neumann v knjigi *Theory of Games and Economic Behavior* [10], ki sta jo napisala von Neumann in Morgenstern leta 1944. Model, ki ga opisuje von Neumann, se razlikuje od La Relance le v tem, da igralec I nima možnosti (kar je pravzaprav prednost), da odstopi. Namesto tega lahko *preveri*. V tem primeru se obe vrednosti takoj razkrijeta in igralec z višjo vrednostjo pridobi 1 enoto od nasprotnika (glej sliko 4.1).

Nekateri bi označili Borelov model za slabo aproksimacijo pravega pokra s kartami. V takih različicah pokra se namreč po pravilih da igralcu, ki je na vrsti in je prispeval v polog enako kot drugi, možnost, da preveri. Te možnosti Borelov model ne dopušča. Če igralec noče staviti, mora odstopiti. Kljub

temu je večina raziskovalcev raje analizirala razširjen Borelov model kot von Neumannovega.

V nadaljevanju bomo podrobneje analizirali La Relance, von Neumannov model in nekatere njune razširitve. Za vsak model bomo poiskali optimalne (minmaks oz. maksmin) strategije ter vrednost igre. Podobne analize so predstavljene tudi v [2, 6].

4.2 La Relance

V prejšnjem razdelku smo opisali pravila igre La Relance. V tem razdelku pa bomo podrobneje analizirali strategije obeh igralcev.

Pri iskanju optimalnih strategij si je s stališča trenutne igralčeve odločitve koristno predstavljati enote, ki smo jih pred tem vložili v polog, kot nepovratne stroške. Torej trenutni polog ne pripada nobenemu od igralcev. Na ta način in s *principom indiferentnosti* si pomagamo pri iskanju optimalnih rešitev.

Za igralca II ni težko ugotoviti, kakšna je njegova optimalna strategija. Za neki $c \in [0, 1]$ se mu najbolj splača izenačiti, kadar je njegova vrednost $Y > c$, in odstopiti, če je $Y < c$. Kajti po njegovi potezi se bo igra končala. Če se II odloči za izenačenje, naj to naredi z najvišjimi vrednostmi. Če se odloči za odstop, pa je optimalno, da to naredi z nizkimi vrednostmi. Torej njegova optimalna strategija je čista. Igralec II želi c izbrati tako, da bo igralec I, kadar ima vrednost $X < c$, indiferenten med tem, da stavi, in med tem, da odstopi. Torej, kadar I stavi s takim X , zasluži 2 enoti, če ima II $Y < c$ (II odstopi). Če pa ima II $Y > c$, I izgubi B enot (njegova vrednost je nižja od nasprotnikove pri razkritju vrednosti). Po drugi strani pa nič ne pridobi in nič ne izgubi, če odstopi. Igralec I je indiferenten med stavo in odstopom, če velja $2c - B(1 - c) = 0$. Iz česar sledi, da velja $c = \frac{B}{B+2}$. To je edina optimalna strategija za igralca II.

Predpostavimo, da ima igralec I mešano strategijo naslednje oblike: če ima $X > c$, potem vedno stavi; če pa ima $X < c$, potem se odloči, ali bo stavil ali odstopil. Naj ϕ označuje razmerje med stavami in odstopi, kadar je $X < c$. Podobno kot smo izračunali mejno vrednost c , želimo s pomočjo principa indiferentnosti izračunati ϕ . Igralec I želi izbrati tak ϕ , da bo igralec II indiferenten med izenačenjem in odstopom, kadar ima $Y = c$. Če II izenači, ko ima $Y = c$, zasluži $B + 2$ z verjetnostjo $P(X < c \mid \text{I stavi})$ in izgubi B z verjetnostjo $P(X > c \mid \text{I stavi})$. Torej, če II izenači, je njegov pričakovani zaslužek enak

$$P(X < c \mid \text{I stavi})(B + 2) - P(X > c \mid \text{I stavi})B.$$

S pomočjo Bayesovega izreka izračunamo:

$$P(X < c \mid \text{I stavi}) = \frac{P(X < c)P(\text{I stavi} \mid X < c)}{P(\text{I stavi})} = \frac{c\phi}{c\phi + (1 - c)}.$$

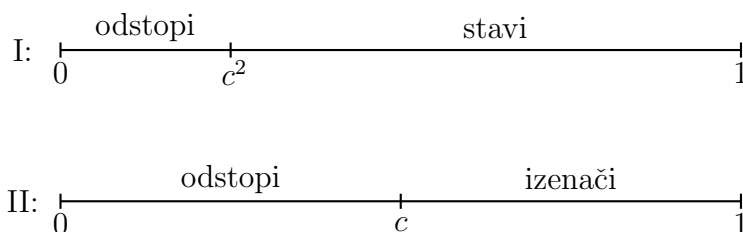
Iz tega sledi, da je

$$P(X > c \mid \text{I stavi}) = \frac{1 - c}{c\phi + (1 - c)}.$$

Če odstopi, pa ne dobi nič. Torej, igralec II je indiferenten, kadar velja

$$(B + 2)c\phi - B(1 - c) = 0.$$

Rešitev enačbe je $\phi = 1 - c = 2/(B + 2)$. Igralec I lahko igra poljubno z vrednostmi $X < c$, vendar mora imeti razmerje stav in odstopov enako ϕ . Na primer, lahko stavi z najnižjimi vrednostmi $0 < X < c - c^2$ in odstopi z $c - c^2 < X < c$ ali pa stavi z vrednostmi $c^2 < X < c$ in odstopi z ostalimi. Slednja strategija šibko dominira prejšnjo, kajti igralec II morda ne igra optimalno in izenačuje z vrednostmi, ki so nekoliko manjše kot c . Z drugo strategijo bo igralec I zmagal nekoliko več iger, medtem ko bo s prvo strategijo zmagal enako število iger, kot če igralec II ne bi delal take napake. Igralcu I se najbolj splača igrati strategijo, po kateri stavi, če je $X > c^2$, in odstopi sicer. Ta strategija je namreč edina dopustna optimalna strategija. V nadaljevanju bomo zaradi dopustnosti in preprostosti za optimalno strategijo vzeli slednjo.



Slika 4.2: Optimalni strategiji igre La Relance.

Za predpostavljene optimalni strategiji je potrebno dokazati, da sta zares optimalni. To naredimo tako, da dokažemo, da je strategija igralca I najboljši odgovor na strategijo igralca II in obratno. Za vsako akcijo igralca I je potrebno izračunati pričakovani izkupiček proti optimalni strategiji igralca II.

Nato pa preveriti, ali optimalna strategija za vsak X zahteva igranje akcije, ki ima največji pričakovani izkupiček. Denimo, da igralec I prejme vrednost x . Če igralec I odstopi, ima pričakovani izkupiček (tu ne upoštevamo začetne stave kot vložka) enak

$$v_{od}^I(x) = 0.$$

Če pa stavi, ima pričakovani izkupiček enak

$$\begin{aligned} v_{st}^I(x) &= \begin{cases} 2c - B(1 - c), & x \leq c \\ 2c + (B + 2)(x - c) - B(1 - x), & x \geq c \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & x \leq c \\ 2c + (B + 2)(x - c) - B(1 - x), & x \geq c. \end{cases} \end{aligned}$$

Opazimo lahko, da je akcija stavi najboljša za vsak x . Akcija odstopi pa je najboljša za vsak $x \in [0, c]$. Zato je optimalna strategija igralca I zares najboljša za vsak x .

Predpostavimo, da igralec I stavi in igralec II prejme vrednost y . Pokažimo, da je optimalna strategija igralca II najboljši odgovor na optimalno strategijo igralca I. Če II odstopi, je njegov pričakovani izkupiček enak

$$v_{od}^{II}(y) = 0.$$

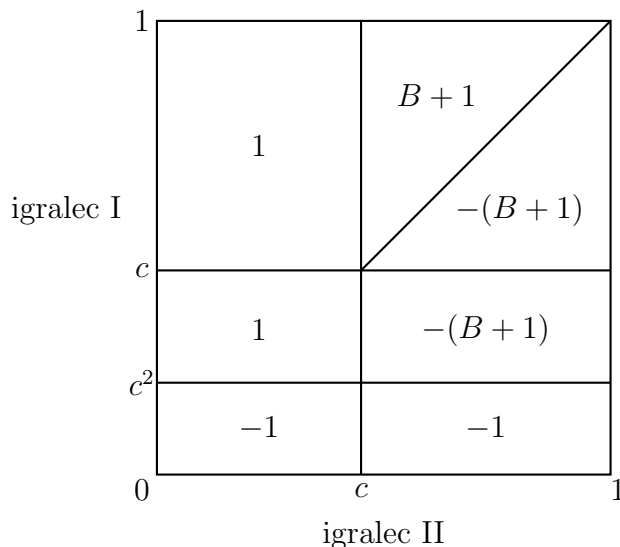
Če pa izenači, je njegov pričakovani izkupiček enak

$$v_{iz}^{II}(y) = \begin{cases} -B, & y \leq c^2 \\ (B + 2)(y - c^2)/(1 - c^2) - B(1 - y)/(1 - c^2), & y \geq c^2. \end{cases}$$

Kratek izračun pokaže, da je pri vrednostih $y < c$ najboljša akcija odstopi, pri vrednostih $y > c$ pa je najboljša akcija izenači. To je v skladu z optimalno strategijo igralca II.

