UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA RAČUNALNIŠTVO IN INFORMATIKO

Matic Tovšak

DISKRETNI MATEMATIČNI MODELI IN ALGORITMI ZA VREDNOTENJE DELNIŠKIH OPCIJ

DIPLOMSKO DELO NA UNIVERZITETNEM ŠTUDIJU

Mentor: prof. dr. Borut Robič

Ljubljana, 2011

Univerza
v Ljubljani
Fakulteta za računalništvo
in informatiko

Tržaška 25
1000 Ljubljana, Slovenija
telefon: 01 476 84 11
faks: 01 426 46 47
www.fri.uni-lj.si
e-mail: dekanat@fri.uni-lj.si

Št. naloge: 01718/2010

Datum: 15.12.2010

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za računalništvo in informatiko izdaja naslednjo nalogo:

Kandidat: **MATIC TOVŠAK**

Naslov: **DISKRETNI MATEMATIČNI MODELI IN ALGORITMI ZA VREDNOTENJE DELNIŠKIH OPCIJ**

DISCRETE MATHEMATICAL MODELS AND ALGORITHMS FOR STOCK OPTIONS VALUATION

Vrsta naloge: Diplomsko delo univerzitetnega študija

Tematika naloge:

Matematika in informacijske tehnologije so postale pomemben del sodobnih finančnih trgov. Sprejemanje odločitev ob hkratni negotovosti o njihovem izidu je pri borznem trgovanju neizogibno, zato je veliko pozornosti usmerjene v razvoj kompleksnih matematičnih modelov, s katerimi analiziramo in določamo cene izvedenih finančnih instrumentov. Trgi izvedenih finančnih instrumentov so zato danes najhitreje rastoča industrija, kjer je zaposlenih mnogo inženirjev z dobrim matematičnim znanjem.

V diplomski nalogi splošno opišite delovanje sodobnih finančnih trgov ter izvedenih finančnih instrumentov. Predstavite kompleksnejše vidike vrednotenja delniških opcij. Preglejte diskretne matematične modele in ilustrirajte njihovo uporabo s primerom računalniškega algoritma.

Mentor:

prof. dr. Borut Robič

Fakulteta za računalništvo in informatiko
UNIVERZA V LJUBLJANI
2

Dekan:

prof. dr. Nikolaj Zimic

IZJAVA O AVTORSTVU

diplomskega dela

Spodaj podpisani Matic Tovšak,

z vpisno številko 63030070,

sem avtor diplomskega dela z naslovom:

DISKRETNI MATEMATIČNI MODELI IN ALGORITMI
ZA VREDNOTENJE DELNIŠKIH OPCIJ

S svojim podpisom zagotavljam, da:

- sem diplomsko delo izdelal samostojno pod mentorstvom (naziv, ime in priimek) prof. dr. Boruta Robiča
- so elektronska oblika diplomskega dela, naslov (slov., angl.), povzetek (slov., angl.) ter ključne besede (slov., angl.) identični s tiskano obliko diplomskega dela
- soglašam z javno objavo elektronske oblike diplomskega dela v zbirki "Dela FRI".

V Ljubljani, dne ________________ Podpis avtorja: ________________

Zahvala

Za pomoč, nasvete in popravke pri izdelavi diplomske naloge se najprej zahvaljujem mentorju prof. dr. Borutu Robiču.

Posebej rad bi se zahvalil svoji družini, ki mi je študij omogočila in mi tekom študija stala ob strani.

Za pomoč pri izbiri literature in splošne nasvete pri izdelavi diplomske naloge gre zahvala prof. dr. Mihaelu Permanu. Za splošno podporo in pomoč pri študiju se zahvaljujem tudi Janezu Harumu.

Kazalo

Seznam uporabljenih kratic in simbolov

- IFI - angl. financial derivative; izvedeni finančni instrument
- CFD - angl. contract for difference; pogodba za razliko
- STP - angl. futures contract; standardna terminska pogodba
- CRR model - Cox - Ross - Rubinstein model
- FV - angl. future value; prihodnja vrednost
- PV - angl. present value; sedanja vrednost
- PVIF - angl. present value interest factor; faktor sedanje vrednosti
- DF - angl. discount factor; diskontni faktor

Slovar pojmov

Ameriška opcija (angl. American option), standardizirana opcija, ki omogoča lastniku, da izkoristi pravico do nakupa ali prodaje kadarkoli do (vključno) datuma zapadlosti; glej *opcija, standardizirane opcije, datum zapadlosti.*

Arbitraža (angl. arbitrage), izkoriščanje tečajnih razlik istega finančnega instrumenta na različnih trgih.

Arbitraža vrednostnih papirjev (angl. arbitrage), izkoriščanje tečajnih razlik istega vrednostnega papirja na različnih trgih; glej *arbitraža.*

Azijske opcije (angl. Asian options), opcije, katerih končno izplačilo je odvisno od celotnega poteka cen osnovnega instrumenta. Končno izplačilo je odvisno od povprečne cene osnovnega instrumenta v nekem časovnem obdobju; glej *opcije, opcije odvisne od poti.*

Binomski model (angl. binomial model), diskretni matematični model za numerično aproksimacijo vrednosti opcij.

Black-Scholes model, analitični model za vrednotenje evropskih opcij.

Borza (angl. stock exchange), finančni trg z deleži podjetij, ki jim pravimo tudi delnice; glej *delnice.*

Borzni indeks (angl. stock market index), statistični kazalnik spremembe tečajev vrednostnih papirjev.

Borzni posrednik (angl. stock broker), pooblaščena oseba, ki izpolnjuje naročila strank, gospodari z njihovim denarjem in jim svetuje v zvezi s poslovanjem z vrednostnimi papirji.

Cena opcije (angl. option price), glej *premija.*

Datum zapadlosti (angl. expiration date), vnaprej dogovorjen datum v opcijski pogodbi, na katerega lahko kupec opcije proda ali kupi določen osnovni instrument; glej *opcija, osnovni instrument.*

Delnica (angl. stock), lastniški vrednostni papir, ki izdajatelju predstavlja vir sredstev, lastniku pa solastništvo v podjetju.

Delniška opcija (angl. stock options), pogodba med dvema strankama, ki kupcu delniške opcije omogoča pravico (ne pa tudi obveze) do nakupa ali prodaje določene količine delnic po vnaprej določeni izvršilni ceni na vnaprej določen datum v prihodnosti, ki mu rečemo tudi datum zapadlosti; glej *datum zapadlosti, izvršilna cena, kupec opcije.*

Devizna arbitraža (angl. currency arbitrage), izkoriščanje razlik v valutnih tečajih na različnih trgih; glej *arbitraža.*

Digitalna opcija (angl. Digital option), opcija, katere izplačilo je fiksno, ko cena osnovnega instrumenta preseže izvršilno ceno. Pri tem ni pomembno, za koliko je izvršilna cena presežena.

Diskontna stopnja (angl. discount rate), mera, ki nam omogoča izračun sedanje vrednosti prihodnjega denarnega toka. Izraža v bistvu stopnjo zahtevanega donosa; glej *diskontni faktor.*

Diskontni faktor (angl. discount factor, DF); glej *faktor sedanje vrednosti.*

Dolga pozicija (angl. long position), nakup finančnega instrumenta v predvidevanju, da bo cena finančnega instrumenta narasla.

Eksotične opcije (angl. exotic options), opcije, narejene z namenom, da bi zadostile specifičnim potrebam določenih udeležencev trga. Razvijajo jih inženirji v skladu z zahtevami vlagateljev; glej *azijske opcije, digitalne opcije.*

Enoperiodni model (angl. single - period model), preprost diskretni model, ki predpostavlja, da se cena osnovnega instrumenta spremeni samo enkrat, kar pomeni, da upoštevamo samo dva datuma - začetnega in končnega.

Evropska opcija (angl. European option), standardizirane opcije, ki omogočajo imetniku izvršitev pravice do nakupa ali prodaje izključno na datum zapadlosti; glej *opcija, standardizirane opcije, datum zapadlosti.*

Faktor sedanje vrednosti (angl. present value interest factor, PVIF), faktor, ki se pri izračunu sedanje vrednosti uporablja za izračun zahtevane stopnje donosa.

Finančni vzvod (angl. leverage), omogoča trgovanje s kreditiranjem. Na ta način lahko trgovec trguje z večjimi zneski, kot jih ima dejansko fizično na računu.

Izplačilo opcije (angl. option payoff), razlika med ceno osnovnega instrumenta in izvršilno ceno opcije. Če je razlika negativna, potem je izplačilo opcije enako 0.

Izvedeni finančni instrumenti (IFI, angl. financial derivatives), finančni instrumenti, katerih cena je izvedena oziroma oblikovana na podlagi cen osnovnih instrumentov; glej *osnovni instrument.*

Izvršilna cena(angl. strike price), vnaprej dogovorjena cena v opcijski pogodbi, po kateri lahko kupec opcije proda ali kupi določen osnovni instrument; glej *opcija.*

Kratka pozicija (angl. short position), stava kupca, da bo cena finančnega instrumenta padla; glej *prodaja delnic na kratko.*

Kupec opcije (angl. option buyer), subjekt, ki opcijo kupi; glej *opcija.*

Letni diskontni faktor; glej *faktor sedanje vrednosti.*

Metoda Monte Carlo (angl. Monte Carlo method), metoda, ki se pogosto uporablja za vrednotenje eksotičnih opcij; glej *eksotične opcije.*

Nakupna opcija (angl. call option), opcija, ki daje kupcu pravico do nakupa določene količine osnovnega instrumenta po vnaprej določeni ceni na vnaprej določen datum; glej *opcija, osnovni instrument.*

Nestandardizirani finančni produkti (angl. unstandardized financial products), finančni produkti, ki so narejeni z namenom, da bi zadostili specifičnim potrebam določenih udeležencev trga.

Netvegan instrument (angl. riskless asset), finančni instrument z vnaprej znano obrestno mero in garantiranim izplačilom glavnice. Med takšne instrumente uvrščamo bančne depozite in obveznice; glej *obveznica.*

Notranja vrednost opcije (angl. intrinsic value), absolutna vrednost razlike med trenutno ceno osnovnega instrumenta in izvršilno ceno opcije; glej *izvršilna cena, opcija.*

Obrestna arbitraža (angl. interest rate parity), izkoriščanje razlik v obrestnih merah na istovrstne kredite v različnih državah; glej *arbitraža.*

Obrestno obrestovanje (angl. compound interest), obrestovanje, pri katerem se obresti sproti pripisujejo glavnici. Osnova za obrestovanje je vedno začetna glavnica, skupaj z obrestmi, ki so bile pripisane v prejšnjih obdobjih.

Obveznica (angl. bond), dolžniški vrednostni papir, s katerim se izdajatelj obveže, da bo imetniku izplačeval obresti, na datum zapadlosti pa tudi glavnico; glej *datum zapadlosti.*

Opcija (angl. option), izvedeni finančni instrument, ki določa pogodbo med dvema strankama o nakupu oz. prodaji nekega osnovega instrumenta na določen datum v prihodnosti in po vnaprej dogovorjeni ceni. Uporablja za špekulacije ali za zavarovanje pred raznimi finančnimi tveganji; glej *izvedeni finančni instrument, osnovni instrument, špekulacije, zavarovanje.*

Opcije odvisne od poti (angl. path dependent options), glej *azijske opcije.*

Osnovni instrument (angl. underlying asset), instrument, iz katerega je izpeljana cena izvedenih finančnih instrumentov. Sem spadajo delnice, obveznice, surovine in borzni indeksi; glej *borzni indeks, delnica, izvedeni finančni instrument, obveznica, surovine.*

Pascalov trikotnik (angl. Pascal's triangle), predstavitev binomskih koeficientov.

Pisec opcije (angl. option writer), subjekt, ki opcijo proda; glej *opcija.*

Pogodba za razliko (angl. contract for difference, CFD), najpreprostejši izvedeni finančni instrument, ki omogoča trgovanje s finančnim vzvodom in katerega cena se giblje v skladu s cenami delnic ali drugih osnovnih instrumentov; glej *delnica, finančni vzvod, osnovni instrument.*

Portfelj (angl. portfolio), množica različnih finančnih naložb.

Premija (angl. premium), cena, ki jo plačamo za nakup opcije.

Prihodnja vrednost (angl. future value), sedanja vrednost, povečana za neko obrestno mero; glej *sedanja vrednost.*

Prodaja delnic na kratko (angl. short selling), prodaja izposojenih delnic v predvidevanju, da bo njihova cena v prihodnosti padla. Če cena delnice pade, trgovec kupi delnice nazaj in jih vrne, sam pa obdrži razliko med vrednostjo prodaje in kasnejšega nakupa; glej *delnice, kratka pozicija.*

Prodajna opcija (angl. put option), opcija, ki daje kupcu pravico do prodaje določene količine osnovnega instrumenta po vnaprej določeni ceni na vnaprej določen datum; glej *opcija, osnovni instrument.*

Replikacijski portfelj (angl. replicating portfolio), portfelj naložb, katerega izplačilo bo enako ciljnemu instrumentu. Pri opcijah lahko kreiramo portfelj, sestavljen iz delnic in gotovine, katerega izplačilo bo enako izplačilu opcije; glej *delnice, opcije, portfelj.*

Replikacija (angl. replication), glej *replikacijski portfelj.*

Sedanja vrednost (angl. present value), vsota denarja, ki bi jo morali imeti danes, da bi z njo z določenimi obrestmi v določenem času dosegli neko dano prihodnjo vrednost; glej *prihodnja vrednost.*

Standardizirane opcije (angl. standardized options), opcije, katerih parametri so določeni v skladu z nekimi standardi. Določena je vrsta opcije, velikost pogodbe, datum zapadlosti, izvršilna cena in provizije.