Iz optimalnih strategij obeh igralcev lahko izračunamo vrednost igre. S pomočjo slike 4.3 lahko izračunamo pričakovane izkupičke igralca I, ki so prikazani v spodnji tabeli (upoštevana je tudi začetna stava):

Izid	Verjetnost	Izkupiček
I odstopi	$p_1 = c^2$	$\alpha_1 = -1$
I stavi, II izenači, I zmaga	$p_2 = \frac{(1-c)^2}{2}$	$\alpha_2 = B + 1$
I stavi, II izenači, II zmaga	$p_3 = (1 - c)^2(\frac{1}{2} + c)$	$\alpha_3 = -(B + 1)$
I stavi, II odstopi	$p_4 = (1 - c^2)c$	$\alpha_4 = +1$



Slika 4.3: Diagram izkupičkov igre La Relance.

Torej je vrednost igre oziroma pričakovani izkupiček igralca I enak

$$\begin{aligned}
 V(B) &= \sum_{i=1}^4 p_i \alpha_i \\
 &= -c^2 + \frac{(1-c)^2}{2}(B+1) + (1-c)^2\left(\frac{1}{2} + c\right)(-B-1) + (1-c^2)c.
 \end{aligned}$$

V izraz vstavimo $B = \frac{2c}{1-c}$ in dobimo:

$$V(B) = -c^2 = -\frac{B^2}{(B+2)^2}. \quad (4.1)$$

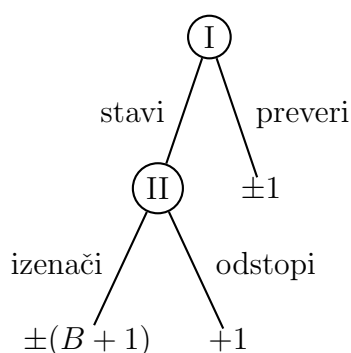
Ker je predznak negativen, ima prednost igralec II. Zanimivo je, da igralec I pridela vso izgubo, ko odstopa. V ostalih primerih pa je njegov pričakovani izkupiček enak nič.

Sedaj pa pogledajmo, za katere $B > 0$ je igra najbolj ugodna za oba igralca.

- Igralec I doseže svoj maksimalni izkupiček, ko gre $B \searrow 0$. V tem primeru gre $V(B) \nearrow 0$. Pravzaprav je maksimum dosežen pri $B = 0$. Vendar zahtevamo, da je $B > 0$, če ne taka igra ne bi imela smisla.
- Igralec II doseže svoj maksimalni izkupiček, ko izraz (4.1) doseže svoj minimum. To pa se zgodi, ko gre $B \rightarrow \infty$. Takrat gre $V(B) \searrow -1$.

4.3 Von Neumannov model

Pravila von Neumannovega modela so podobna pravilom La Relance, a z eno samo, vendar pomembno razliko. Igralec I lahko preveri, ko je na potezi, namesto da odstopi. Če se odloči za preverjanje, se vrednosti takoj razkrijeta in zmaga igralec z višjo vrednostjo. Zaradi te lastnosti je von Neumannov model bolj podoben različicam pokra s kartami. Ostala možna konca igre sta: igralec I stavi, igralec II pa izenači ali odstopi (kot je prikazano na sliki 4.4).



Slika 4.4: Drevo von Neumannovega modela.

Predpostavimo, da ima v tem modelu igralec I čisto optimalno strategijo. Ta strategija (poimenujmo jo S_I) naj bo oblike: za $a, b \in [0, 1]$, $a < b$, I preveri, če ima $a < X < b$, in stavi sicer. Predpostavimo, da ima igralec II več optimalnih strategij, vendar ena šibko dominira ostale. Ta strategija (poimenujmo jo S_{II}) je zelo preprosta: za neki $c \in [0, 1]$ II izenači, če je $Y > c$, in odstopi sicer. Izkaže se, da velja $0 < a < c < b < 1$. Obe strategiji sta prikazani na sliki 4.5.

Strategija S_I se ne zdi preveč intuitivna. Zakaj bi vložil v igro B enot z najslabšimi vrednostmi in nobene enote z malo boljšimi vrednostmi? Kadar I preveri, želi namreč imeti pri razkritju vrednosti čim višjo vrednost. Z vrednostmi $X < a$ bo I imel slabe možnosti za zmago pri razkritju. Zato igralec I stavi z najslabšimi vrednostmi $X < a$ z namenom, da osvoji polog brez razkritja. Temu konceptu pravimo *varanje* (*bluffing*). Po drugi strani pa I stavi z najboljšimi vrednostmi $X > b$. V tem primeru si želi zmagati tako, da bo II izenačil in izgubil pri razkritju. Temu konceptu pravimo *vrednostna stava* (*value betting*). To sta dva od najosnovnejših konceptov pri pokru. Zaradi takšnega načina stavljenja je igralec II vedno v enakem položaju, ko ima vrednost $a < Y < b$: ne ve, ali I vara ($X < a$) ali vrednostno stavi ($X > b$). Zato II nima ene same optimalne strategije. Ostale optimalne strategije so: na

nič. V tem primeru je njegov pričakovani izkupiček enak $2b$. Če pa stavi, dobi 2, kadar je $Y < c$; dobi $B + 2$, kadar je $c < Y < b$; in izgubi B , kadar je $Y > b$. Iz česar sledi, da je njegov pričakovani izkupiček $2c + (B + 2)(b - c) - B(1 - b)$, kadar stavi. Torej, igralec II je indiferenten, če velja

$$2b = 2c + (B + 2)(b - c) - B(1 - b),$$

kar se poenostavi v

$$2b - c = 1. \quad (4.4)$$

Rešitev sistema enačb (4.2)–(4.4) so vrednosti a , b in c izražene z B . Prikazane so v naslednjem izreku.

Izrek 4.3.1. *Optimalna strategija S_I igralca I je preveriti, kadar je $a < X < b$, in staviti sicer, kjer je*

$$a = \frac{B}{(B + 1)(B + 4)} \quad \text{in} \quad b = \frac{B^2 + 4B + 2}{(B + 1)(B + 4)}. \quad (4.5)$$

Optimalna strategija S_{II} igralca II je izenačiti, kadar je $Y > c$, in odstopiti sicer, kjer je

$$c = \frac{B(B + 3)}{(B + 1)(B + 4)}. \quad (4.6)$$

Vrednost von Neumannovega modela (pričakovani izkupiček igralca I) je

$$V(B) = \frac{B}{(B + 1)(B + 4)}. \quad (4.7)$$

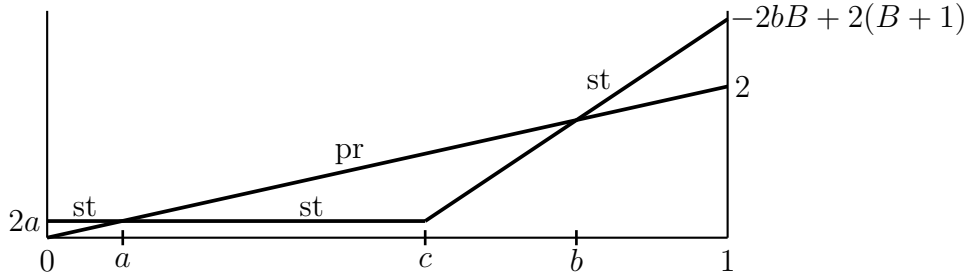
Dokaz. Z reševanjem sistema indiferenčnih enačb smo sicer poiskali vrednosti a , b in c za S_I in S_{II} , vendar s tem še nismo dokazali izreka. Če želimo dokazati izrek, moramo pokazati, da sta optimalni strategiji v Bayes-Nashevem ravnovesju. To pomeni, da je strategija S_I najboljši odgovor na strategijo S_{II} in obratno. Najprej poiščemo pričakovane izkupičke za vse možne akcije igralca I proti strategiji S_{II} . Recimo, da igralec I dobi vrednost x .

- Če I stavi, potem je njegov pričakovani izkupiček:

$$\begin{aligned} v_{st}^I(x) &= \begin{cases} 2c - B(1 - c), & 0 \leq x \leq c \\ 2c - B(1 - x) + (B + 2)(x - c), & c \leq x \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2a, & 0 \leq x \leq c \\ -2bB + 2(B + 1)x, & c \leq x \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

- Če I preveri, potem je njegov pričakovani izkupiček:

$$v_{pr}^I(x) = 2x.$$



Slika 4.6: Pričakovani izkupički igralca I proti S_{II} .

Na sliki 4.6 se za vsak x lepo vidi, katera odločitev ima maksimalen pričakovani izkupiček. Iz tega sledi, da je S_I res najboljši odgovor na S_{II} .

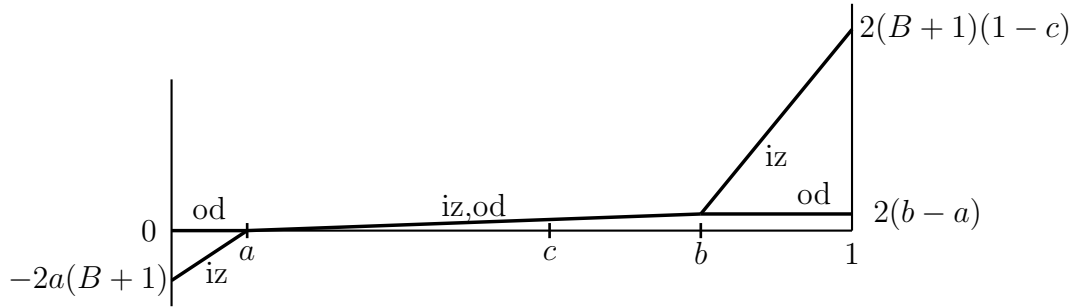
Sedaj pa poiščimo še pričakovane izkupičke vseh odločitev igralca II. Igralec II dobi vrednost y . Igra se konča takoj, ko igralec I preveri. Igralec II pa se odloči, kako bo odigral takoj, ko dobi vrednost. Zato obravnavamo možnosti, ko I stavi ali preveri, skupaj. Recimo, da igralec II dobi vrednost y .

- Če II odstopi, potem je njegov pričakovani izkupiček:

$$v_{od}^{II}(y) = \begin{cases} 0, & 0 \leq y \leq a \\ 2(y - a), & a \leq y \leq b \\ 2(b - a), & b \leq y \leq 1. \end{cases}$$

- Če II izenači, potem je njegov pričakovani izkupiček:

$$\begin{aligned} v_{iz}^{II}(y) &= \begin{cases} -B(1 - b) + (B + 2)y - B(a - y), & 0 \leq y \leq a \\ -B(1 - b) + (B + 2)a + 2(y - a), & a \leq y \leq b \\ (B + 2)a + (B + 2)(y - b) - B(1 - y) + 2(b - a), & b \leq y \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2(B + 1)(y - a), & 0 \leq y \leq a \\ 2(y - a), & a \leq y \leq b \\ 2(B + 1)(y - c), & b \leq y \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Slika 4.7: Pričakovani izkupički igralca II proti S_I .

Igralec II ima na voljo več strategij, ki vse prinašajo maksimalen pričakovani izkupiček proti S_I . Če dobi $a < y < b$, je njegov pričakovani izkupiček enak ne glede na to, ali izenači, odstopi ali pa uporabi kakšno mešano strategijo. Ampak ni nujno vsaka taka strategija optimalna. Kajti igralec I bi lahko na katero od teh strategij odgovoril z neko strategijo, ki ni optimalna, in tako porušil Bayes-Nashevo ravnovesje.

Vrednost igre je enaka pričakovanemu izkupičku igralca I. Ta pa je enak ploščini pod najvišjimi črtami na sliki 4.6, ki predstavljajo optimalno strategijo, zmanjšani za ena – vrednost začetne stave:

$$\begin{aligned}
 V^I(B) &= \int_0^1 (\max\{v_{st}^I(x), v_{pr}^I(x)\} - 1) dx \\
 &= \int_0^a 2a dx + \int_a^b 2x dx + \int_b^1 (-2bB + 2(1+B)x) dx - \int_0^1 1 dx \\
 &= a = \frac{B}{(B+1)(B+4)}.
 \end{aligned}$$

Za igralca II lahko s pomočjo slike 4.7 izračunamo pričakovani izkupiček in seveda dobimo enak rezultat, le da z negativnim predznakom:

$$\begin{aligned}
 V^{II}(B) &= \int_0^1 (\max\{v_{od}^{II}(y), v_{iz}^{II}(y)\} - 1) dy \\
 &= \int_0^a 0 dy + \int_a^b 2(y-a) dy + \int_b^1 2(1+B)(y-c) dy - \int_0^1 1 dy \\
 &= -a = -\frac{B}{(B+1)(B+4)}.
 \end{aligned}$$

□

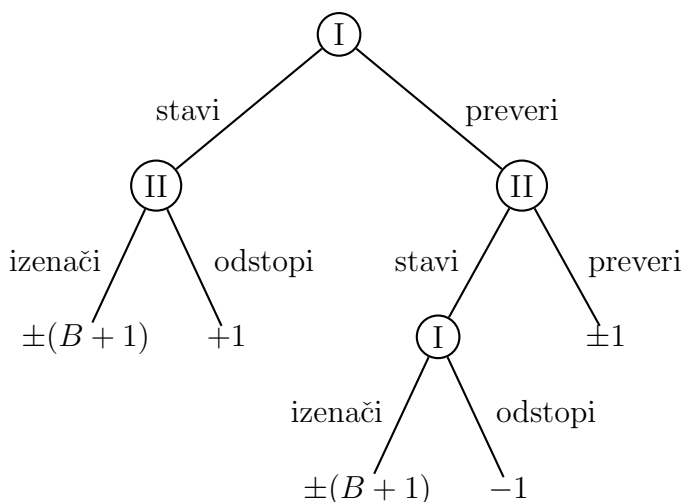
V primerjavi z igro La Relance je za vsak B v prednosti igralec I. Deloma zato, ker igralec II nima možnosti stave, če igralec I preveri. V nadaljevanju bomo obravnavali tudi model, kjer ima igralec II to možnost.

Poglejmo si še, za katere vrednosti B je igra najbolj ugodna za posameznega igralca:

- Maksimalni izkupiček igralca I izračunamo tako, da poiščemo točke (ekstreme), pri katerih funkcija (4.7) doseže maksimum. Ekstreme funkcije poiščemo s pomočjo odvajanja funkcije. Igralec I zasluži največ pri $B = 2$. Vrednost igre za tak B je $\frac{1}{9}$. Velikost stave $B = 2$ je ravno velikost pologa v trenutku, ko je na vrsti igralec I. V tem primeru pravimo, da je igralec stavil polog.
- Igralec II doseže svoj maksimalni izkupiček, ko je izraz (4.7) minimalen. To pa se zgodi, ko gre $B \searrow 0$ ali $B \rightarrow \infty$. Takrat gre $V(B) \searrow 0$.

4.4 Model z eno stavo

V tem modelu, ki je razširitev von Neumannovega modela, ima igralec II možnost, da stavi, če igralec I preveri. Če II stavi, je zopet na potezi I. Ta lahko odstopi ali izenači. Torej model dopušča eno stavo velikosti B enot. Ostala pravila so enaka kot pri von Neumannovem modelu. Igralca najprej vložita začetno stavo in dobita neodvisni vrednosti z intervala $[0, 1]$. Nato se igra odvija, kot je prikazano na sliki 4.8.



Slika 4.8: Drevo modela z eno stavo.

Glede na vrednost X se igralec I odloči za eno od treh akcij: lahko stavi (st), preveri-odstopi (p-o) ali preveri-izenači (p-i). V slednjih dveh primerih sicer ni nujno, da bo igralec II stavil, vendar se v primeru, da preveri, igra takoj konča. Pravzaprav smo naredili prevedbo iz razširjene oblike v normalno. Nato pa odstranili akcije, ki se ne morejo zgoditi (npr. stavi-odstopi). Podobno naredimo za igralca II, ki ima na voljo štiri akcije: izenači-stavi, izenači-preveri, odstopi-stavi, odstopi-preveri. Vendar te akcije obravnavamo ločeno, glede na odločitev igralca I.

Predpostavimo, da ima igralec I optimalno strategijo S_I . Strategija S_I razdeli enostski interval na štiri intervale. Če prejme vrednost iz najnižjega intervala $(0, a)$, stavi z namenom varanja. Če igralec I prejme vrednost iz drugega intervala (a, b) , preveri-odstopi. Njegova vrednost je dokaj slaba, zato ne želi več vlagati v polog. Želi pa si, da bo igralec II preveril z nižjo vrednostjo. Na tretjem intervalu (b, c) preveri-izenači. Njegova vrednost je dovolj visoka za razkritje vrednosti. Na zadnjem intervalu $(c, 1)$ spet stavi. Želi si osvojiti čim večji polog.

Predpostavimo, da ima igralec II optimalno strategijo S_{II} . Ta strategija, v primeru, ko I stavi, vsebuje dve akciji. Z nizkimi vrednostmi iz intervala $(0, d)$ odstopi. Te vrednosti so prenizke, da bi se mu splačalo priti do razkritja vrednosti. Višje vrednosti iz intervala $(d, 1)$ pa so dovolj visoke, zato s takimi vrednostmi izenači. Če igralec I preveri, je strategija igralca II naslednja: na nižjem intervalu $(0, e)$ stavi z namenom varanja; z vrednostmi iz intervala (e, f) preveri; z najvišjimi vrednostmi iz intervala $(f, 1)$ pa stavi.

Na sliki 4.9 sta prikazani optimalni strategiji obeh igralcev.

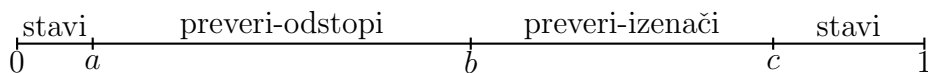
Podobno kot pri ostalih modelih bomo tudi tu s pomočjo principa indiferentnosti poiskali šest indiferenčnih enačb. Z reševanjem sistema teh enačb bomo izračunali vrednosti mejnih točk. Spet predpostavimo, da trenutni polog (pred odločitvijo) ne pripada nikomur. S tem si poenostavimo izpeljevanje indiferenčnih enačb. Predpostavimo, da velja $a < e < b < f < c$ in $a < d < c$. Označimo višino stave z $B > 0$.