Standardna terminska pogodba (STP, angl. futures contract), je pogodba med dvema strankama o nakupu oz. prodaji določene dobrine na točno določen datum v prihodnosti ter po vnaprej določeni ceni. Kot takšna je podobna opciji, s to razliko, da lastniku opcije ni potrebno izkoristiti pravice, če tega ne želi. Terminska pogodba je zavezujoča za obe stranki; glej *opcija.*

Špekulacija (angl. speculation), trgovanje z namenom ustvarjanja dobička s hitrim izkoriščanjem tečajnih razlik na borznem trgu; glej *borza.*

Vanilla opcije (angl. Vanilla options), standardizirane opcije, med katere spadata evropska in ameriška opcija; glej *ameriška opcija, evropska opcija, standardizirane opcije.*

Večperiodni model (angl. multi - period model), razširitev enoperiodnega modela. Časovno obdobje razdelimo na več manjših intervalov, vsak interval pa modeliramo kot enoperiodnega; glej *enoperiodni model.*

Volatilnost (angl. volatility), nihajnost delnice, izračunana kot letna standardna deviacija dnevnih sprememb v ceni delnice.

Zavarovanje (angl. hedge), zaščita portfelja z izvedenimi finančnimi instrumenti pred nihanji na borznem trgu; *glej borza, izvedeni finančni instrumenti, portfelj.*

Zvezno obrestovanje (angl. continuous interest), aproksimacija obrestnega obrestovanja za daljša časovna obdobja; glej *obrestno obrestovanje.*

Povzetek

Na finančnih trgih se vlagatelji vsak dan srečujejo z naložbenimi tveganji. Odločitve morajo sprejemati na podlagi negotovosti o prihodnjem gibanju trga. Zmanjšanje takšnih tveganj omogočajo *izvedeni finančni instrumenti* (IFI, angl. financial derivatives). To so finančni instrumenti, ki imajo vrednost določeno na podlagi pričakovanega gibanja *osnovnega instrumenta* (angl. underlying asset), na katerega so vezani. Zelo pogost in množično trgovan IFI so *delniške opcije* (angl. stock options). Zaradi kompleksnosti teh instrumentov je veliko dela usmerjenega v analizo in razvoj matematičnih modelov, ki služijo kot osnova za razvoj računalniških algoritmov, s pomočjo katerih lahko posamezno opcijo ovrednotimo. Finančna industrija zato danes predstavlja vir zaposlitve velikemu številu računalniških inženirjev.

Diplomska naloga obsega predstavitev diskretnih matematičnih modelov za vrednotenje delniških opcij ter prikaz uporabe tovrstnih modelov z izdelavo računalniškega algoritma. Prvi del naloge se osredotoča na opis delovanja finančnih trgov in splošno predstavitev delniških opcij, v drugem delu pa bralca seznani z naprednejšimi vidiki vrednotenja opcij ter razvojem konkretnega računalniškega algoritma za izračun vrednosti *evropske opcije* (angl. European option).

Nazadnje so predstavljene tudi *opcije odvisne od poti* (angl. path dependent options). Osredotočil sem se na prikaz delovanja *azijske opcije* (angl. Asian options) ter opisal matematični postopek za izračun pričakovanega izplačila opcije.

Ključne besede: delniška opcija, diskretni matematični model, algoritem

Abstract

In financial markets, investors are daily exposed to all kinds of investment risks. Choices have to be made under conditions of uncertainty about the future market changes. It is possible to reduce such risks with the use of financial derivatives. These are financial instruments with a value based on some underlying security. Very common financial derivatives are stock options. Because of their complexity, much effort goes into the analysis and development of complex mathematical models which serve as a base for development of computer algorithms. With the help of such algorithms, stock option values can be calculated. Financial industry is therefore a major source of employment for computer engineers.

The aim of this thesis is to present discrete mathematical models for stock options' valuation. Another aim is to show how these models can be implemented in the form of a computer algorithm. The first part of thesis focuses on a description of the concepts of financial markets with a general presentation of stock options. The second part provides information on more advanced aspects of valuation and development of the actual computer algorithm for a calculation of the European option value.

In the end, path dependent options are presented as well. I focused on presenting how the Asian options work and I described the mathematical procedure for a calculation of the expected option payoff.

Key words: stock option, discrete mathematical model, algorithm

Poglavje 1

Uvod

Tematika diplomske naloge obsega obravnavo določenih matematičnih aspektov finančnih trgov ter ustvarjanje matematičnih modelov, na podlagi katerih lahko razvijemo računalniške algoritme za vrednotenje *izvedenih finančnih instrumentov* (IFI, angl. financial derivatives). Trgi IFI so danes hitro rastoča industrija, v kateri je zaposlenih veliko inženirjev z dobrim matematičnim znanjem. Raznolikost in kompleksnost novih finančnih instrumentov pogosto povzroča nerazumevanje in zmedenost, pri čemer je veliko energije usmerjene v analizo in razvoj kompleksnih matematičnih modelov, na podlagi katerih temelji njihov obstoj. Jedro diplomske naloge se osredotoča na principe vrednotenja opcij z *binomskimi modeli* (angl. binomial models). Sprejemanje odločitev na podlagi pogojev negotovosti o njihovem izidu je pri borznem trgovanju neizogibno. Zato sta najbolj zanimivi področji matematike, ki se uporabljata v finančni teoriji, teorija verjetnosti in v njenem okviru stohastični procesi.

Medtem ko so cene *osnovnih instrumentov* (angl. underlying asset) določene na podlagi ekonomskih kazalnikov in predpostavk, je vrednotenje IFI pogosto veliko bolj zapleteno. Odločitve o primernih cenah slednjih namreč temeljijo na predpostavkah o obnašanju cen osnovnih instrumentov. Teorija vrednotenja IFI tako ne zahteva podrobnega znanja ekonomije ter ekonomskih kazalnikov, ki določajo cene osnovnih instrumentov, temveč znanje ustvarjanja matematičnih modelov, na podlagi katerih lahko analiziramo ter določamo vrednosti IFI.

Kljub temu pa je nujno potrebno, da se v uvodnih poglavjih posvetim teoretičnemu opisu borznega trga, principu njegovega delovanja in predstavitvi (izvedenih) finančnih instrumentov.

Iz povedanega sledi, da obravnava finančnih trgov in finančnih instrumentov iz ekonomskega oziroma družboslovnega vidika ni predmet te naloge. Namen diplomske naloge je predstavitev diskretnih matematičnih modelov ter pripadajočih osnovnih računalniških algoritmov za vrednotenje *delniških opcij* (ang. stock options).

Poglavje 2

Finančni trg

Splošno pojmovanje finančnih trgov v obdobju gospodarskih kriz pogosto dobi zelo negativen prizvok, pri čemer je *borza* (angl. stock exchange) po mnenju nekaterih postala celo sinonim za igro na srečo. Pa vendar je dejstvo, da brez finančnega trga svet, kot ga poznamo, ne bi obstajal. Namen tovrstnih trgov je, da privabi subjekte, ki imajo kapital, in subjekte, ki kapital potrebujejo. Glede na to, da se naloga ukvarja s finančnimi produkti, s katerimi se največkrat trguje na borzi, se bomo v nadaljevanju osredotočili na predstavitev tega specifičnega finančnega trga ter na opis njegove funkcije in delovanja.

2.1 Trgovanje in namen

Borza je, enostavno rečeno, trgovina z deleži podjetij, ki jim pravimo tudi delnice. Lahko si jo zamislimo kot velik prostor, ki ga obiščemo, kadar želimo kupiti ali prodati delnico posameznega podjetja. Na tem mestu se postavi smiselno vprašanje, zakaj kupovati in prodajati deleže podjetij oziroma zakaj bi neko podjetje sploh imelo interes, da se njegovi deleži prodajo javnosti in da se z njimi prosto trguje. Namen takšnega početja je v osnovi dokaj preprost. Takšno udejstvovanje namreč dandanes predstavlja za podjetja najpomembnejši vir pridobivanja denarja. Podjetja v ta namen prodajo javnosti svoje deleže, ki jih imenujemo *delnice* (angl. stocks), s temi deleži pa se trguje na trgu, imenovanem borza. V tem delu smo že večkrat poudarili, da je borza trg. Zato ni odveč omeniti še dejstva, da ravno tako kot vsak drug trg, poganjata tudi borzo (in s tem cene delnic) dva osnovna tržna pojava - ponudba in povpraševanje. Borza je torej motor, ki poganja gospodarstvo in prenese denar v perspektivna podjetja, ki ga nato porabijo za lasten razvoj.

Če se vrnemo k primerjavi borze z igro na srečo, vidimo, da je primerjava dokaj nesmiselna. Borza je veliko več, kot pobiralnica preprostih stav na bodoče smeri gibanja posameznih delnic. Investitorji namreč zagotavljajo denar podjetjem, ker ga le-ta potrebujejo za dosego poslovnih ciljev. Ostaja pa dejstvo, da je predvidevanje prihodnjih razmerij med ponudbo in povpraševanjem in s tem predvidevanje prihodnjega gibanja cen delnic verjetnostne narave, saj sprejemamo odločitve na podlagi negotovosti o izidu. Zaradi tega je borzno trgovanje tvegano početje in je kot takšno neprimerno za neprofesionalne in nepoučene vlagatelje.

Nakupov in prodaj delnic na borzi ne moremo izvajati sami. Naročila za nakupe in prodaje delnic moramo zato posredovati t.i. *borznim posrednikom* (angl. stock brokers), ki za nas najdejo prodajalca ali kupca in v našem imenu izvedejo nakup oziroma prodajo. Za uspešno sklenitev posla morata obstajati tako kupec, ki po delnici povprašuje, kot tudi prodajalec, ki delnico ponuja.

2.2 Izvedeni finančni instrumenti - splošno

V prejšnjih točkah smo z namenom lažjega razumevanja zelo posplošeno govorili o borzi kot o delniškem trgu. Delnice pa še zdaleč niso edina oblika finančnih instrumentov, s katerimi je mogoče trgovati na finančnih trgih. Globalizacija poslovanja udeležencev finančnih trgov je pripeljala do razvoja *izvedenih finančnih instrumentov* (IFI, angl. financial derivatives). Beseda „izvedeni"pomeni, da so to finančni instrumenti, katerih cena je izvedena oziroma oblikovana na podlagi cen *osnovnih instrumentov* (angl. underlying asset). Osnovne instrumente najpogosteje predstavljajo *delnice* (angl. stocks), *obveznice* (angl. bonds), *surovine* (angl. commodities) ali *borzni indeksi* (angl. stock market index).

Kot takšni imajo IFI dvojni namen. V prvi vrsti so namenjeni *zavarovanju* (angl. hedge) pred naložbenimi tveganji (npr. zavarovanje pred upadom cene delnice), po drugi strani pa so namenjeni tudi *špekulacijam* (angl. speculations), saj omogočajo trgovanje s *finančnim vzvodom* (angl. leverage). Vzvod omogoča trgovcem po eni strani možnosti velikih zaslužkov, po drugi strani pa prinaša velika tveganja, zato trgovanje z IFI lahko vodi do velikih izgub. Med IFI spadajo npr. *pogodbe za razliko* (angl. contract for difference, CFD), *standardne terminske pogodbe* (STP, angl. futures contract) in *opcije* (angl. options).

2.2.1 Delnice

Delnica (angl. stock) je lastniški vrednostni papir, ki izdajatelju predstavlja vir sredstev, lastniku pa solastništvo v podjetju. S tem ima lastnik delnice pravico do soodločanja pri pomembnih poslovnih odločitvah ter pravico do soudeležbe pri dobičku, če ga podjetje svojim delničarjem izplačuje. Ceno delnice določi trg, kar pomeni, da je cena določena glede na razmerje med ponudbo in povpraševanjem v skladu s pričakovanji vlagateljev glede prihodnjega poslovanja podjetja. Iz tega sledi, da je lastnik delnic podvržen tako tveganju zmanjšanja vloženega kapitala, kot tudi potencialni nagradi povečanja kapitala. Cene delnic se na razvitih in likvidnih delniških trgih spreminjajo zelo hitro, tako rekoč iz sekunde v sekundo. Nihanje cene delnice je odraz pričakovanj vlagateljev o poslovanju podjetja. Poleg tega pa na spremembe cen pomembno vplivajo razni vsakodnevni psihološki faktorji, kot je splošno emocionalno stanje borznih udeležencev. Vsi našteti dejavniki so lahko vzrok za nenadno rast ali padec cene. Temu nihanju cen pravimo tudi *volatilnost* (angl. volatility).

Na delniških trgih je mogoče zaslužiti tudi s padcem vrednosti delnic. Trgovec si izposodi delnice (ponavadi od borzno posredniške družbe), ki jih nato proda na trgu v upanju, da bo cena v prihodnosti padla. Ker prodamo delnice, ki si jih ne lastimo, jih moramo tudi vrniti. Če cena delnice pade, trgovec kupi delnice nazaj in jih vrne borzno posredniški družbi, sam pa obdrži razliko med vrednostjo prodaje in kasnejšega nakupa. Takšnemu trgovanju pravimo *prodaja delnic na kratko* (angl. short selling).

2.2.2 Opcije

Opcija (angl. option) je IFI, ki se uporablja bodisi za *špekulacije*, bodisi za *zavarovanje* pred raznimi finančnimi tveganji. Z njihovo pomočjo lahko zavarujemo delniške naložbe pred velikimi nihanji, ki spremljajo delniški trg. Opcija spada med IFI, ker je njena vrednost izvedena iz nekega *osnovnega instrumenta* (angl. underlying asset), pri čemer so najbolj razširjene opcije na delnice.

Pri *delniški opciji* (angl. stock option) gre za pogodbo, kjer morata vedno obstajati dve pogodbeni stranki - na eni strani imamo subjekt, ki opcijo kupi (*kupec opcije*, angl. option buyer), na drugi strani pa subjekt, ki opcijo proda (*pisec opcije*, angl. options writer). Kupec delniške opcije ima pravico (ne pa tudi obveze) do nakupa ali prodaje določene količine delnic po vnaprej določeni *izvršilni ceni* (angl. strike price) na vnaprej določen datum v prihodnosti, ki mu rečemo tudi *datum zapadlosti* (angl. expiration date). Pisec opcije pa ima strogo obvezo, da zagotovi kupcu dogovorjeno število delnic, vkolikor se kupec odloči izkoristiti pravico, ki mu jo opcija omogoča. Da pisec sprejme to obvezo, zahteva v zameno plačilo, ki mu pravimo *premija* (angl. option premium), uporablja pa se tudi izraz *cena opcije* (angl. option price). To je torej cena, ki jo kupec opcije plača nasprotni stranki (piscu opcije) v zameno za tveganje, ki ga pisec opcije prevzame. Pisec opcije namreč prevzame tveganje, da bo moral v prihodnosti do kupca poravnati obveznosti, ki jih opcija določa. Pravimo tudi, da kupec opcije odpre *dolgo pozicijo* (angl. long position), pisec opcije pa *kratko pozicijo* (angl. short position). Ko se kupec odloči izkoristiti pravico, ki mu jo opcija ponuja, lahko ustvari s tem dobiček, lahko pa tudi izgubo, ki pa ne presega višine plačane premije. Temu pravimo *izplačilo opcije* (angl. option payoff).