1. Indiferenčna enačba za igralca I v točki a :

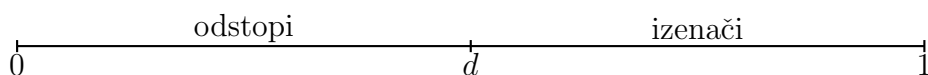
Akcija	Pričakovani izkupiček	Verjetnost
I stavi	2	d
I stavi	$-B$	$1 - d$
I preveri-odstopi	0	1

$$2d - B(1 - d) = 0.$$

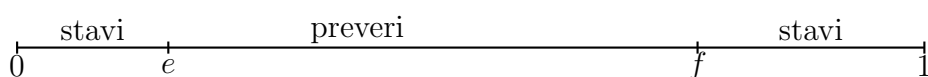
Igralec I:



Igralec II, če I stavi:



Igralec II, če I preveri:



Slika 4.9: Optimalni strategiji modela z eno stavbo.

2. Indiferenčna enačba za igralca I v točki b :

Akcija	Pričakovani izkupiček	Verjetnost
I preveri-odstopi	2	$b - e$
I preveri-odstopi	0	$1 - b + e$
I preveri-izenači	$B + 2$	e
I preveri-izenači	2	$b - e$
I preveri-izenači	0	$f - b$
I preveri-izenači	$-B$	$1 - f$

$$(2 + B)e - B(1 - f) = 0$$

3. Indiferenčna enačba za igralca I v točki c :

Akcija	Pričakovani izkupiček	Verjetnost
I preveri-izenači	$B + 2$	$e + c - f$
I preveri-izenači	2	$f - e$
I preveri-izenači	$-B$	$1 - c$
I stavi	2	d
I stavi	$B + 2$	$c - d$
I stavi	$-B$	$1 - c$

$$e + d - f = 0$$

4. Indiferenčna enačba za igralca II v točki d (igralec I stavi):

Akcija	Pričakovani izkupiček	Verjetnost
II odstopi	0	1
II izenači	$B + 2$	$a/(a + 1 - c)$
II izenači	$-B$	$(1 - c)/(a + 1 - c)$

$$(B + 2)a - B(1 - c) = 0$$

5. Indiferenčna enačba za igralca II v točki e (igralec I preveri):

Akcija	Pričakovani izkupiček	Verjetnost
II stavi	2	$(b - a)/(c - a)$
II stavi	$-B$	$(c - b)/(c - a)$
II preveri	2	$(e - a)/(c - a)$
II preveri	0	$(c - e)/(c - a)$

$$2(b - e) - B(c - b) = 0$$

6. Indiferenčna enačba za igralca II v točki f (igralec I preveri):

Akcija	Pričakovani izkupiček	Verjetnost
II preveri	2	$(f - a)/(c - a)$
II preveri	0	$(c - f)/(c - a)$
II stavi	2	$(b - a)/(c - a)$
II stavi	$B + 2$	$(f - b)/(c - a)$
II stavi	$-B$	$(c - f)/(c - a)$

$$2f - b - c = 0$$

Rešitev sistema indiferenčnih enačb je podana v naslednjem izreku.

Izrek 4.4.1. *Optimalna strategija S_I igralca I je preveriti-odstopiti, kadar je $a < X < b$, preveriti-izenačiti, kadar je $b < X < c$, in staviti sicer, kjer je*

$$a = \frac{2B}{(B + 2)^2(B + 1)}, \quad b = \frac{B}{B + 2} \quad \text{in} \quad c = \frac{B(B + 3)}{(B + 2)(B + 1)}. \quad (4.8)$$

Kadar igralec I stavi, je optimalna strategija S_{II} igralca II izenačiti, kadar je $Y > d$, in odstopiti sicer, kjer je

$$d = \frac{B}{B + 2}. \quad (4.9)$$

Kadar igralec I preveri, je optimalna strategija S_{II} igralca II preveriti, kadar je $e < Y < f$, in odstopiti sicer, kjer je

$$e = \frac{B}{(B+2)(B+1)} \quad \text{in} \quad f = \frac{B}{B+1}. \quad (4.10)$$

Vrednost modela z eno stavo (pričakovani izkupiček igralca I) je

$$V(B) = -de = \frac{-B^2}{(B+2)^2(B+1)}. \quad (4.11)$$

Dokaz. Da dokažemo optimalnost obeh strategij, moramo pokazati, da sta obe strategiji najboljši odgovor druga na drugo. Najprej pokažemo, da je S_I najboljši odgovor na S_{II} . Za vsako akcijo igralca I izračunamo pričakovani izkupiček. Ta je odvisen od vrednosti x . Če igralec I stavi, potem je njegov pričakovani izkupiček enak

$$v_{st}^I(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq d \\ 2(B+1)(x-d), & d \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Če igralec I preveri-odstopi, potem je njegov pričakovani izkupiček enak

$$v_{p-o}^I(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq e \\ 2(x-e), & e \leq x \leq f \\ 2(f-e), & f \leq x \leq 1. \end{cases}$$

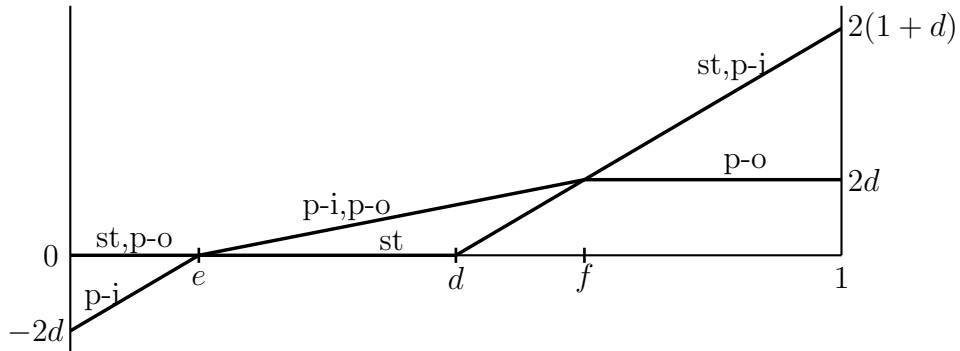
Če igralec I preveri-izenači, potem je njegov pričakovani izkupiček enak

$$v_{p-i}^I(x) = \begin{cases} 2(B+1)(x-e), & 0 \leq x \leq e \\ 2(x-e), & e \leq x \leq f \\ 2(B+1)(x-d), & f \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Pričakovani izkupiček S_I je v vsaki točki x enak maksimumu zgornjih funkcij (glej sliko 4.10). Pri poenostavitvah smo upoštevali, da velja $d = e(B+1)$ in $d = f - e$.

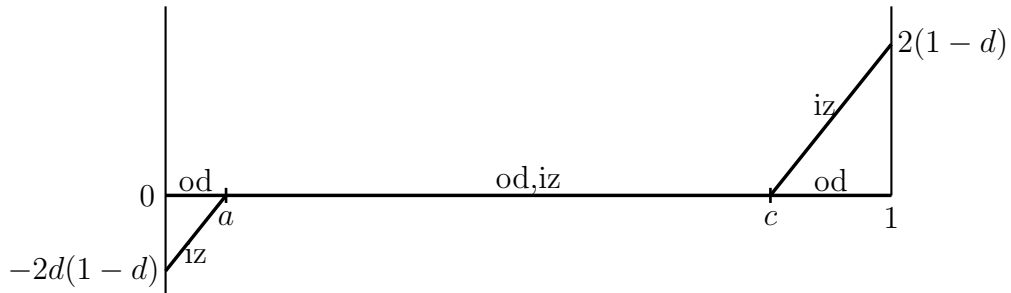
Preverimo še, ali je strategija S_{II} najboljši odgovor na S_I . Odvisno od tega, ali igralec I stavi ali preveri, ločimo dve možnosti. Naj igralec II prejme vrednost y . Če I stavi, potem je pričakovani izkupiček igralca II, če ta odstopi, enak

$$v_{od}^{II}(y) = 0.$$

Slika 4.10: Pričakovani izkupički igralca I proti S_{II} .

Če I stavi in II izenači, je pričakovani izkupiček igralca II enak

$$v_{iz}^{II}(y) = \begin{cases} 2(B+1)(y-a), & 0 \leq y \leq a \\ 0, & a \leq y \leq c \\ 2(B+1)(y-c), & c \leq y \leq 1. \end{cases}$$

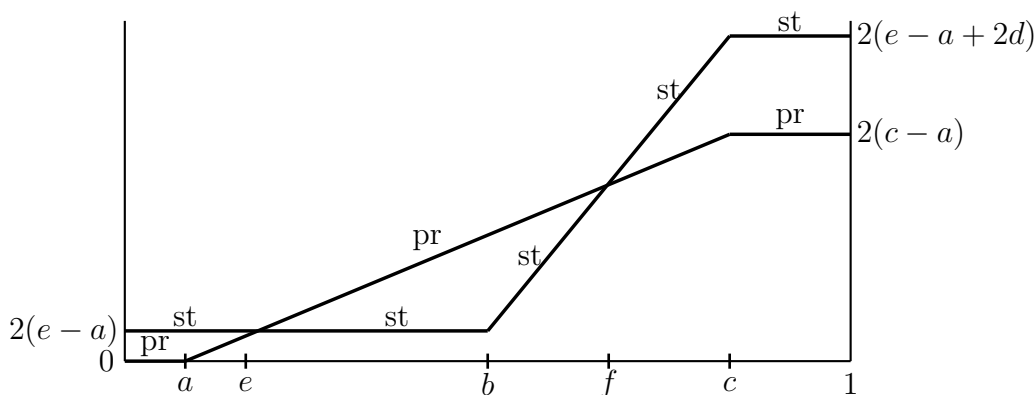
Slika 4.11: Pričakovani izkupički igralca II proti S_I , če I stavi.

Naj II prejme vrednost y in naj I preveri. Če II stavi, potem je njegov pričakovani izkupiček enak

$$v_{st}^{II}(y) = \begin{cases} 2(e-a), & 0 \leq y \leq b \\ 2(e-a) + 2(B+1)(y-b), & b \leq y \leq c \\ 2(e-a) + 2(B+1)(c-b), & c \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Če pa II preveri, je njegov pričakovani izkupiček enak

$$v_{pr}^{II}(y) = \begin{cases} 0, & 0 \leq y \leq a \\ 2(y-a), & a \leq y \leq c \\ 2(c-a), & c \leq y \leq 1. \end{cases}$$



Slika 4.12: Pričakovani izkupički igralca II proti S_I , če I preveri.

Vrednost igre izračunamo tako, da izračunamo pričakovani izkupiček igralca I. Ta je enak ploščini pod najvišjimi črtami s slike 4.10, zmanjšani za začetno stavo:

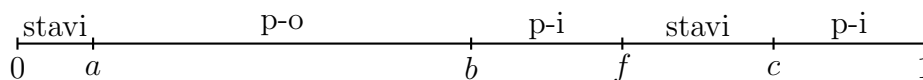
$$\begin{aligned}
 V(B) &= \int_0^1 (\max\{v_s^I(x), v_{p-o}^I(x), v_{p-i}^I(x)\} - 1) dx \\
 &= \int_0^e 0 dx + \int_e^f 2(x - e) dx + \int_f^1 2(B + 1)(x - d) dx - \int_0^1 1 dx \\
 &= -de = \frac{-B^2}{(B + 1)(B + 2)^2}.
 \end{aligned}$$

Enak rezultat z različnim predznakom bi dobili, če bi zgornji postopek ponovili za igralca II. \square

Strategija S_I iz izreka 4.4.1 ni edina optimalna strategija. Obstaja še ena optimalna strategija S'_I , ki je prikazana na sliki 4.13. Izkaže se, da sta obe strategiji dopustni. Razlika med njima s stališča optimalnosti se pokaže šele, ko razširimo model tako, da sta stavi igralcev različno veliki. Označimo z B_1 stavo igralca I in z B_2 stavo igralca II. Podobno kot prej lahko dokažemo, da če je $B_1 > B_2$, potem je optimalna strategija igralca I iste oblike kot S_I . Če pa je $B_2 > B_1$, potem je optimalna strategija iste oblike kot S'_I .

Igra z eno stavo je ugodnejša za igralca II za vsak $B > 0$. Če je velikost stave $B = 2$ (stava velikosti pologa), je vrednost igre $V(2) = -1/12$. Poglejmo si še, za katere vrednosti B je igra najbolj ugodna za posameznega igralca:

- Igralec I doseže svoj maksimalni izkupiček, ko je izraz (4.11) maksimalen. To pa se zgodi, ko gre $B \searrow 0$ ali $B \rightarrow \infty$. Takrat gre $V(B) \nearrow 0$.

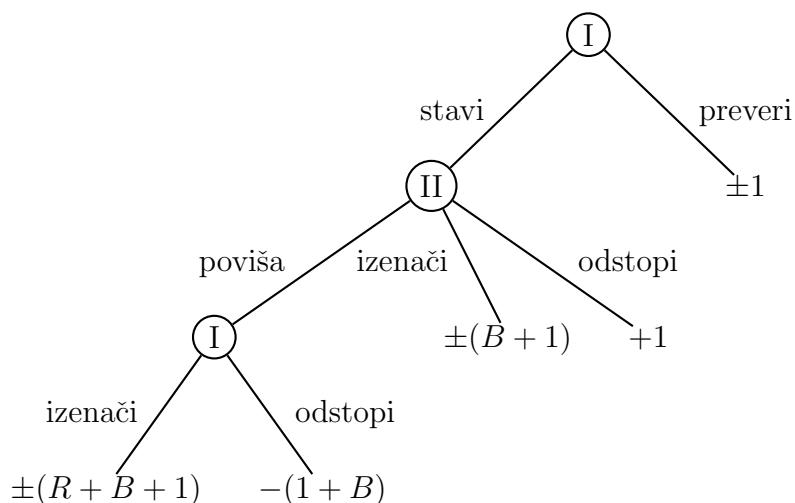


Slika 4.13: Alternativna dopustna optimalna strategija igralca I.

- Igralec II doseže svoj maksimalni izkupiček pri $B = 1 + \sqrt{5}$. Takrat je izraz (4.11) minimalen. Vrednost igre za tak B je $-\frac{1}{2}(11 - 5\sqrt{5}) \approx -0.0902$.

4.5 Von Neumannov model s povišanjem

Podobno kot v von Neumannovem modelu na začetku oba igralca prispevata začetno stavo in prejmeta neodvisni vrednosti iz intervala $[0, 1]$. Prvi je na potezi igralec I, ki preveri ali stavi $B > 0$. Če preveri, potem oba igralca razkrijeta vrednosti. Igralec z višjo vrednostjo zmagaja. Če igralec I stavi, ima nato igralec II tri možnosti. Enako kot v von Neumannovem modelu lahko odstopi ali izenači. Ta model pa dopušča igralcu II še možnost, da poviša stavo igralca I za (pred igro določenih) R enot. V tem primeru igralec II prispeva $B + R$ enot. Če igralec II poviša, se igralec I odloči, ali bo odstopil ali izenačil. Slika 4.14 prikazuje drevo modela.



Slika 4.14: Drevo von Neumannovega modela s povišanjem.

Podobno kot v prejšnjih modelih prevedemo akcije v normalno obliko. Pri tem izločimo sestavljene akcije, ki se nikoli ne zgodijo (npr. preveri-odstopi pri

2. Igralec I je indiferenten v točki b , če velja:

$$2Bb + (B + 2)d - 2(B + 1)e = B.$$

3. Igralec I je indiferenten v točki c , če velja:

$$-(R + 2B + 2)(e - d) + Rf = R.$$

4. Igralec II je indiferenten v točki d , če velja:

$$(B + 2)(a - b) + (R + 2B + 2)c = R + B.$$

5. Igralec II je indiferenten v točki e , če velja:

$$-2(B + 1)b + (R + 2B + 2)c = R.$$

6. Igralec II je indiferenten v točki f , če velja:

$$f = (1 + c)/2.$$

Rešitev zgornjega sistema enačb so vrednosti a, b, c, d, e, f , izražene z B in R . Prikazane so v naslednjem izreku.

Izrek 4.5.1. *Naj bo*

$$K = B(B + 4)(R + 2B + 2)^2 + (B + 1)(B + 2)^2R.$$

Optimalna strategija S_I igralca I je staviti-odstopiti, kadar je $0 < X < a$ ali $b < X < c$, preveriti, kadar je $a < X < b$, in staviti-izenačiti, kadar je $c < X < 1$, kjer je

$$a = \frac{B^2(R + 2B + 2)^2}{(B + 1)K}, \quad b = 1 - \frac{(B + 2)a}{B} \quad \text{in} \\ c = 1 - \frac{2B(B + 2)(R + 2B + 2)}{K}. \quad (4.12)$$

Optimalna strategija S_{II} igralca II je odstopiti, kadar je $Y < d$, izenačiti, kadar je $e < Y < f$, in povišati, kadar je $d < Y < e$ ali $f < Y < 1$, kjer je

$$d = \frac{B + 2a}{B + 2}, \quad e = \frac{B}{(B + 1)} - a \quad \text{in} \quad f = 1 - \frac{B(2 + B)(2 + 2B + R)}{K}. \quad (4.13)$$

Vrednost von Neumannovega modela s povišanjem je

$$V(B, R) = a = \frac{B^2(R + 2B + 2)^2}{(B + 1)K}. \quad (4.14)$$

Dokaz. Pokazati je potrebno, da sta strategiji S_I in S_{II} najboljša odgovora druga na drugo. Najprej izračunamo najboljši odgovor na S_{II} . Za vsako akcijo igralca I izračunamo pričakovani izkupiček proti S_{II} . Če igralec I preveri, je njegov pričakovani izkupiček enak