Dogovor: Odslej bomo delniške opcije krajše poimenovali z izrazom *opcije*.

Glede na povedano ločimo dve vrsti opcij:

- ***nakupna opcija* (angl. call option)** - daje imetniku opcije pravico do nakupa vnaprej določenega števila delnic po vnaprej dogovorjeni ceni na vnaprej določen datum

- ***prodajna opcija* (angl. put option)** - daje imetniku opcije pravico do prodaje vnaprej določenega števila delnic po vnaprej dogovorjeni ceni na vnaprej določen datum

Dogovor: Zaradi splošno uveljavljenega žargona v svetu finančne industrije bomo v nadaljevanju nakupno in prodajno opcijo vedno poimenovali z angleškima besedama *call* in *put*.

Najbolj pogoste so t.i. *vanilla opcije* (angl. Vanilla options), kamor spadajo *ameriške* (angl. American options) in *evropske opcije* (angl. European options). Te oznake ne pomenijo, da smo z nakupom tovrstnih opcij regionalno omejeni na delnice ameriških oziroma evropskih podjetij.

Evropske opcije omogočajo imetniku izvršitev pravice do nakupa ali prodaje izključno na datum zapadlosti, medtem ko lahko lastnik ameriške opcije izkoristi pravico do nakupa ali prodaje kadarkoli do (vključno) datuma zapadlosti.

Poleg vanilla opcij poznamo še *eksotične opcije* (angl. exotic options), med katere spadata npr. *digitalna opcija* (angl. Digital option) ter *azijska opcija* (angl. Asian option). Postopek za izračun in pomen azijske opcije sta opisana v razdelku 4.3, kratek opis digitalne opcije pa lahko bralec najde v slovarju pojmov. Razvoj takšnih opcij je podprt s strani finančnih inženirjev, da bi zadostili specifičnim potrebam nekaterih udeležencev trga. Te opcije si bomo podrobneje ogledali kasneje.

Za lažje nadaljnje razumevanje bomo na tem mestu uvedli nekaj novih količin in si ogledali delovanje *evropske call opcije* na preprostem primeru:

- S_0 - začetna cena delnice oziroma cena delnice v trenutku 0
- S_T - cena delnice na datum (dan) zapadlosti opcije (glej *opombo 1*)
- C_0 - cena call opcije (premija)
- P_0 - cena put opcije (premija)
- K - izvršilna cena opcije
- T - čas do zapadlosti opcije (glej *opombo 1*)
- $g(S_T)$ - izplačilo opcije na dan zapadlosti

Opomba 1: Oznaka T je lahko za bralca dvoumna, zato jo je vredno dodatno pojasniti. Vsaka opcija ima po njenem nakupu omejeno življenjsko obdobje. Temu obdobju pravimo čas do zapadlosti opcije, kar označimo z oznako T. Ker je opcija vezana na neko delnico, moramo imeti tudi oznako za ceno te delnice na dan zapadlosti opcije. V ta namen uvedemo oznako S_T, ki nam pove, koliko znaša cena delnice na dan zapadlosti opcije - to je torej cena delnice po preteku časovnega obdobja T.

Primer 1: Predpostavimo, da optimistični investitor kupi *evropsko call opcijo* na delnice podjetja Microsoft s časom zapadlosti $T = 6$ mesecev in izvršilno ceno $K = 46\$$. Premija, ki jo plača za opcijo, znaša $C_0 = 1\$$.

Opomba 2: Zaradi lažjega izračuna upoštevamo, da nam zgornja opcija določa pravico do nakupa *ene* delnice. Če bi nam opcija določala pravico do nakupa večjega števila delnic, potem bi bil torej dobiček enak ustreznemu mnogokratniku dobička na eno delnico. Premija je vezana na opcijo(ne na število delnic, ki jih opcija določa!) in se na koncu odšteje od dobička. Ko odštejemo še premijo, dobimo čisti dobiček.

Na dan zapadlosti opcije sta možna dva scenarija:

1. Tržna cena delnice na dan zapadlosti znaša $S_T = 50\$$, zato se investitor odloči in izkoristi pravico do nakupa delnice po izvršilni ceni $K = 46\$$. Kupljeno delnico lahko nato takoj proda na trgu ter ustvari dobiček v višini $g(S_T) = S_T$ - K = 50\$ - 46\$ = 4\$. Ko odštejemo še plačano premijo, znaša čisti dobiček 4\$ - 1\$ = 3\$.

2. Tržna cena delnice na dan zapadlosti pade na $S_T = 40\$$. V tem primeru investitor pravice do nakupa delnice po izvršilni ceni ne bo izkoristil, opcija pa bo zapadla. Ne bi bilo namreč smiselno kupovati delnice po izvršilni ceni $K = 46\$$, če jo lahko na trgu kupimo ceneje po ceni 40\$. Tako opcija zapade, investitor pa izgubi plačano premijo v vrednosti 1\$.

Matematično gledano sta izplačili (brez upoštevanja premije) evropske call in put opcije sledeči:

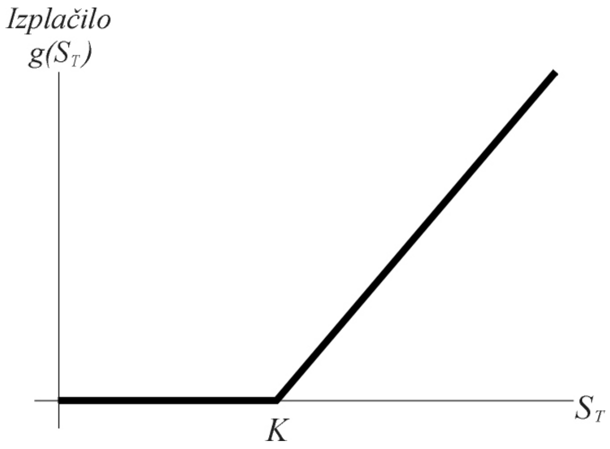
- **call opcija:** $g(S_T) = max\{0, S_T - K\} = \{S_T - K\}^+$
- **put opcija:** $g(S_T) = max\{0, K - S_T\} = \{K - S_T\}^+$

$$x^+ = \begin{cases} x & \text{, če } x \geq 0 \\ 0 & \text{, sicer} \end{cases}$$

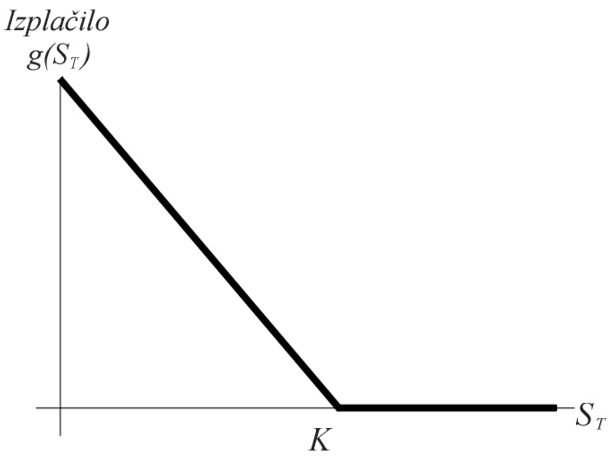
Opomba 3: Za izračun čistega dobička je potrebno od dobljenih izplačil odšteti še vrednost premije.

V 4. poglavju bomo v zvezi z izplačilom opcije omenili še pojem *notranje vrednosti opcije*. Poznavanje tega pojma zaenkrat ni potrebno, zato ga na tem mestu ne bomo podrobneje razlagali.

Spodnja grafa prikazujeta funkciji izplačila *call* in *put* opcije:



Slika 2.1: Funkcija izplačila *call opcije.* Dokler se cena delnice S_T giblje pod izvršilno ceno opcije K, je izplačilo opcije enako 0. Ko cena delnice naraste nad vrednost K, je izplačilo opcije neka pozitivna vrednost, odvisna od cene delnice S_T.



Slika 2.2: Funkcija izplačila *put opcije.* Če se cena delnice S_T giblje nad izvršilno ceno K, bo izplačilo opcije enako 0. Ko cena delnice pade pod vrednot K, je izplačilo opcije pozitivna vrednost, odvisna od cene delnice S_T.

Opomba 4: Grafa ne upoštevata plačila premije, zato je potrebno za izračun čistega dobička premijo odšteti od izplačila.

Spodnje tabele prikazujejo vse možne scenarije izplačil:

	Možni scenariji ob zapadlosti opcije		
	$\mathbf{S_T < K}$	$\mathbf{S_T = K}$	$\mathbf{S_T > K}$
Call izplačilo	0	0	$S_T - K$
Premija	$-C_0$	$-C_0$	$-C_0$
Zaslužek/Izguba	$-C_0$	$-C_0$	$S_T - K - C_0$

Tabela 2.1: [12]*Long call* (nakup pravice nakupa) - v najslabšem primeru lahko izgubimo vrednost premije, ki smo jo plačali za opcijo. Če na datum zapadlosti opcije cena delnice S_T presega izvršilno ceno opcije K, ustvarimo dobiček, zmanjšan za vrednost premije.

	Možni scenariji ob zapadlosti opcije		
	$\mathbf{S_T < K}$	$\mathbf{S_T = K}$	$\mathbf{S_T > K}$
Call izplačilo	0	0	$-(S_T - K)$
Premija	$+C_0$	$+C_0$	$+C_0$
Zaslužek/Izguba	$+C_0$	$+C_0$	$K - S_T + C_0$

Tabela 2.2: [12]*Short call* (prodaja pravice nakupa) - če cena delnice S_T ne preseže izvršilne cene opcije K ali ostane enaka, potem smo ustvarili dobiček v višini premije. Če cena delnice preseže izvršilno ceno opcije, vidimo, da je lahko izguba teoretično neskončna.

	Možni scenariji ob zapadlosti opcije		
	$\mathbf{S_T < K}$	$\mathbf{S_T = K}$	$\mathbf{S_T > K}$
Put izplačilo	$K - S_T$	0	0
Premija	$-P_0$	$-P_0$	$-P_0$
Zaslužek/Izguba	$K - S_T - P_0$	$-P_0$	$-P_0$

Tabela 2.3: [12]*Long put* (nakup pravice prodaje) - v najslabšem primeru izgubimo znesek v višini premije, ki smo jo plačali za opcijo. Dobiček ustvarimo v primeru, če cena delnice S_T pade pod izvršilno ceno opcije K.

	Možni scenariji ob zapadlosti opcije		
	$\mathbf{S_T < K}$	$\mathbf{S_T = K}$	$\mathbf{S_T > K}$
Put izplačilo	$-(K - S_T)$	0	0
Premija	$+P_0$	$+P_0$	$+P_0$
Zaslužek/Izguba	$S_T - K + P_0$	$+P_0$	$+P_0$

Tabela 2.4: [12]*Short put* (prodaja pravice prodaje) - če cena delnice S_T ne pade pod izvršilno ceno opcije K ali ostane enaka, potem ustvarimo dobiček v višini premije. Če cena delnice pade pod izvršilno ceno opcije, smo v izgubi.

Iz tabel je razvidno, da bi lahko *long call* in *long put* opcije udeležencem na trgu omogočale ustvarjanje dobička brez tveganja, če ne bi bilo potrebno za dane pravice plačati premije, tj., če bi bilo C_0=P_0=0.

V naslednjih poglavjih bomo torej skušali odgovoriti na sledeče vprašanje:

- Kako določiti vrednost opcije?

Poglavje 3

Vrednotenje opcij

3.1 Osnove vrednotenja

Pri vrednotenju opcij se vedno pojavlja problem oziroma vprašanje, kolikšno vrednost dodeliti opciji v nekem času. Če ne upoštevamo plačila premije, je jasno, da lahko tržni udeleženec z opcijami ustvari dobiček brez rizika. Ampak upoštevati moramo, da je potrebno za nakup oziroma lastništvo opcije plačati določeno ceno (premijo), ki nam kasneje omogoči izvršitev opcije na dan zapadlosti. Če je cena opcije previsoka, za ceno delnice pa predvidimo, da se ne bo zelo oddaljila od izvršilne cene, potem noben razumen trgovec takšne opcije ne bo kupil.

Namen vrednotenja opcij je ugotoviti *teoretično pravilno vrednost* call ali put opcije, upoštevajoč določene spremenljivke. Teoretična pravilna vrednost opcije je tista vrednost, ki nam jo izračuna nek matematični model za vrednotenje opcij, na podlagi podanih parametrov. O tem bomo več povedali v 4. poglavju. Marsikoga bo na tem mestu zmotil pojem „teoretična pravilna vrednost”. Izraza „praktična pravilna vrednost”v finančni terminologiji ne zasledimo, uporablja pa se izraz „tržna vrednost”ali „tržna cena”. Tržna vrednost opcije je tista vrednost, po kateri lahko opcijo kupimo na trgu v nekem trenutku. Teoretična pravilna vrednost opcije pa nam omogoča, da naredimo primerjavo s tržno vrednostjo in ocenimo, ali je glede na naše predpostavke o prihodnjem gibanju trga trenutna investicija smiselna.

Ker je vrednost oziroma cena opcije odvisna od veliko različnih spremenljivk, je vrednotenje opravilo, ki je lahko računsko zelo kompleksno. Kompleksnost izračunavanja vrednosti opcije se kaže predvsem v nujnosti poznavanja naprednejših področij matematične teorije, kot so stohastični procesi, verjetnostni račun, statistika in diskretna matematika.

Obstaja več modelov vrednotenja opcij, najbolj pogosti pa so naslednji:

- *Black-Scholes model*
- *Binomski model*
- *Modeli na osnovi metode Monte Carlo*

Velik korak na področju vrednotenja opcij je pomenila objava Black - Scholesove formule leta 1973. Objavila sta jo Fischer Black in Myron Scholes [14] in sicer na podlagi raziskav Roberta Mertona [14]. Za to delo so prejeli Nobelovo nagrado. Black - Scholesov model namreč predstavlja analitični pristop k vrednotenju opcij. Model je izčrpno predstavljen v [2].

John C. Cox, Stephen A. Ross in Mark Rubinstein so prav tako pomembno prispevali k teoriji vrednotenja opcij. Razvili so binomski model, poznan tudi kot CRR model [14]. Slednji je diskreten in temelji na stohastičnih procesih, v limiti pa aproksimira Black - Scholesovo zvezno rešitev [5].

V finančni matematiki se za vrednotenje opcij uporabljajo tudi modeli na osnovi metode Monte Carlo. Slaba stran teh modelov je počasnost izračunavanja rezultatov, zaradi tega se posledično metoda Monte Carlo uporablja kot skrajna rešitev. V nalogi zato tem modelom ne bomo posvečali pozornosti, zahtevnejši bralci pa si lahko o metodi Monte Carlo več preberejo v [5].

V diplomski nalogi, se bomo ukvarjali z diskretnim matematičnim modelom, ki mu pravimo tudi CRR binomski model. Slednji je zaradi svoje diskretne narave zanimiv z vidika razvoja računalniškega algoritma, v praksi pa se uporablja najpogosteje, saj je njegova implementacija dokaj preprosta.

Preden se začnemo pogovarjati o naprednejših vidikih vrednotenja opcij, se moramo v nadaljevanju najprej seznaniti s pojmoma *sedanja vrednost* (angl. present value) in *arbitraža* (angl. arbitrage).

3.1.1 Sedanja vrednost

Če nam nekdo ponudi možnost izbire med izplačilom 100 € danes ali pa 100 € čez 5 let, se bomo najverjetneje odločili za prvo možnost. Navsezadnje je 5 let dolga doba in zakaj bi na izplačilo čakali 5 let, če lahko enak znesek dobimo takoj danes? Za večino ljudi bi bila to popolnoma razumna odločitev. Če danes dobljenih 100 € tako ali drugače investiramo, lahko v prihodnjih 5 letih z obrestmi povečamo začetni znesek. Pravimo, da na tak način povečamo *prihodnjo vrednost* (angl. future value, FV) denarja.

Če poznamo *sedanjo vrednost* (angl. present value, PV), *letno obrestno mero* r in *število let obrestovanja* n, potem lahko izračunamo prihodnjo vrednost denarja, kot to prikazuje formula 3.1.

$$FV = PV \cdot (1 + r)^n \tag{3.1}$$

Ampak v praksi se večkrat srečamo s primeri, ko nas zanima *sedanja vrednost* denarja. Če prejmemo danes 100 €, je sedanja vrednost tega denarja seveda 100 €. Če pa bi teh 100 € prejeli npr. čez eno leto, potem sedanja vrednost tega zneska ni več 100 €, ker denarja še nimamo v rokah. Da bi našli ustrezno sedanjo vrednost 100 €, ki jih bomo prejeli čez eno leto, se moramo vprašati, koliko denarja bi morali investirati danes, da bi čez eno leto dobili 100 €. V tem primeru pravzaprav izračunamo, koliko denarja PV bi morali imeti danes, da bi z njim z danimi obrestmi r v danem času n dosegli neko dano prihodnjo vrednost FV, kar opisuje formula 3.2.

$$PV = \frac{FV}{(1 + r)^n} \tag{3.2}$$

V finančni terminologiji se $\frac{1}{(1+r)}$, ki se uporablja pri izračunu sedanje vrednosti PV, imenuje *letni diskontni faktor* (glej diskontni faktor). Zahtevano stopnjo donosa (obrestno mero) predstavlja r. Faktor $\frac{1}{(1+r)^n}$, se imenuje *faktor sedanje vrednosti* (angl. present value interest factor, PVIF), pogosto pa se zanj uporablja tudi termin *diskontni faktor* (angl. discount factor, DF). Slednji pri dani *diskontni stopnji* (angl. discount rate) in ob danem prihodnjem časovnem obdobju pove, kolikšna je pripadajoča sedanja vrednost ene denarne enote.

Faktor sedanje vrednosti $\frac{1}{(1+r)^n}$ temelji na *obrestnem obrestovanju* (angl. compound interest). V praksi pa se pogosto uporablja diskontiranje z *zveznim obrestovanjem* (angl. continuous interest). Zvezno obrestovanje je aproksimacija obrestnega obrestovanja pri velikih n. Izračun sedanje vrednosti z uporabo zveznega obrestovanja prikazuje formula 3.3.

$$PV = FVe^{-rn} \tag{3.3}$$

Izpeljimo formulo 3.3 iz formule 3.2.

Predstavljajmo si, da se obrestovanje zgodi t-krat na leto. Če imamo X €, ki smo jih pripravljeni investirati po letni obrestni meri r z obrestovanjem t-krat na leto, potem bo količina denarja, ki ga bomo prejeli po preteku n let $FV = PV(1 + r/n)^{nt}$. Potem bo formula za izračun sedanje vrednosti sledeča:

$$PV = \frac{FV}{(1+\frac{r}{t})^{tn}} \tag{3.4}$$

Trditev 1:

$$\lim_{s\to\infty}(1+\frac{1}{s})^s = e$$

Dokaz: Naj bo:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \text{ in } \lim_{x\to a} g(x) = +\infty$$

Če $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ obstaja, ali če je ta limita $+\infty$ oziroma $-\infty$, potem je:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Uvedemo novo spremenljivko: $w = 1/s$. Potem je $s = 1/w$. Ko to vstavimo v enačbo trditve 1, dobimo:

$$\lim_{s\to\infty}(1+\frac{1}{s})^s = \lim_{w\to 0}(1+w)^{1/w}$$

Uvedemo novo spremenljivko:

$$y = (1+w)^{1/w}$$

Če logaritmiramo obe strani prejšnje enačbe, dobimo:

$$\begin{aligned}\log y &= \log(1+w)^{1/w} \\ &= \frac{1}{w} log(1+w) \\ &= \frac{log(1+w)}{w}\end{aligned}$$

Dobimo:

$$\lim_{w\to 0} \log y = \lim_{w\to 0} \frac{\log(1+w)}{w}$$

Po L'Hospitalovem pravilu dobimo:

$$\lim_{w\to 0} \log y = \lim_{w\to 0} \frac{\log(1+w)}{w} = \lim_{w\to 0} \frac{1/(1+w)}{1} = 1$$

Pokazali smo, da $\log y \to 1$, ko $w \to 0$. Zveznost eksponentne funkcije pomeni, da $e^{\log y} \to e^1$, ko $w \to 0$. To pomeni, da $y \to e$, ko $w \to 0$. Z drugimi besedami to pomeni, da smo pokazali sledeče:

$$\lim_{s\to\infty} (1+\frac{1}{s})^s = \lim_{w\to 0} (1+w)^{1/w} = e$$

Trditev 2:

$$\lim_{t\to\infty} (1+\frac{r}{t})^{tn} = e^{rn}$$

Dokaz: Uvedemo novo spremenljivko $s = t/r$. Potem je $r/t = 1/s$ in $t = sr$. Tako dobimo:

$$\lim_{t\to\infty} (1+\frac{r}{t})^{tn} = \lim_{s\to\infty} (1+\frac{1}{s})^{srn} = \lim_{s\to\infty} [(1+\frac{1}{s})^s]^{rn}$$

Za trditev 1 smo dokazali, da je:

$$\lim_{s\to\infty}(1+\frac{1}{s})^s = e$$

Iz tega sledi, da je:

$$\lim_{s\to\infty}[(1+\frac{1}{s})^s]^{rn} = e^{rn}$$

Če se spomnimo, da je $s = t/r$, lahko naredimo zamenjavo:

$$\lim_{t\to\infty}[(1+\frac{r}{t})^{\frac{t}{r}}]^{rn} = \lim_{t\to\infty}(1+\frac{r}{t})^{tn} = e^{rn}$$

Ustrezno vstavimo e^{rn} v formulo 3.4 in vidimo, da formula za izračun sedanje vrednosti tako postane:

$$PV = \frac{FV}{e^{rn}} = FVe^{-rn}$$

Če povzamemo, vidimo, da je pregovor „čas je denar"osnovan na trdnih temeljih. Vrednost denarja, ki ga imamo sedaj, ni enaka njegovi vrednosti v prihodnosti in obratno. Če znamo izračunati sedanjo in prihodnjo vrednost denarja, pravimo tudi, da znamo določiti *časovno vrednost denarja*. Sposobnost določitve časovne vrednosti denarja je pomembna, saj se lahko le tako modro odločamo med različnimi naložbami, ki nam ponujajo donose v različnem času. Kot bomo videli v kasnejših poglavjih, bomo to potrebovali pri računanju vrednosti opcij. Bralec lahko nazorno ilustracijo časovne vrednosti denarja najde na začetku tega razdelka, kjer smo opisali, kako določimo sedanjo in prihodnjo vrednost denarja.

3.1.2 Arbitraža

Arbitraža (angl. arbitrage) je izkoriščanje tečajnih razlik istega instrumenta na različnih trgih. Najpogostejši vrsti arbitraže sta *arbitraža vrednostnih papirjev* ter *devizna arbitraža*, poznamo pa tudi *obrestno arbitražo*, pri kateri gre za izkoriščanje razlik v obrestnih merah na istovrstne kredite v različnih državah.

Shreve [3] arbitražo definira kot trgovalno strategijo, ki se začne brez začetne vsote denarja, ima ničelno verjetnost izgube denarja ter pozitivno verjetnost zaslužka.

Matematično bi rekli, da je na trgu prisotna možnost arbitraže, če obstaja trgovalna strategija δ, tako da velja [5]:

- $V^{\delta}(0) = 0$....začetna vsota denarja je enaka nič
- $V^{\delta}(T) \geq 0$....ničelna verjetnost izgube
- $P[V^{\delta}(T) > 0] > 0$ za nek $T > 0$....pozitivna verjetnost zaslužka

kjer $V^{\delta}(t)$ pomeni vrednost premoženja v trenutku t pri uporabi trgovalne strategije δ, P pa označuje verjetnost.

Takšno trgovanje (uporaba arbitraže) je v nasprotju z načelom učinkovitega trga, ki pravi, da če lahko s trgovalno strategijo ustvarimo nekaj iz nič, potem moramo v zakup vzeti tudi možnost izgube [3]. Na trgu sicer pride do trenutkov, ko se pojavi priložnost za arbitražo, vendar je takšna možnost hitro odkrita. Zaradi tehnološkega napredka na področju informacijskih tehnologij lahko profesionalni borzni udeleženci na takšne dogodke hitro reagirajo in s tem možnost arbitraže tudi odpravijo.

Ker arbitražne priložnosti na trgu ne morejo biti dolgo prisotne, se v standardnih modelih privzame, da na trgu arbitražnih priložnosti ni. Matematičnega modela, ki bi dopuščal možnost arbitraže, zaradi tega ne moremo uporabiti za analizo.

3.2 Preprosti diskretni modeli

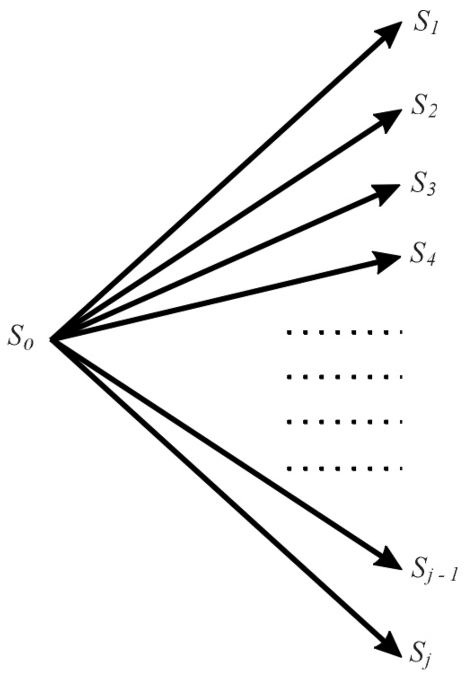
V tem razdelku si bomo ogledali preproste diskretne matematične modele za vrednotenje opcij. Ti preprosti modeli nam bodo koristili kot uvod v bolj kompleksne modele vrednotenja. Ogledali si bomo tudi izračun *replikacijskega portfelja* (angl. replicating portfolio), ki nam bo kasneje služil kot osnova pri razvoju kompleksnejšega diskretnega modela za vrednotenje opcij.

Opomba 5: Od sedaj naprej bomo v nalogi večkrat potrebovali oznake za časovne trenutke in obdobja. V *opombi 1* smo rekli, da čas do zapadlosti opcije označimo s T. Ker skozi življenjsko obdobje opcije opazujemo premike cene delnice v posameznem trenutku (od nakupa do dneva zapadlosti opcije), moramo tudi za to uvesti ustrezne oznake. Zato bomo rekli, da časovne trenutke od nakupa do zapadlosti opcije označimo s t (npr. $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$, ...). Na dan zapadlosti opcije (po preteku časovnega obdobja T), bo $t = T$. Če npr. traja življenjsko obdobje opcije od trenutka 0 do trenutka 1, potem bomo trenutek 0 označili s $t = 0$, trenutek 1 pa s $t = T = 1$. Če bo torej oznaka T v nalogi uporabljena kot trenutek, bomo vedeli, da gre za oznako trenutka na dan zapadlosti opcije. Da ne bi prišlo do nesporazumov, bo vedno eksplicitno navedeno, kdaj uporabljamo T kot življenjsko obdobje opcije in kdaj za trenutek (dan zapadlosti opcije).