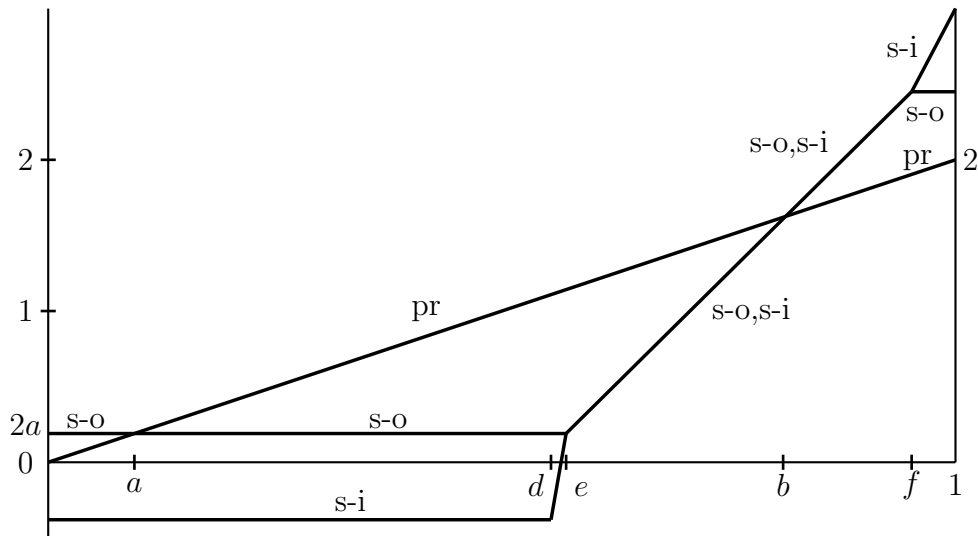
$$v_{pr}^I(x) = 2x.$$

Če I stavi-odstopi, je njegov pričakovani izkupiček enak

$$v_{s-o}^I(x) = \begin{cases} 2a, & 0 \leq x \leq e \\ 2a + 2(B+1)(x-e), & e \leq x \leq f \\ 2a + 2(B+1)(f-e), & f \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Če I stavi-izenači je njegov pričakovani izkupiček enak

$$v_{s-i}^I(x) = \begin{cases} 2a - 2(R+B+1)(e-d), & 0 \leq x \leq d \\ 2a - 2(R+B+1)(e-x), & d \leq x \leq e \\ 2a + 2(B+1)(x-e), & e \leq x \leq f \\ 2a + 2(B+1)(f-e) + 2(R+B+1)(x-f), & f \leq x \leq 1. \end{cases}$$



Slika 4.16: Pričakovani izkupički igralca I proti S_{II} .

Na sliki 4.16, kjer so prikazane zgornje funkcije, preverimo, ali je S_I res najboljši odgovor na S_{II} .

Pokažimo še, da je S_{II} najboljši odgovor na S_I . Za vsako akcijo igralca II izračunamo pričakovani izkupiček proti S_I . Pri tem upoštevamo tudi izide, ko igralec I preveri. Takrat igralec II sploh ni na vrsti. Če igralec II odstopi, je njegov pričakovani dobiček enak

$$v_{od}^{II}(y) = \begin{cases} 0, & 0 \leq y \leq a \\ 2(y - a), & a \leq y \leq b \\ 2(b - a), & b \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Če II izenači, je njegov pričakovani izkupiček enak

$$v_{iz}^{II}(y) = \begin{cases} -2(B + 1)(a - y), & 0 \leq y \leq a \\ 2(y - a), & a \leq y \leq b \\ 2(b - a) + 2(B + 1)(y - b), & b \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Če II poviša, je njegov pričakovani izkupiček enak

$$v_{po}^{II}(y) = \begin{cases} 0, & 0 \leq y \leq a \\ 2(y - a), & a \leq y \leq b \\ 2(b - a), & b \leq y \leq c \\ 2(b - a) + (R + B + 1)(y - c), & c \leq y \leq 1. \end{cases}$$

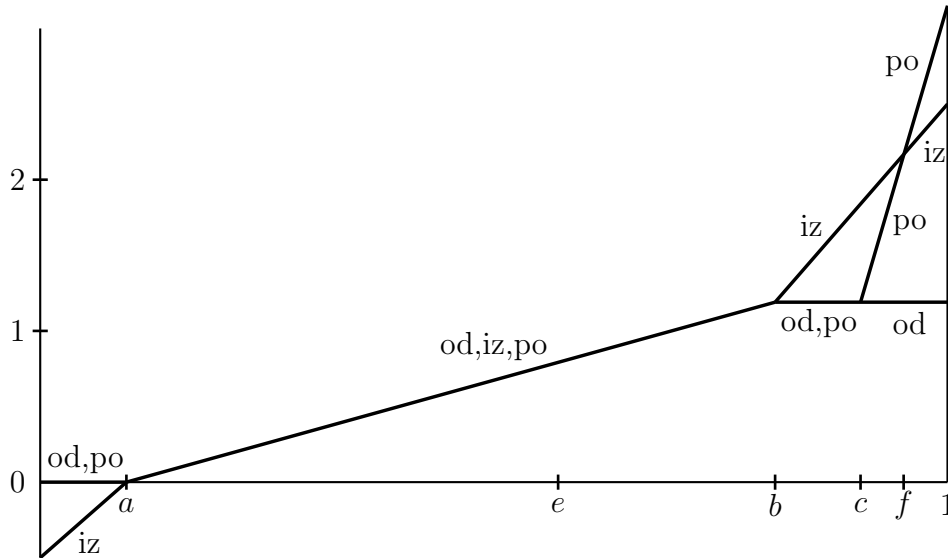
Pri poenostavitvi zgornjih enačb smo si pomagali z vrednostmi mejnih točk iz izreka 4.5.1. Na sliki 4.17 opazimo, da strategija S_{II} za vsako vrednost y prinese največji izkupiček proti S_I . Torej je najboljši odgovor na S_I .

Vrednost igre najlažje izračunamo, če najprej izračunamo ploščino pod zgornjo ovojnico grafa na sliki 4.17, zmanjšano za začetno stavo. To je enako pričakovanemu izkupičku igralca II:

$$\begin{aligned} V^{II}(B, R) &= \int_0^1 (\max\{v_{od}^{II}(y), v_{iz}^I(y), v_{po}^I(y)\} - 1) dy \\ &= \int_0^a 0 dy + \int_a^b 2(y - a) dy + \int_b^f (2(b - a) + 2(1 + B)(y - b)) dy \\ &\quad - \int_f^1 (2(b - a) + (1 + B + R)(y - c)) dy - 1 \\ &= -a. \end{aligned}$$

Vrednost igre je negativna vrednost pričakovanega izkupička igralca II:

$$V(B, R) = -V^{II}(B, R) = a = \frac{B^2(R + 2B + 2)^2}{(B + 1)K}.$$

Slika 4.17: Pričakovani izkupički igralca II proti S_I .

□

Ker je vrednost igre pozitivna, je igra ugodnejša za igralca I. Poiščimo še optimalne velikosti stave B in povišanja R , če igralec I najprej izbere velikost stave, nato pa igralec II izbere velikost povišanja. Igralec II bo izbral tak $R > 0$, ki minimizira $V(B, R)$. Če delimo števec in imenoalec z $(2 + 2B + R)^2$, opazimo, da je to ekvivalentno minimiziranju $(2 + 2B + R)^2/R$. Odvod tega izraza je enak nič, kadar je $R = 2 + 2B$. Torej, optimalna velikost povišanja je vedno enaka velikosti pologa pred povišanjem.

Igralec I želi izbrati tak $B > 0$, ki maksimizira

$$V(B, 2 + 2B) = \frac{8B^2}{(1 + B)(4 + 36B + 9B^2)}. \quad (4.15)$$

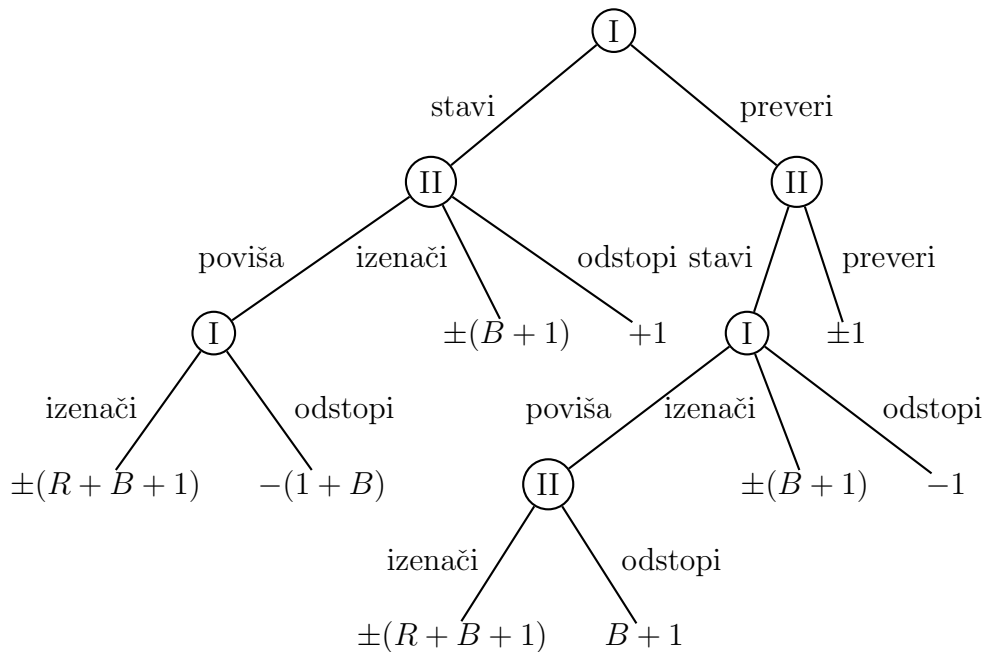
Odvod tega izraza je enak nič za tiste vrednosti B , ki zadoščajo enačbi $9B^2 - 18B - 4 = 0$. Edina pozitivna rešitev enačbe je $B = 1 + \sqrt{13/9} \approx 2.2$. Ker je drugi odvod izraza (4.15) v tej točki negativen, vemo, da gre za maksimum. Torej je optimalna stava nekoliko večja od velikosti pologa.