3.2.1 Enoperiodni model

Najpreprostejši model predpostavlja, da se cena instrumenta spremeni samo enkrat, kar pomeni, da upoštevamo samo dva datuma - začetnega in končnega. Instrument S ima na začetku v trenutku $t = 0$ vrednost $S(0) = S_0$, po preteku nekega obdobja, v trenutku $t = T = 1$, pa ima končno vrednost $S(1)$. Če gre za tvegani instrument(npr. delnico), potem je $S(1)$ naključna spremenljivka, katere vrednost bo razkrita v trenutku $T = 1$. Takšnemu modelu pravimo *enoperiodni model* (angl. single-period model).

Glede na namen uporabe enoperiodnega modela je naključna spremenljivka $S(1)$ zasnovana tako, da lahko zavzame dve ali več različnih vrednosti. Predpostavimo, da je $S(1)$ naključna spremenljivka, ki lahko zavzame $j \geq 2$ možnih vrednosti $S_1, \ldots\ldots, S_j$, z verjetnostmi $p_i = P[S(1) = S_i]$, kjer je $1 \leq i \leq j$ in $p_i > 0$ za $\forall i$. Lahko si torej predstavljamo neko množico dogodkov i v trenutku $T = 1$, pri čemer ima vsak dogodek pozitivno verjetnost. Če se zgodi dogodek i, potem je $S(1) = S_i$.



Slika 3.1: Enoperiodni model - cena lahko v času $T = 1$ zavzame katerokoli od j možnih vrednosti.

Ponavadi predpostavljamo, da obstaja na trgu netvegan instrument B (obveznica ali bančni račun) tako, da velja: $B_0 = 1$ in $B_1 \geq B_0$. Notacija $B_0 = 1$ pomeni, da je v trenutku 0 ena enota tega instrumenta (npr. bančnega računa ali ene obveznice) vredna eno denarno enoto. B_1 je vrednost v trenutku 1 in sicer ene denarne enote, ki smo jo vložili v banko v trenutku 0. Če z r označimo bančno obrestno mero v tem obdobju, dobimo

$$B_0 + rB_0 = B_1, \tag{3.5}$$

obrestno mero r pa na podlagi znanega B_1 določi formula

$$r = B_1 - 1. \tag{3.6}$$

Predpostavimo sedaj model trga, v katerem imamo N tveganih instrumentov ali delnic $S_1, ..., S_N$ in nek garantiran finančni instrument B z vnaprej določeno fiksno obrestno mero. Investitor v nekem trenutku te instrumente kupi - rečemo tudi, da v njih zavzame pozicijo. Ker je model enoperiodni, pomeni, da se nakup posameznega instrumenta izvrši samo enkrat, v trenutku 0. Vrednost teh pozicij v trenutku T označimo z V_T, pri čemer je začetni razpoložljivi kapital investitorja v času 0 enak V_0. Označimo z y_i,

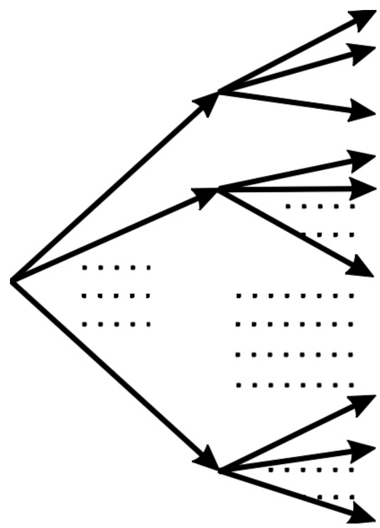
$i = 1, ..., N$, količino posameznega tveganega instrumenta, ki ga investitor hrani v portfelju med trenutkom 0 in trenutkom 1. Z x označimo količino denarja, investiranega na bančni račun v trenutku 0. Vrednost investitorjevega portfelja bo ob koncu danega časovnega obdobja enaka

$$V_1 = xB_1 + y_1 S_1(1) + ... + y_N S_N(1) \tag{3.7}$$

Vrednost portfelja v trenutku $T = 1$ je torej vsota količin posameznih naložb, pomnoženih z njihovimi vrednostmi v trenutku $T = 1$.

3.2.2 Večperiodni model

Večperiodni model (angl. multi-period model) je razširitev enoperiodnega modela. Pri teh modelih časovno obdobje preprosto razdelimo na več manjših intervalov (korakov), pri čemer je vsak interval modeliran kot enoperiodni.



Slika 3.2: Dvoperiodni model s končno mnogo stanji. Pri takšnem modelu torej razdelimo časovno obdobje do zapadlosti opcije na več časovnih korakov. Vsak korak je modeliran kot enoperiodni.

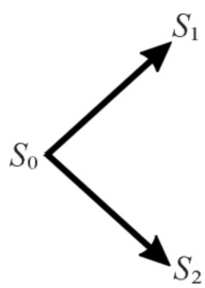
Zelo znan je stohastični večperiodni model, imenovan *CRR (Cox - Ross - Rubinstein) model*. Ta se v praksi pogosto uporablja, hkrati pa je dokaj preprost za implementacijo v smislu izračunavanja ter simuliranja cen IFI. Podrobneje si ga bomo ogledali v zadnjem poglavju, ko bomo z njegovo pomočjo razvili algoritem za izračun vrednosti evropske opcije.

3.2.3 Replikacija portfelja

Če se izplačilo nekega portfelja, sestavljenega iz delnic in gotovine, ujema z izplačilom opcije, potem pravimo, da portfelj *replicira* (glej *replikacijski portfelj*) opcijo. Če je izplačilo portfelja enako izplačilu opcije, potem lahko sklepamo, da mora biti tudi njegova začetna cena enaka ceni opcije. Tako lahko ugotovimo, koliko stane konstrukcija portfelja, katerega končno izplačilo bo v trenutku $T = 1$ enako izplačilu opcije. S tem bi ugotovili tudi pošteno sedanjo vrednost opcije.

Na ta način lahko izplačilo opcije repliciramo z linearno kombinacijo delnic in netveganega instrumenta s fiksno obrestno mero. Netvegan instrument s fiksno obrestno mero je bodisi *obveznica*, bodisi *gotovina* v smislu bančnega depozita.

V skladu s formulacijo enoperiodnega modela lahko vzamemo preprost model, kjer imamo na voljo delnico, katere vrednost bo v trenutku $t = 0$ enaka S_0. V trenutku $T = 1$ bo delnica lahko zavzela vrednosti S_1 ali S_2, kot to prikazuje slika 3.3. Spomnimo se, da lahko v enoperiodnem modelu cena delnice v trenutku $T = 1$ zavzame dve ali več različnih vrednosti. Ker se bomo kasneje ukvarjali z binomskimi modeli, bomo za izračun, ki sledi, predpostavili, da lahko cena delnice v trenutku T=1 zavzame dve vrednosti. V resnici lahko cena v nekem trenutku zavzame le eno vrednost, vendar moramo v matematičnih modelih predpostavljati, da lahko cena zavzame katerokoli od možnih vrednosti. Izplačilo opcije v trenutku $T = 1$ bo $g(S_1)$ ali $g(S_2)$ v odvisnosti od cene delnice v trenutku $T = 1$.



Slika 3.3: V času $T = 1$ lahko delnica zavzame vrednosti S_1 ali S_2.

Izračun replikacijskega portfelja bomo povzeli iz [8]. Predpostavimo portfelj, ki je sestavljen iz x gotovine in y delnic. V trenutku $T = 1$ bo imel portfelj vrednost:

$$x(1+r) + yS_1 \tag{3.8}$$

ali

$$x(1+r) + yS_2 \tag{3.9}$$

V prvem odstavku tega razdelka smo pojasnili, da lahko ceno oziroma vrednost opcije določimo tako, da ustvarimo replikacijski portfelj, sestavljen iz delnic in gotovine. Da bi določili ceno opcije, moramo ustvariti takšen portfelj, da bo njegovo izplačilo enako izplačilu opcije. Tedaj bo tudi cena portfelja enaka ceni opcije. Če želimo ugotoviti ceno takšnega portfelja, moramo izračunati, koliko delnic y in koliko gotovine x potrebujemo v trenutku $t = 0$, da lahko takšen portfelj ustvarimo. Nastaviti moramo enačbo, in sicer tako, da bo na eni strani izplačilo portfelja, na drugi strani pa izplačilo opcije. Ker lahko cena delnice v trenutku $T = 1$ zavzame vrednosti S_1 ali S_2, izberemo portfelj (x, y) tako, da velja sistem linearnih enačb:

$$x(1+r) + yS_1 = g(S_1) \tag{3.10}$$

$$x(1+r) + yS_2 = g(S_2) \tag{3.11}$$

Ko enačbi odštejemo, dobimo:

$$y(S_1 - S_2) = g(S_1) - g(S_2) \tag{3.12}$$

$$y = \frac{g(S_1) - g(S_2)}{S_1 - S_2} \tag{3.13}$$

Izraženi y vstavimo v enačbo 3.10 in dobimo:

$$x(1+r) + \frac{g(S_1) - g(S_2)}{S_1 - S_2} S_2 = g(S_2) \tag{3.14}$$

$$x(1+r) = g(S_2) - \frac{g(S_1) - g(S_2)}{S_1 - S_2} S_2 \tag{3.15}$$

$$x = \frac{g(S_2) - \frac{g(S_1) - g(S_2)}{S_1 - S_2}}{1+r} \tag{3.16}$$

$$x = \frac{g(S_2)S_1 - g(S_1)S_2}{(S_1 - S_2)(1+r)} \tag{3.17}$$

Dobljeni enačbi za x in y nam povesta, koliko delnic in koliko gotovine potrebujemo v trenutku $t = 0$, da bo v trenutku $T = 1$ izplačilo portfelja (x, y) enako izplačilu opcije. Če se izplačilo portfelja ujema z izplačilom opcije, potem to pomeni, da mora biti tudi cena portfelja enaka ceni opcije. Upoštevajoč princip *arbitraže* (glej razdelek 3.1.2), morata biti vrednosti portfelja in opcije v trenutku $t = 0$ enaki, saj bi drugače na trgu obstajala možnost zaslužka brez tveganja. Rečemo, da smo s portfeljem (x, y) replicirali opcijo, portfelju (x, y) pa pravimo *replikacijski portfelj* (angl. replicating portfolio). V finančnem izrazoslovju se uporablja tudi izraz *„hedge"*, saj se s tem pisec opcije zaščiti za primer poravnave prihodnjih obveznosti.

Kot smo rekli, je cena opcije v trenutku $t = 0$ enaka ceni portfelja (x, y) v trenutku $t = 0$, kar lahko zapišemo z enačbo:

$$V_0 = x + yS_0 \tag{3.18}$$

oziroma

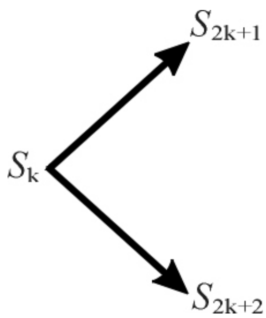
$$V_0 = \frac{g(S_2)S_1 - g(S_1)S_2}{(S_1 - S_2)(1+r)} + \frac{g(S_1) - g(S_2)}{S_1 - S_2} S_0 \tag{3.19}$$

Pokažimo, da zgornji izračun velja tudi za model z več časovnimi obdobji. Naj bo vrednost delnice v trenutku $t = n - 1$ enaka S_k. V trenutku $T = n$ lahko torej cena te delnice zavzame vrednosti S_{2k+1} ali S_{2k+2}, kot sledi iz drevesa na sliki 3.4.

Sestavimo portfelj (x_{n-1}, y_{n-1}) tako, da bo veljalo:

$$x_{n-1}(1+r) + y_{n-1}S_{2k+1} = g(S_{2k+1}) \tag{3.20}$$

$$x_{n-1}(1+r) + y_{n-1}S_{2k+2} = g(S_{2k+2}) \tag{3.21}$$



Slika 3.4: Cena delnice lahko v naslednji časovni periodi zavzame vrednosti S_{2k+1} ali S_{2k+2}

Izrazimo x_{n-1} in y_{n-1}:

$$y_{n-1} = \frac{g(S_{2k+1}) - g(S_{2k+2})}{S_{2k+1} - S_{2k+2}} \tag{3.22}$$

$$x_{n-1} = \frac{g(S_{2k+2})S_{2k+1} - g(S_{2k+1})S_{2k+2}}{(S_{2k+1} - S_{2k+2})(1+r)} \tag{3.23}$$

V trenutku $t = n - 1$ lahko torej sestavimo portfelj, katerega izplačilo bo v trenutku $T = n$ enako izplačilu opcije. Kot vemo, smo na ta način dobili vrednost opcije v trenutku $t = n - 1$.

Z enakim razmislekom določimo tudi vrednost opcije v trenutku $t = n - 2$:

$$y_{n-2} = \frac{g(S_k) - g(S_{k+1})}{S_k - S_{k+1}} \tag{3.24}$$

$$x_{n-2} = \frac{g(S_{k+1})S_k - g(S_k)S_{k+1}}{(S_k - S_{k+1})(1+r)} \tag{3.25}$$

S ponavljanjem postopka lahko rekurzivno določimo vrednosti opcij tudi v času $t = n - 3, ..., 0$.

3.3 Eksotične opcije

Ko smo v prvem poglavju govorili o ameriških in evropskih opcijah, nismo omenili, da so to t.i. *standardizirane opcije* (angl. standardized options). To pomeni, da so parametri opcije določeni v skladu z nekimi standardi. Določena je npr. vrsta opcije (ameriška ali evropska), velikost pogodbe (količina osnovnega instrumenta), datum zapadlosti, izvršilna cena in provizije.