Strategija S_I je edina optimalna strategija igralca I. Igralec II pa ima več optimalnih strategij. Razlikujejo se po tem, kako igra na intervalu $(0, e)$. Na tem intervalu lahko poljubno odstopa ali povišuje. Vendar mora biti pri tem verjetnost povišanja na tem intervalu enaka $(e - d)/e$. Na primer, lahko poviša z vrednostmi $y \in (0, e - d)$ in odstopa z vrednostmi $y \in (e - d, e)$. Če igralec

I dela napako tako, da stavi-izenači z vrednostjo $x \in (0, e)$ ali stavi-odstopi z vrednostjo $x \in (a, e)$, ima strategija S_{II} največji pričakovani izkupiček od vseh optimalnih strategij, zato je dopustno optimalna.

4.6 Model z dvema stavama

V tem razdelku je analiziran model, v katerem lahko katerikoli igralec začne s stavom, čemur sledi morebitno povišanje drugega igralca. Natančnejši potek igre je prikazan na sliki 4.18.



Slika 4.18: Drevo modela z dvema stavama.

Analiza modela je podobna analizam prejšnjih modelov. Zato podamo samo glavne ugotovitve analize brez dokazov in izpeljav. Ker je ta model kompleksnejši od prejšnjih, bomo analizirali model, kjer sta velikosti stave in povišanja enaki velikosti pologa pred akcijo. Torej je $B = 2$ in $R = 6$.

Igralec I ima na voljo pet možnosti za vsako vrednost x : lahko stavi-odstopi (s-o), stavi-izenači (s-i), preveri-odstopi (p-o), preveri-izenači (p-i) ali preveri-poviša (p-p). Če igralec I preveri, ima igralec II na voljo tri možnosti: lahko preveri (pr), stavi-odstopi (s-o) ali stavi-izenači (s-i). Če igralec I stavi, ima igralec II na voljo tri možnosti: lahko odstopi (od), izenači (iz) ali poviša (po). Optimalni strategiji obeh igralcev sta podani v naslednjem izreku.

Izrek 4.6.1. *V modelu z dvema stavama s konstantama $B = 2$ in $R = 6$ je optimalna strategija S_I igralca I:*

- stavi-odstopi, kadar je $x \in (0, a)$ ali $x \in (d, e)$,
- preveri-odstopi, kadar je $x \in (a, b)$,
- preveri-poviša, kadar je $x \in (b, c)$ ali $x \in (f, 1)$,
- preveri-izenači, kadar je $x \in (c, d)$,
- stavi-izenači, kadar je $x \in (e, f)$,

kjer je

$$a = \frac{8}{150}, \quad b = \frac{77}{150}, \quad c = \frac{80}{150}, \quad d = \frac{128}{150}, \quad e = \frac{136}{150}, \quad f = \frac{144}{150}.$$

Če igralec I stavi, je optimalna strategija S_{II} igralca II:

- stavi-odstopi, kadar je $y \in (0, g)$ ali $y \in (h, j)$,
- preveri, kadar je $y \in (g, h)$,
- stavi-izenači, kadar je $y \in (j, 1)$,

kjer je

$$g = \frac{20}{150}, \quad h = \frac{110}{150}, \quad j = \frac{130}{150}.$$

Če igralec I preveri, je optimalna strategija S_{II} igralca II:

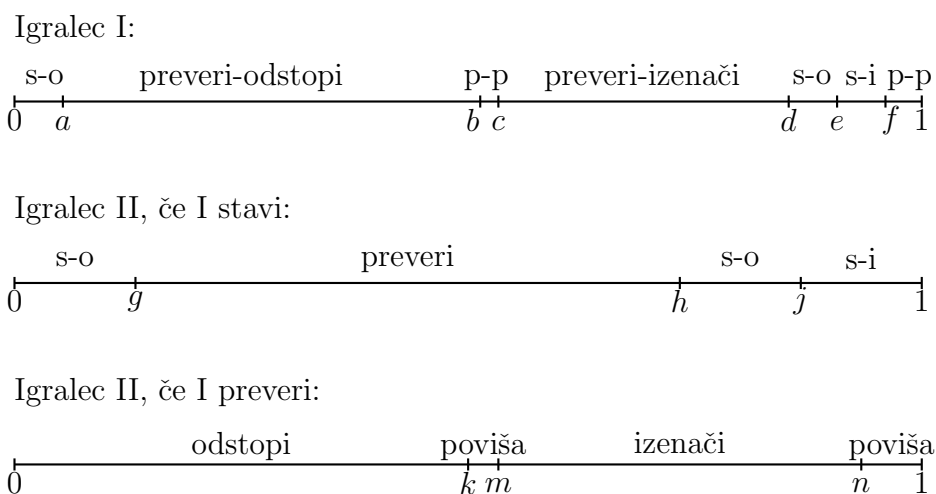
- odstopi, kadar je $y \in (0, k)$,
- poveša, kadar je $y \in (k, m)$ ali $y \in (n, 1)$,
- izenači, kadar je $y \in (m, n)$,

kjer je

$$k = \frac{75}{150}, \quad m = \frac{80}{150}, \quad n = \frac{140}{150}.$$

Vrednost igre je

$$V(2, 6) = -\frac{2}{25}.$$



Slika 4.19: Optimalni strategiji modela z dvema stavama.

Grafično sta optimalni strategiji predstavljeni na sliki 4.19. Strategija S_I razdeli enotski interval na sedem intervalov. Dve akciji sta zastopani dvakrat. To sta stavi-odstopi in preveri-poviša. Obe akciji sta enkrat uporabljeni za varanje, drugič pa za vrednostno stavo. Enako velja za akciji stavi-odstopi in poviša v S_{II} . Igra je ugodnejša za igralca II.

V splošnem so vrednosti mejnih točk preveč kompleksne za predstavitev. Bralec si jih lahko ogleda v priloženem programu. V tem poglavju pa predstavimo samo vrednost igre, ki je enaka

$$V(B, R) = \frac{B^2(2 + 2B + R)^2(4B^4 + 4R + 8BR + B^3(8 + 5R) + B^2(4 + 9R + R^2))}{(1 + B)(2 + B)^2(4B^3 + 2R + B^2(8 + 5R) + B(4 + 7R + R^2))^2}.$$

Ker je zgornji izraz negativen za vsak $B > 0$ in $R > 0$, je igra tudi v splošnem ugodnejša za igralca II.

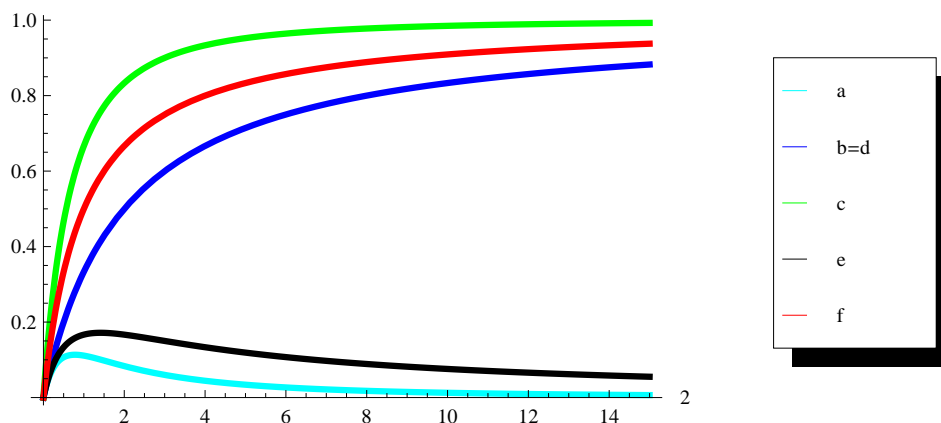
Poglavje 5

Sklepne ugotovitve

Če primerjamo optimalne strategije vseh modelov opazimo, da imajo nekatere skupne strateške značilnosti. Igralec ne želi priti do razkritja vrednosti z najslabšimi vrednostmi, zato se odloči za odstop ali za varanje. V slednjem primeru se odloči za stavo oziroma za povišanje odvisno od možnosti, ki jih ima na voljo. Če ima igralec neko povprečno vrednost, si želi priti do razkritja vrednosti. Sicer njegova vrednost ni najboljša, vendar v danem trenutku ne želi več vlagati v polog, zato se odloči za preverjanje oziroma izenačenje. Če pa ima igralec najboljše vrednosti, želi osvojiti čim večji polog, zato stavi oziroma poviša. Igralec vedno išče takšno razmerje med vrednostnimi stavami in varanji, da je nasprotnik s srednjimi vrednostmi v položaju, ko mu je vseeno, ali odstopi ali izenači. Iz predstavljenih modelov ugotovimo, da je to razmerje $B/(B + 2)$, kjer je B velikost stave. V vsaki optimalni strategiji v pokru je potrebno varanje.