Poznamo pa tudi *eksotične opcije*, ki spadajo med *nestandardizirane finančne produkte* (angl. unstandardized financial products). To pomeni, da so narejene z namenom, da bi zadostile specifičnim potrebam določenih udeležencev trga. Razvijajo jih inženirji v skladu z zahtevami vlagateljev. Razvoj teh opcij je sprožil interes po ožje usmerjenih produktih za naložbena zavarovanja in upravljanja s tveganji. Razvoj matematično kompleksnih eksotičnih opcij je omogočil tudi napredek informacijskih tehnologij in strmo povečevanje zmogljivosti računalnikov, ki omogočajo obdelavo velikih količin podatkov. Eden od razlogov za njihovo priljubljenost pa so tudi nižje premije glede na sorodne standardizirane produkte. Obstaja več vrst eksotičnih opcij, kot so npr. *azijske opcije*, *lookback opcije* in *digitalne opcije.* Slednjim rečemo tudi *binarne opcije.* Splošne smernice za izračun vrednosti azijske opcije si bomo ogledali v 4. poglavju, v razdelku 4.3.

Poglavje 4

Algoritmi

To poglavje je namenjeno opisu razvoja konkretnega računalniškega algoritma, ki nam bo za izbrane parametre izračunal tako potek cen osnovnega instrumenta kot tudi vrednost opcije. Algoritem bomo razvili na podlagi diskretnega matematičnega modela, ki mu pravimo *binomski model*.

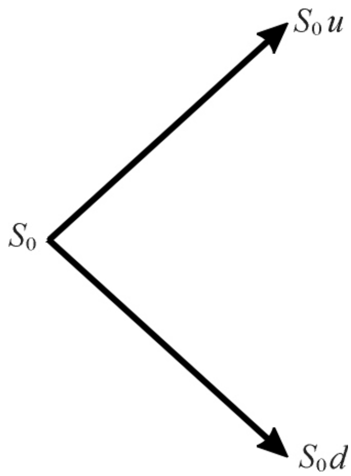
4.1 Binomski modeli

Binomski modeli (angl. binomial models) temeljijo na predpostavki, da vrednost osnovnega instrumenta sledi evoluciji cen tako, da cena v vsakem intervalu naraste ali pade za fiksen faktor. Z uporabo *binomskih dreves* (angl. binomial trees) lahko na ta način predvidimo in prikažemo vse možne vrednosti osnovnega instrumenta vse do datuma zapadlosti opcije. Kot bomo videli v nadaljevanju, lahko s pomočjo takšnega predvidevanja evolucije cen osnovnega instrumenta posledično izračunamo tudi vrednosti opcije. Binomska metoda je torej preprosta numerična tehnika za aproksimacijo cene evropske opcije. Vrednost evropske opcije lahko aproksimiramo z uporabo rekurzivnega algoritma, ki ga bomo razvili v razdelku 4.1.1, njegovo implementacijo pa si bomo ogledali v razdelku 4.2.2. Preden preidemo na implementacijo algoritma, si moramo ogledati podrobnejše principe delovanja CRR binomskega modela.

4.1.1 CRR model

Binomski model je pomemben večperiodni diskretni matematični model (glej razdelek 3.2.2). Pravimo mu tudi *CRR (Cox - Ross - Rubinstein) model*. Ker se v praksi pogosto uporablja in je preprost za implementacijo, si ga oglejmo podrobneje.

Spet predpostavimo, da imamo na voljo nek tvegan osnovni instrument (delnico) in bančni račun (gotovino) z garantirano obrestno mero. Naj bo S_0 trenutna cena delnice v trenutku $t = 0$. Po preteku nekega časa T lahko cena delnice zavzame le dve vrednosti: S_0u in S_0d, kjer sta u in d realni števili, tako da velja $u > d$. Cena instrumenta se lahko v nekem času poveča za faktor u ali zmanjša za faktor d.



Slika 4.1: Enoperiodni binomski CRR model - cena delnice lahko v naslednji periodi zavzame vrednost S_0u ali S_0d.

Če opazujemo enoperiodni binomski model, lahko vidimo, da lahko cena delnice v trenutku $T = 1$ zavzame le vrednosti S_0u ali S_0d. Izplačilo opcije označimo z $g(S_T)$. V trenutku $T = 1$ bi imeli izplačili $g(S_0u)$ ali $g(S_0d)$.

Če bi model razširili na več časovnih obdobij, bi opazovali cene delnice od trenutka $t = 0$ do $t = T$. Če razširimo enoperiodni model na sliki 4.1, ni težko ugotoviti, da bi cena delnice v trenutku $t = 2$ lahko zavzela eno od treh možnih vrednosti: S_0u^2, S_0ud ter S_0d^2. Enako razmišljamo tudi v trenutku $t = 3$, $t = 4$,...,$t = T$. V trenutku $t = 3$ bi lahko delnica zavzela eno od štirih možnih vrednosti: S_0u^3, S_0u^2d, S_0ud^2 ter S_0d^3.

Spomnimo se, da smo pri izračunu replikacijskega portfelja ugotavljali, koliko delnic y in koliko gotovine x potrebujemo v trenutku $t = 0$, da bo izplačilo portfelja enako izplačilu opcije. V ta namen smo izpeljali enačbi 3.13 in 3.17, za kateri ne škoduje, če jih ponovimo:

$$y = \frac{g(S_1) - g(S_2)}{S_1 - S_2}$$

$$x = \frac{g(S_2)S_1 - g(S_1)S_2}{(S_1 - S_2)(1 + r)}$$

Splošni izračun replikacijskega portfelja (angl. replicating portfolio, poglavje 3.2.3) dopolnimo oziroma spremenimo v skladu z zgornjo formulacijo CRR modela (slika 4.1), s to razliko, da uporabimo diskontiranje z zveznim obrestovanjem. Možni vrednosti delnic v trenutku $T = 1$ (S_1 in S_2) nadomestimo s S_0u in S_0d. Diskontni faktor ne bo več $1/(1+r)$, temveč e^{-rT}.

$$y = \frac{g(S_0u) - g(S_0d)}{S_0u - S_0d} \tag{4.1}$$

$$x = e^{-rT}\frac{g(S_0d)u - g(S_0u)d}{u - d} \tag{4.2}$$

Spomnimo se, da pri uporabi zveznega obrestovanja pomeni r letno obrestno mero, T pa pomeni neko časovno obdobje (v našem primeru je to čas do zapadlosti opcije).

Sedanja vrednost opcije V_0 postane:

$$V_0 = yS_0 + x \tag{4.3}$$

$$= \frac{g(S_0u) - g(S_0d)}{S_0u - S_0d}S_0 + e^{-rT}\frac{g(S_0d)u - g(S_0u)d}{u - d} \tag{4.4}$$

$$= \frac{g(S_0u) - g(S_0d)}{u - d} + e^{-rT}\frac{g(S_0d)u - g(S_0u)d}{u - d} \tag{4.5}$$

$$= \frac{g(S_0u) - g(S_0d) + e^{-rT}(g(S_0d)u - g(S_0u)d)}{u - d} \tag{4.6}$$

Vpeljemo novo spremenljivko:

$$q = \frac{e^{rT} - d}{u - d} \tag{4.7}$$

Vrednost q je verjetnost, da bo cena delnice narasla na S_0u. Torej je $1-q$ verjetnost, da bo cena padla na S_0d.

Vrednost opcije v trenutku t=0 lahko izrazimo kot:

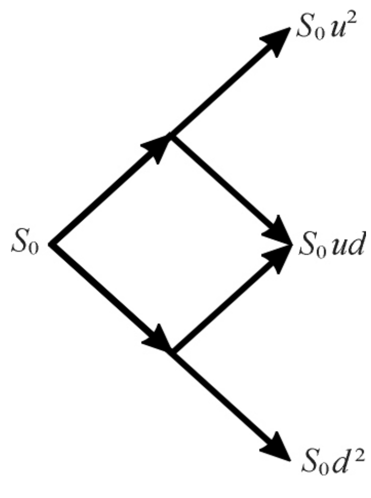
$$V_0 = e^{-rT}(q \cdot g(S_0u) + (1-q) \cdot g(S_0d)) \tag{4.8}$$

Če uvedemo novi oznaki $g_u = g(S_0u)$ in $g_d = (S_0d)$, lahko formulo 4.8 zapišemo enostavneje kot:

$$V_0 = e^{-rT}(q \cdot g_u + (1-q) \cdot g_d) \tag{4.9}$$

Posplošitev na N period:

Posplošimo sedaj razmišljanje na večperiodni binomski model. Časovno obdobje do zapadlosti opcije razdelimo na več period (korakov), tako da bo $T = N\Delta t$.
Za lažjo predstavo si kot primer zamislimo dvoperiodni binomski model, kot ga prikazuje slika 4.2:



Slika 4.2: Dvoperiodni binomski CRR model.

V tem primeru je čas do zapadlosti opcije razdeljen na $N = 2$ enaka časovna koraka, tako da je $T = 2\Delta t$. Binomsko drevo ima sedaj v listih tri možne končne vrednosti (S_0u^2, S_0ud, S_0u^2), ki jih lahko delnica zavzame v trenutku $t = T = 2\Delta t$. Možna izplačila opcije so zato:

$$g_u = g(S_0u^2) \tag{4.10}$$

$$g_m = g(S_0ud) \tag{4.11}$$

$$g_d = g(S_0d^2) \tag{4.12}$$

Enako kot pri enoperiodnem modelu uporabimo že razvito formulo 4.9 in v času $T = \Delta t$ dobimo vrednosti opcije:

$$V_1^u = e^{-r\Delta t}(q \cdot g_u + (1-q) \cdot g_m) \tag{4.13}$$

$$V_1^d = e^{-r\Delta t}(q \cdot g_m + (1-q) \cdot g_d) \tag{4.14}$$

Nad izračunanima vrednostma V_1^u in V_1^d uporabimo formulo 4.9 še enkrat in dobimo:

$$V_0 = e^{-r\Delta t}(q \cdot V_1^u + (1-q) \cdot V_1^d) \tag{4.15}$$

$$= e^{-rT}(q^2 \cdot g(S_0u^2) + 2q \cdot (1-q) \cdot g(S_0ud) + (1-q)^2 \cdot g(S_0d^2)) \tag{4.16}$$

ali

$$V_0 = e^{-rT} \sum_{j=0}^{2} q^j (1-q)^{2-j} g(S_0 u^j d^{2-j}) \tag{4.17}$$

Kot zanimivost lahko v enačbah 4.9 in 4.16 opazimo zaporedje koeficientov $1, 1$ ter $1, 2, 1$. Z nadaljevanjem postopka lahko vidimo, da gre za zaporedje binomskih koeficientov. To je *Pascalov trikotnik*, ki ga prikazuje slika 4.3.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

Slika 4.3: Pascalov trikotnik. V vsaki vrstici od zunaj začnemo z enicami, nato pa seštevamo sosednji števili in vsoto pišemo pod njima [10].

Izračun binomskega koeficienta si bomo ogledali v razdelku 4.2.2, kjer bomo več povedali o algoritmu za vrednotenje evropskih opcij.

Če zadnjo enačbo (4.17) posplošimo na N period, dobimo $N-$ *periodni* model, kjer je $T = N\Delta t$, enačba pa se glasi:

$$V_0 = e^{-rT}\sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j}q^j(1-q)^{N-j}g(S_0u^jd^{N-j}) \tag{4.18}$$

Dokaz posplošitve:

Na podlagi doslej znanih dejstev o CRR modelu vemo, da lahko izplačila v vsakem vozlišču v $N-$ *periodnem* modelu izrazimo kot funkcijo izplačil v $N+1-$ *periodnem* modelu:

$$g(S_0u^jd^{N-j}) = e^{-r\Delta t}(qg(S_0u^{j+1}d^{N-j}) + (1-q)g(S_0u^jd^{N+1-j})) \tag{4.19}$$

Če vstavimo rezultat enačbe 3.19 v 3.18, dobimo:

$$\begin{aligned} V_0 &= e^{-r(T+\Delta t)}q^{N+1}g(S_0u^N) \\ &+ e^{-r(T+\Delta t)}\sum_{j=1}^{N}\left[\binom{N}{j}+\binom{N}{j-1}\right]q^j(1-q)^{N-j}g(S_0u^jd^{N-j}) \\ &+ e^{-r(T+\Delta t}(1-q)^{N+1}g(S_0d^N) \end{aligned} \tag{4.20}$$

Pascalovo pravilo pravi, da velja:

$$\binom{N}{j}+\binom{N}{j-1}=\binom{N+1}{j} \tag{4.21}$$

Enačba 4.20 tako postane:

$$V_0 = e^{(-r(N+1)\Delta t)} \sum_{j=0}^{N} \binom{N+1}{j} q^j (1-q)^{N+1-j} g(S_0 u^j d^{N+1-j}) \tag{4.22}$$

Zgornja enačba potrjuje, da formula 4.18 velja za $N+1-periodni$ model. Po principu *indukcije* je tako formula 4.18 veljavna tudi za $N-periodni$ model.

Iz enačbe 4.18 pa lahko razberemo še to, da smo dobili posplošeno funkcijo vseh možnih izplačil opcije v posameznih časovnih trenutkih $g(S_0 u^j d^{N-j})$. Funkcijo $g(S_T)$ smo že 2. poglavju definirali kot funkcijo izplačila opcije v odvisnosti od cene delnice na dan zapadlosti opcije. Vendar, ker v binomskem drevesu predstavimo razvoj cen delnice za več časovnih trenutkov, to pomeni, da lahko za vsak časovni trenutek do zapadlosti opcije izračunamo izplačilo opcije. V enačbi 4.18 je funkcija izplačila za posamezne časovne trenutke definirana kot $g(S_0 u^j d^{N-j})$. Za boljšo predstavo odvisnosti izplačila opcije od cene delnice naj se bralec vrne na sliko 4.2, kjer smo na primeru dvoperiodnega binomskega modela prikazali, kako dobimo funkcije izplačila opcije v odvisnosti od cene delnice. Ker je izplačilo opcije funkcija gibanja cen delnice, smo implicitno dobili tudi formulo za izračun poteka cen delnice skozi celotno življenjsko obdobje opcije:

$$S_0 u^j d^{N-j} \tag{4.23}$$

Več o uporabi formule bomo povedali v razdelku 4.2.1.

4.2 Implementacija CRR modela

Doslej smo govorili o binomskih modelih in njihovem delovanju, sedaj pa si bomo ogledali njihovo implementacijo.

Vrednotenje opcij z binomskimi modeli bomo implementirali s pomočjo orodja *Matlab*. Matlab je visoko nivojski jezik, ki omogoča hitro in učinkovito reševanje računsko zahtevnih problemov, kot sta npr. procesiranje signalov ter finančno modeliranje. Odločitev zanj je smotrna, ker nam omogoča hitrejše reševanje računskih problemov, kot tradicionalni programski jeziki.

Ko govorimo o (hitrejšem) reševanju problemov, imamo v mislih enostavnost programiranja. Jezik Matlab namreč podpira enostavno manipuliranje z matrikami in vektorji, ki predstavljajo temelj reševanja inženirskih in znanstvenih problemov. Kot bomo videli v nadaljevanju, je tako prikaz razvoja cen delnice, kot tudi vrednosti opcij prikazan v matrični obliki. Poleg tega v jeziku Matlab odpade potreba po definiranju spremenljivk, specificiranju podatkovnih tipov in alokaciji pomnilnika. Zaradi tega lahko ena vrstica kode v jeziku Matlab pogosto nadomesti več vrstic kode v tradicionalnih programskih jezikih, kot sta C in C++.

4.2.1 Določitev poteka cen osnovnega instrumenta

Preden lahko izračunamo sedanjo vrednost opcije, moramo prikazati razvoj cen delnice skozi življenjsko obdobje opcije. V ta namen bomo konstruirali binomsko drevo, ki smo ga predstavili v razdelku 4.2. Konstrukcija binomskega drevesa je nujna, ker le tako vidimo vse vrednosti, ki jih lahko delnica zavzame na datum zapadlosti opcije. Te vrednosti so predstavljene v listih drevesa (glej tabelo 4.1 oz. sliko 4.4). Če poznamo vrednosti delnice na datum zapadlosti opcije, lahko posledično preprosto izračunamo tudi vrednosti opcije za vsakega od možnih izidov cene delnice. Izidi cene delnice pomenijo vse možne vrednosti, ki jih lahko delnica zavzame na dan zapadlosti opcije. Tu je namreč vrednost opcije enaka njeni *notranji vrednosti* (angl. intrinsic value). O notranji vrednosti opcije bomo več povedali v razdelku 4.2.2, sedaj pa si poglejmo algoritem za izračun poteka cen delnice do zapadlosti opcije.

Izračun poteka cen delnice od nakupa do zapadlosti opcije:

```
function cena = cena_osnovnega_instrumenta(S0,r,T,sigma,N)
% S0 - začetna cena delnice
% r - obrestna mera
% T - čas do zapadlosti opcije
% sigma - volatilnost delnice na letni ravni
% N - število korakov

dt=T/N; % dolžina posameznega koraka
u=exp(sigma*sqrt(dt)); % faktor u
d=1/u; % faktor d

% matrika ničel
A=zeros(N+1,N+1);

% izračun poteka cen delnice
for i=1:length(A)
  for j=1:i
    A(i,i-j+1) = S0*u^(j-1)*d^(i-j);
```

```
19   end
20      fprintf('\n')
21 end
22
23 % matrika cen delnice
24 A=A'
25
26 % grafični prikaz binomskega drevesa cen delnice
27 risi(A)
```

Algoritem 4.1: Algoritem, ki z uporabo binomskega modela na podlagi formule 4.23 izračuna potek cen delnice skozi časovno obdobje opcije (glej razdelek 4.1.1). Funkcija za izbrane parametre izpiše matrično predstavitev poteka cen in na osnovi matrike cen prikaže binomsko drevo v grafični obliki.

Opis Algoritma 4.1:

Funkcija *cena_osnovnega_instrumenta* na podlagi vhodnih parametov vrne binomsko drevo cen delnice v matrični obliki. Na podlagi izračunanih cen izriše tudi graf.

Kot je razvidno iz Algoritma 4.1, ima funkcija *cena_osnovnega_instrumenta* (vrstica 1) pet parametrov:

- S_0 - začetna cena delnice
- r - netvegana obrestna mera
- T - čas do zapadlosti opcije
- *sigma* - *standardna deviacija* (angl. standard deviation), ki določa *volatilnost* delnice. Izrazimo jo v odstotkih. Podrobnejši postopek izračuna volatilnosti lahko bralec najde na [10]
- N - število korakov, na katere razdelimo čas do zapadlosti opcije

Na podlagi teh parametrov izračunamo časovno dolžino koraka Δt ter faktorja u in d, ki določata ceno delnice v naslednji časovni periodi:

- Vsak korak bo dolžine $\Delta t = \frac{T}{N}$ (vrstica 8)
- Da ne bi ugibali faktorjev u in d, bomo za njun izračun uporabili standardno deviacijo σ, s katero je statistično določena volatilnost delnice na letni ravni. Faktorja u in d (vrstici $9-10$) sta na ta način določena kot:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{4.24}$$

in

$$d = \frac{1}{u} = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{4.25}$$

Opomba 6: Za razumevanje algoritmov je dovolj, če vemo, kako sta faktorja u in d definirana. Matematična izpeljava formul 4.24 in 4.25 je obsežna in odpira nova vprašanja, ki presegajo to nalogo. Zahtevnejši bralci lahko izpeljavo najdejo v [9].

Ko imamo dane vse vrednosti, lahko izračunamo cene delnice skozi celotno življenje opcije. Drevo cen prikažemo v matrični obliki, pri čemer vrednosti izračunamo s pomočjo formule 4.23 (vrstice $16-21$):

$$S_0 u^{j-1} d^{i-j}$$

Vrstice $16-21$ v Algoritmu 4.1 predstavljajo jedro izračuna poteka cen delnice skozi življenjsko obdobje opcije. Razvoj cen delnice prikažemo z binomskim drevesom v matrični obliki. V ta namen uporabimo dve *for zanki*, pri čemer zunanja zanka teče po vrsticah (indeks i), notranja zanka pa po stolpcih matrike cen (indeks j).

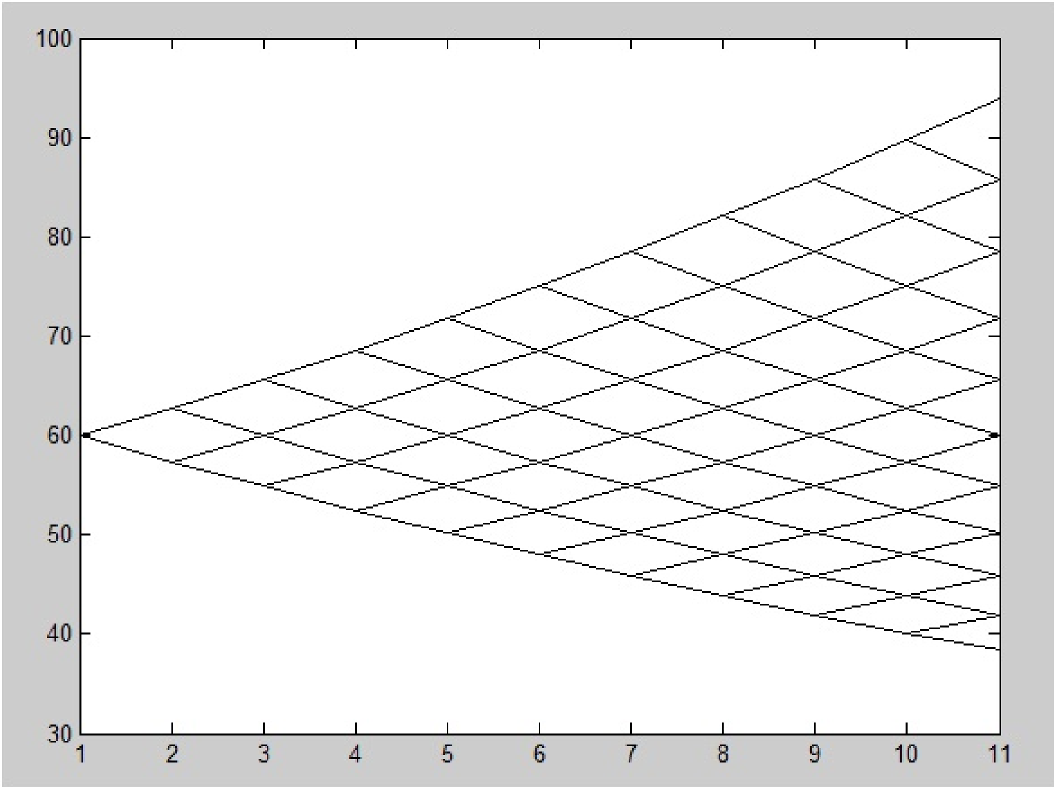
Opomba 7: i predstavlja vrstico, j pa stolpec matrike cen. Eksponenta faktorjev u in d je potrebno prilagoditi indeksom zank.

Primer 3: Vzemimo neko delnico, ki ima začetno vrednost 60\$. Čas do zapadlosti opcije je 0.5 leta, netvegana letna obrestna mera je 10%, volatilnost delnice pa znaša 20%. Čas do zapadlosti opcije razdelimo na 10 korakov. Parametri so torej naslednji:

$$S_0 = 60 \qquad r = 0.1$$

$$T = 0.5 \qquad \sigma = 0.2 \qquad N = 10$$

Na podlagi danih parametrov lahko z Algoritmom 4.1 izračunamo časovni potek *cen delnice* vse do zapadlosti opcije. Matrično predstavitev cen prikazuje tabela 4.1, grafični prikaz binomskega drevesa pa vsebuje slika 4.4.



Slika 4.4: Drevo poteka cen delnice v *10 - periodnem* binomskem modelu za izbrane parametre: $S_0 = 60$, $r = 10\%$, $T = 0.5$, $\sigma = 20\%$, $N = 10$. Na abscisi so posamezni časovni trenutki/periode, na katere je razdeljen čas do zapadlosti opcije. Na ordinato nanašamo cene delnice. V vsaki časovni periodi lahko cena delnice zavzame neke vrednosti, ki se izračunajo na podlagi vhodnih parametrov. Za izračun cen in izris drevesa je uporabljen algoritem 4.1, podatki o cenah pa so razvidni iz tabele 4.1. Graf je generiran z orodjem Matlab.

Vidimo, da lahko v listih drevesa odčitamo vrednosti opcije za vsakega od možnih izidov cene delnice, saj je tu izplačilo opcije enako njeni *notranji vrednosti* (glej razdelek 4.2.2). Vrednotenje opcije se začne z znanim končnim izplačilom opcije, nadaljuje pa se nazaj korak po korak, vse do sedanje vrednosti V_0. Vrednost opcije v trenutnem vozlišču je odvisna od njenih dveh predhodnic. Implementacijo izračuna *vrednosti opcije* V_0 si bomo ogledali v naslednjem razdelku na primeru evropske opcije.

60.0000	62.7442	65.6139	68.6148	71.7530	75.0348	78.4666	82.0554	85.8083	89.7328	93.8369
	57.3758	60.0000	62.7442	65.6139	68.6148	71.7530	75.0348	78.4666	82.0554	85.8083
		54.8664	57.3758	60.0000	62.7442	65.6139	68.6148	71.7530	75.0348	78.4666
			52.4668	54.8664	57.3758	60.0000	62.7442	65.6139	68.6148	71.7530
				50.1721	52.4668	54.8664	57.3758	60.0000	62.7442	65.6139
					47.9778	50.1721	52.4668	54.8664	57.3758	60.0000
						45.8794	47.9778	50.1721	52.4668	54.8664
							43.8728	45.8794	47.9778	50.1721
								41.9540	43.8728	45.8794
									40.1191	41.9540
										38.3644

Tabela 4.1: Matrični prikaz drevesa, ki za *primer 3* prikazuje razvoj cen delnice skozi življenjsko obdobje opcije. V *CRR binomskem modelu* takšnemu drevesu rečemo *binomsko drevo*. Drevo cen se prične graditi s ceno, ki jo ima delnica na datum vrednotenja opcije, nadaljuje pa se vse do datuma zapadlosti opcije. Predpostavljamo, da se lahko cena delnice v vsakem naslednjem koraku premakne navzgor za faktor u, ali navzdol za faktor d. Vse možne vrednosti delnice na datum zapadlosti opcije lahko odčitamo iz listov binomskega drevesa - zadnjega stolpca matrike.

4.2.2 Evropska opcija

Zanima nas izračun vrednosti evropske call in put opcije v času 0, kar označimo z V_0. Za izračun bomo uporabili večperiodni CRR model.

Sestavimo torej algoritem za izračun vrednosti evropske opcije, ki na podlagi vhodnih parametrov vrne vrednost opcije V_0.

Vhodni parametri so naslednji [6]:

- T - življenjsko obdobje oziroma čas do zapadlosti opcije
- N - število period oziroma korakov dolžine, na katere bo razdeljen čas T. Vsak korak bo dolžine $\Delta t = \frac{T}{N}$
- r - letna obrestna mera brez tveganja. Vsaka denarna enota, investirana v netvegani instrument v trenutku $t = 0$, bo v Δt letih vredna $e^{r\Delta t}$
- σ - standardna deviacija, ki določa *volatilnost* delnice. Podrobnejši postopek izračuna volatilnosti lahko bralec najde na [11]

Iz teh vhodov lahko izračunamo parametre:

- Faktorja u in d, ki določata ceno delnice v naslednji časovni periodi. Izračunamo ju z enačbama 4.24 in 4.25.
- Verjetnost povečanja cene delnice navzgor q in verjetnost zmanjšanje cene delnice navzdol $1 - q$, kjer se sklicujemo na enačbo 4.7.

Začetna cena delnice S_0 je poznana in ni naključna. Če označimo s S_j ceno v diskretnem trenutku j, potem je cena S_{j+1} v naslednjem diskretnem trenutku določena kot:

$$S_{j+1} = \begin{cases} uS_j & \text{z verjetnostjo } q \\ dS_j & \text{z verjetnostjo } 1 - q \end{cases}$$

Za izračun V_0 se sklicujemo na enačbo 4.18, pri čemer upoštevamo:

- Izplačilo evropske *call* opcije je definirano kot $max\{S_T - K, 0\}$:

$$V_0 = e^{-rT} \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} q^j (1-q)^{N-j} max(S_0 u^j d^{N-j} - K, 0) \tag{4.26}$$

- Izplačilo evropske *put* opcije je definirano kot $max\{K - S_T, 0\}$:

$$V_0 = e^{-rT} \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} q^j (1-q)^{N-j} max(K - S_0 u^j d^{N-j}, 0) \tag{4.27}$$

Kot vidimo, sta enačbi 4.26 in 4.27 določeni na podlagi enačbe 4.18. Enačbi izračunata sedanjo vrednost evropske call in put opcije. Ker del enačb zahteva izračun binomskih koeficientov, si najprej oglejmo algoritem za njihov izračun.