Če opazujemo, kaj se dogaja, ko spreminjamo velikost stave B , ugotovimo, da z večanjem velikosti stave igralci stavijo in izenačijo manjkrat ter preverijo in odstopijo večkrat. Za varanje pa velja, da varajo manj, če je velikost stave zelo velika ali zelo majhna. Na sliki 5.1 so prikazane funkcije mejnih točk modela z eno stavo v odvisnosti od velikosti stave B . Sledi primerjava modelov po vrednosti igre. V spodnji tabeli so prikazane vrednosti igre, kjer upoštevamo, da je velikost stave oziroma povišanja enaka velikosti pologa ($B = 2, R = 6$).

Igra	Vrednost
La Relance	-0.250
Von Neumannov model	0.111
Von Neumannov model s povišanjem	0.095
Model z eno stavo	-0.083
Model z dvema stavama	-0.080



Slika 5.1: Graf funkcij mejnih točk modela z eno stavovo.

Oba von Neumannova modela sta ugodnejša za igralca I, kajti igra se konča takoj, ko igralec I preveri. Igralec I ne bi izgubljal že, če bi vsakič preveril. Igralec II je nekoliko na boljšem v modelu, kjer lahko poviša. Pri La Relance je v prednosti igralec II, ker mora igralec I na začetku nujno staviti, če ne želi izgubiti. Pri modelih z eno in dvema stavama, ki sta najbolj podobna pravemu pokru, sta igralca najbolj izenačena, vendar je vseeno nekoliko v prednosti igralec II. To pripisujemo temu, da je igralec II na vrsti za igralcem I. Tudi v pravem pokru je pomemben vrstni red igralcev za mizo. Za igralca je ugodneje, če je na vrsti čim kasneje.

V četrtem poglavju smo za vsak model najprej intuitivno sestavili predvidene optimalne strategije. Razporedili smo intervale akcij in definirali vrstni red mejnih točk. Nato pa smo s principom indiferentnosti določili vrednosti teh točk. Za dobljeni strategiji smo pokazali, da sta res obe optimalni tako, da smo preverili, ali sta najboljši odgovor druga na drugo. Zanima nas, ali obstaja kakšen postopek, s katerim lahko za poljuben model izračunamo optimalni strategiji?

V tretjem poglavju smo razložili, da optimalni strategiji zagotovo obstajata. Za potrebe diplomskega dela je bil v programskem paketu Mathematica napisan program za pomoč pri iskanju optimalnih strategij v pokru z zveznimi vrednostmi. Program prejme naslednje vhodne podatke:

- Funkcije izkupičkov igre v normalni obliki.
- Predloga obeh optimalnih strategij. Strategijo podamo kot seznam akcij, ki razdeli enotski interval na več intervalov (npr. (izenači, stavi,

odstopi)). Za vsako strategijo je potrebno definirati spremenljivke, ki predstavljajo mejne vrednosti intervalov. To naredimo z omejitvijo, ki uredi mejne vrednosti (npr. $0 < a < b < c < 1$).

- Množico omejitev, ki uredi mejne vrednosti strategij obeh igralcev med seboj (npr. $a < e < b < c$).

Program deluje po postopku, ki smo ga uporabljali v četrtem poglavju. Najprej nastavi sistem indiferenčnih enačb in ga nato reši. Če ima sistem rešitev, ki upošteva vse omejitve, dobimo strategiji z izračunanimi mejnimi vrednostmi. Nato program preveri, ali sta obe strategiji najboljša odgovora druga na drugo. To naredi na enak način, kot smo to naredili v četrtem poglavju. Na koncu vrne še vrednost igre.

Ker je vseh strategij neskončno, ne moremo preizkusiti vseh. Predpostavljamo lahko sicer, da obstaja neka čista optimalna strategija, ki ima K intervalov, kjer je K neka nizka vrednost. To se je izkazalo za vse modele iz četrtega poglavja. Nato preizkusimo vse možne čiste strategije, ki imajo K ali manj intervalov. Pri tem moramo upoštevati, da je treba za preizkus ene strategije opraviti en preizkus za vsak možen vrstni red mejnih vrednosti. Možnih vrstnih redov mejnih spremenljivk, kot tudi možnih vrstnih redov intervalov akcij, je eksponentno mnogo v odvisnosti od K . Zato je program eksponentno časovno zahteven in ni primeren za kompleksnejše modele.

Želeli bi si postopka, ki nas pripelje blizu optimalne rešitve, nato pa bi z zgornjim postopkom poiskali točno rešitev. Tega bi se lahko lotili na naslednji način. Začeli bi z neko naključno čisto strategijo igralca I. Nato bi poiskali neko čisto strategijo igralca II, ki je najboljši odgovor na to strategijo. Potem bi poiskali najboljši odgovor na dobljeno strategijo igralca II in tako naprej iterativno. S takim postopkom sicer nikoli ne bi prišli do Bayes-Nashevega ravnovesja, kajti morali bi že začeti z optimalno strategijo. Izkaže pa se, da tak postopek ne zagotavlja niti sub-optimalne strategije. Za uspešno reševanje problema bi potrebovali določena pravila, ki bi omejila množico potencialnih optimalnih strategij, ki jih uporabimo za vhodni podatek našega programa. Nekaj takih pravil smo že navedli na začetku tega poglavja. Definiranje takih pravil bi lahko bil predmet nadaljnjih raziskav.

Zadnji postopek je zanimiv tudi, ker lahko opazujemo, kaj se dogaja v naslednjem primeru. Denimo, da igralec sčasoma ugane, kakšno strategijo igra njegov nasprotnik. Nato prilagodi svojo strategijo tako, da postane najboljši odgovor na nasprotnikovo. Podobno pa počenja tudi njegov nasprotnik. Tako početje pa lahko zaznamo tudi pri pravem pokru.

Slike

3.1	Igra Zapornikova dilema.	9
3.2	Igra v razširjeni obliki.	17
3.3	Igra s slike 3.2 v normalni obliki.	18
4.1	Drevo La Relance (levo) in von Neumannovega modela (desno).	22
4.2	Optimalni strategiji igre La Relance.	24
4.3	Diagram izkupičkov igre La Relance.	26
4.4	Drevo von Neumannovega modela.	27
4.5	Optimalni strategiji von Neumannovega modela.	28
4.6	Pričakovani izkupički igralca I proti S_{II}	30
4.7	Pričakovani izkupički igralca II proti S_I	31
4.8	Drevo modela z eno stavo.	32
4.9	Optimalni strategiji modela z eno stavo.	34
4.10	Pričakovani izkupički igralca I proti S_{II}	37
4.11	Pričakovani izkupički igralca II proti S_I , če I stavi.	37
4.12	Pričakovani izkupički igralca II proti S_I , če I preveri.	38
4.13	Alternativna dopustna optimalna strategija igralca I.	39
4.14	Drevo von Neumannovega modela s povišanjem.	39
4.15	Optimalni strategiji von Neumannovega modela s povišanjem.	40
4.16	Pričakovani izkupički igralca I proti S_{II}	42
4.17	Pričakovani izkupički igralca II proti S_I	44
4.18	Drevo modela z dvema stavama.	45
4.19	Optimalni strategiji modela z dvema stavama.	47
5.1	Graf funkcij mejnih točk modela z eno stavo.	49

Literatura

- [1] E. Borel, J. Ville, *Application de la théorie des probabilités aux jeux de hasard*. Gauthier-Villars, Paris, 1938.
- [2] W. H. Cutler, “An optimal strategy for pot-limit poker”, *American Mathematical Monthly*, vol. 82, str. 368–376, 1975.
- [3] C. Ferguson, T. Ferguson, “On the Borel and von Neumann Poker Models”, *Game Theory and Applications*, vol. 9, str. 17–32, 2003.
- [4] C. Ferguson, T. Ferguson, C. Gawargy, “Uniform [0,1] two-person poker models”, *Game Theory and Applications*, vol. 12, str. 17–37, 2007.
- [5] T. Ferguson, *Game Theory*. Dostopno na:
http://www.math.ucla.edu/~tom/Game_Theory/Contents.html
- [6] S. Karlin, R. Restrepo, “Multi stage poker models”, *Contributions to the Theory of Games*, vol. 3, str. 337–363, 1957.
- [7] K. Leyton-Brown, Y Shoham, *Essentials of game theory: a concise, multidisciplinary introduction*. Morgan & Claypool Publishers, 2008.
- [8] J. Mamer, K. Schilling, “A Zero-Sum Game with Incomplete Information and Compact Action Spaces”, *Mathematics of Operations Research*, vol. 11, št. 4, str. 627–631, 1986.
- [9] P. Milgrom, R. Weber, “Distributional Strategies for Games with Incomplete Information”, *Mathematics of Operations Research*, vol. 10, št. 4, str. 619–632, 1985.
- [10] J. von Neumann, O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behaviour*. Princeton University Press, 1944.