Binomski koeficient

Naivne implementacije izračuna binomskih koeficientov so ponavadi počasne in neučinkovite. Primer naivnega izračuna binomskih koeficientov je npr. s pomočjo Matlabove funkcije *factorial(n)*. Z uporabo te funkcije lahko binomski koeficient izračunamo po formuli $factorial(n)/(factorial(j) * factorial(n-j))$. Takšen način izračuna zahteva preveč množenj in deljenj, zaradi česar je neuporaben za večja števila. Pri tovrstnih implementacijah se namreč pri večjih številih pogosto zgodi, da pride do preliva.

Splošna matematična formula za izračun binomskega koeficienta je sledeča:

$$\binom{n}{j} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-j+1)}{j(j-1)(j-2)...1} \tag{4.28}$$

Iz formule 4.28 je razvidno, da računamo fakultete števil, uporabljamo pa tudi deljenje. Zaradi tega se lahko pri računanju binomskih koeficientov pri večjih številih zgodi, da pride do preliva.

Algoritem 4.2 prikazuje direktno in učinkovitejšo implementacijo izračuna, ki sproti množi in deli in se s tem ogiba prelivu:

```
1 function binomial = binomski_koeficient(n,j);
2     if j > n-j
3         j = n-j;
4     end
5     c=1;
6     for i=1:j
7         c=c*(n-i+1);
8         c=c/i;
9     end;
10    binomial=c;
11 end
```

Algoritem 4.2: Algoritem za izračun binomskega koeficienta $\binom{n}{j}$.

Algoritem 4.2 v vrsticah $2-3$ reši problem velikega števila množenj. Tu algoritem preveri, če je j večji kot razlika $n-j$. V kolikor slednji pogoj velja, dodeli rezultat razlike $n-j$ spremenljivki j. Posledično je množenj pri izračunu binomskih koeficientov manj, saj se določena števila v števcu in imenovalcu krajšajo.

Kot primer lahko vzamemo izračun binomskega koeficienta $\binom{4}{3}$. Če uporabimo formulo 4.28, je izračun sledeč:

$$\binom{4}{3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4$$

Algoritem 4.2 bi ugotovil, da je $j = 3$ večji od $n - j = 1$, zato bi spremenljivki j dodelil vrednost 1. S tem bi skrajšali izvajanje zanke v vrsticah $6-9$ in se izognili večjemu številu množenj in deljenj. Z uporabo Algoritma 4.2 bo izračun sledeč:

$$\binom{4}{3} = \frac{4}{1} = 4$$

Pozoren bralec lahko vidi, da smo v bistvu krajšali števili 2 in 3 v števcu in imenovalcu.

Vrnimo se na izračun vrednosti evropske opcije. Preden se seznanimo z implementacijo algoritma, moramo razložiti še pojem *notranje vrednosti opcije*. Notranja vrednost evropske opcije je matematično definirana kot:

- **call opcija:** $g(S_T) = max\{0, S_T - K\} = \{S_T - K\}^+$
- **put opcija:** $g(S_T) = max\{0, K - S_T\} = \{K - S_T\}^+$

Pozoren bralec bo opazil, da je definicija enaka tisti iz 2. poglavja, ko smo matematično definirali izplačilo call in put opcij. Za to obstajajo razlogi. Na trgu je vrednost opcije določena na sledeč način:

$$vrednost\ opcije = notranja\ vrednost\ opcije + časovna\ vrednost\ opcije$$

Notranja vrednost call opcije je tista vrednost, za katero cena delnice presega izvršilno ceno opcije, *notranja vrednost put opcije* pa je tista vrednost, za katero izvršilna cena opcije presega ceno delnice. *Časovno vrednost opcije* (angl. option time value) določi trg glede na določene predpostavke (čas do zapadlosti opcije, volatilnost delnice). Kot smo že omenili, se vrednotenje opcije začne z znano končno vrednostjo opcije, se pravi z vrednostjo opcije na dan zapadlosti. Končna vrednost opcije je znana, saj je vrednost opcije na dan zapadlosti enaka njeni notranji vrednosti, notranja vrednost pa je na dan zapadlosti enaka izplačilu opcije. Časovna vrednost je na dan zapadlosti enaka nič.

Upoštevajoč razlago v zgornjem odstavku lahko torej končne vrednosti opcije izračunamo kot $max\{0, S_T - K\}$ za *call opcije* in $max\{0, K - S_T\}$ za *put opcije.*

Poglejmo si sedaj implementacijo Algoritma 4.3, ki računa vrednosti evropske put opcije. Vse morebitne nejasnosti bodo pojasnjenje v nadaljevanju, ko se bomo posvetili komentarjem posameznih vrstic algoritma.

Opomba 8: za razumevanje algoritma je dovolj, če prikažemo algoritem na osnovi primera *evropske put opcije*, pri čemer uporabimo formulo 4.22. Pri algoritmu za izračun *evropske call opcije* se pri izračunu vrednosti V_0 sklicujemo na formulo 4.21 - popravimo samo vrstico 16 v Algoritmu 4.3, ostale vrstice ostanejo enake.

Osnovni algoritem za izračun vrednosti evropske put opcije:

```
1  function value = Eur_Put_Vrednost(S0,K,T,r,sigma,N)
2  % S0 - začetna cena delnice
3  % r - obrestna mera
4  % T - čas do zapadlosti opcije
5  % sigma - volatilnost delnice na letni ravni
6  % N - število korakov
7
8  dt=T/N; %dolžina posameznega koraka
9  u=exp(sigma*sqrt(dt)) %faktor u
10 d=exp(-sigma*sqrt(dt)) %faktor d
11 q=(exp(r*dt)-d)/(u-d) %verjetnost premika cene navzgor
12
13 V0=0; %inicializacija vrednosti opcije
14
15 for j=0:N
16   V0=V0+binomski_koeficient(N,j)*(q^j)*((1-q)^(N-j))*max(K-S0*(u^j)*d^(N-j),0)
       ;
17 end
18
19 V0=exp(-r*T)*V0;
20
21 value=V0; %rezultat
```

Algoritem 4.3: Osnovni algoritem izračuna vrednosti *evropske put opcije*. Funkcija *Eur_Put_Vrednost* nam na podlagi izbranih vhodnih parametrov vrne vrednost opcije V_0.

Opis Algoritma 4.3:

Vidimo lahko, da ima funkcija *Eur_Put_Vrednost* (vrstica 1) šest vhodnih parametrov:

- S_0 - začetna cena delnice
- K - izvršilna cena opcije
- r - netvegana obrestna mera
- T - čas do zapadlosti opcije
- *sigma* - *standardna deviacija* (angl. standard deviation), ki določa *volatilnost* delnice. Izrazimo jo v odstotkih. Podrobnejši postopek izračuna volatilnosti lahko bralec najde na [10]
- N - število korakov, na katere razdelimo čas do zapadlosti opcije

V vrsticah $8 - 11$ na podlagi zgornjih parametrov izračunamo časovno dolžino koraka Δt, faktorja u in d ter vrednost q. Izračun časovne dolžine koraka Δt ter izračun faktorjev u in d smo že opisali v razdelku 4.2.1, zato jih ne bomo ponavljali. Kot smo rekli že v razdelku 4.1.1, nam vrednost q določa verjetnost, da bo cena delnice v posameznem koraku narasla ($1 - q$ je verjetnost, da bo cena delnice padla). Vrednost q izračunamo v vrstici 11, pri čemer se sklicujemo na enačbo 4.7.

Jedro Algoritma 4.3 predstavljajo vrstice $15 - 17$. Tu v zanki računamo sedanjo vrednost opcije V_0. Kot formulo za izračun smo uporabili enačbo 4.23. Vrednosti *put opcije* v vsakem časovnem trenutku izračunamo z $max(K - S_0 u^j d^{N-j}, 0)$, kot izhaja iz formule 4.27. Vrednotenje opcije se začne z dnevom zapadlosti opcije (listi binomskega drevesa), nato pa nadaljujemo nazaj korak po korak, vse do sedanje vrednosti V_0. Ker računamo sedanjo vrednost predpostavljenih bodočih vrednosti, moramo dobljeni rezultat še diskontirati (glej razdelek 3.1.1). To naredimo v vrstici 19 z uporabo diskontnega faktorja e^{-rT}.

Algoritem 4.3 vrne samo vrednost opcije V_0. Včasih pa se zgodi, da samo izračunana vrednost opcije V_0 ne zadostuje. *Ameriške opcije* omogočajo lastniku izvršitev pred zapadlostjo opcije. V tem primeru moramo poznati tudi vmesne vrednosti opcije, saj lahko le tako preverimo, če je predčasna izvršitev opcije možna. Zato si je smiselno ogledati še algoritem, ki poleg vrednosti opcije V_0 izpiše še drevo vmesnih vrednosti opcije za posamezne časovne korake. V CRR diskretnem modelu lahko na ta način v vsakem koraku binomskega drevesa preverimo možnost predčasne izvršitve. Takšen algoritem izračuna, ki poleg vrednosti opcije izračuna in izpiše še vrednosti opcije v posameznih časovnih korakih prikazuje Algoritem 4.4. Primer je narejen za izračun vrednosti evropske put opcije. Zahtevnejši bralec si lahko ogleda postopek za izračun ameriške opcije v [3].

Algoritem za izračun vrednosti evropske put opcije, ki poleg vrednosti opcije izračuna in izpiše še vrednosti opcije v posameznih časovnih korakih:

```
1  function [cena, matrika] = Eur_Put(S0,K,r,T,sigma,N)
2  % S0 - začetna cena delnice
3  % r - obrestna mera
4  % T - čas do zapadlosti opcije
5  % sigma - volatilnost delnice na letni ravni
6  % N - število korakov
7
8  dt=T/N; %dolžina posameznega koraka
9  u=exp(sigma*sqrt(dt)); %faktor u
10 d=1/u; %faktor d
11 q=(exp(r*dt)-d)/(u-d); %verjetnost premika cene navzgor
12
13 matrika=zeros(N+1,N+1); %inicializacija matrike vrednosti
14
15 for j=N:-1:0
16     matrika(N+1-j,N+1)=max(K-S0*(u^j)*(d^(N-j)),0);
17 end
18
19 matrika
20
21 for i=N-1:-1:0
22   for j=i:-1:0
23     matrika(i-j+1,i+1)=exp(-r*dt)*(q*matrika(i-j+1,i+2)+(1-q)*matrika(i-j+2,i
           +2));
24   end
25 end
26
27 matrika %matrika vrednosti opcije
28
29 cena=matrika(1,1); %sedanja vrednost opcije V0
```

Algoritem 4.4: Algoritem za začun evropske put opcije, ki poleg same vrednosti opcije izpiše še vrednosti opcije za vsakega od možnih končnih izidov cene delnice ter matriko vrednosti za posamezne časovne korake vse do V_0.

Opis Algoritma 4.4:

Vhodni parametri, ki jih prejme funkcija *Eur_Put* (vrstica 1) so enaki kot pri Algoritmu 4.3. Prav tako je enak izračun vrednosti Δt, u, d in q (vrstice $8 - 11$).

Kot smo že omenili, nam Algoritem 4.4 poleg vrednosti opcije V_0 izračuna in izpiše tudi vrednosti opcije v posameznih časovnih trenutkih. Izračunane vrednosti opcije bomo prikazovali z binomskim drevesom. Ker bomo drevo prikazali v matrični obliki, v vrstici 13 najprej ustvarimo matriko ničel in tako inicializiramo vrednosti v matriki.

Računanje vrednosti opcije se vselej začne z znanimi možnimi končnimi izplačili opcije na dan zapadlosti. Če se spomnimo binomskih dreves, vemo, da so izplačila opcije na dan zapadlosti na skrajni desni strani v listih drevesa. Kot smo že omenili na začetku razdelka 4.2.2, je izplačilo opcije na dan zapadlosti hkrati tudi njena vrednost. V vrsticah 15 – 16 izračunamo vrednosti *put opcije* na dan zapadlosti z $max(K - S_0 u^j d^{N-j}, 0)$ (spomnimo se Algoritma 4.3 in formule 4.27). Izračun poteka tako, da se z zanko sprehodimo po vrsticah zadnjega stolpca matrike in v vsaki iteraciji določimo vrednost opcije.

V vrsticah 21 – 25 poteka vrednotenje opcije nazaj korak po korak do vrednosti V_0. Vrednost opcije v nekem vozlišču je vselej odvisna od njenih dveh predhodnic. Uporabljeni sta dve gnezdeni *for* zanki, tako da zunanja zanka teče po stolpcih, notranja pa po vrsticah. Ko se v vrstici 23 računajo vrednosti v posameznem stolpcu, je vrednost v vsakem vozlišču izračunana na podlagi vrednosti vozlišč v predhodnem stolpcu (glej opis binomskih dreves v razdelku 4.1.1), upoštevajoč verjetnost premika cene q. Ker računamo sedanjo vrednost nekih predpostavljenih bodočih vrednosti, moramo rezultate v vsakem koraku sproti diskontirati z diskontnim faktorjem $e^{-r\Delta t}$. Če bralcu ta odstavek dela težave, naj si še enkrat pogleda formulo 4.8 v razdelku 4.1.1.

4.2.3 Rezultati

Primer 4: Vzemimo za primer *evropsko put opcijo*, pri čemer je trenutna vrednost delnice 60\$, izvršilna cena opcije pa je 65\$. Čas do zapadlosti opcije je 0.5 leta, netvegana letna obrestna mera je 10%, volatilnost delnice pa znaša 20%. Čas do zapadlosti razdelimo na 5 intervalov. Parametri so torej naslednji:

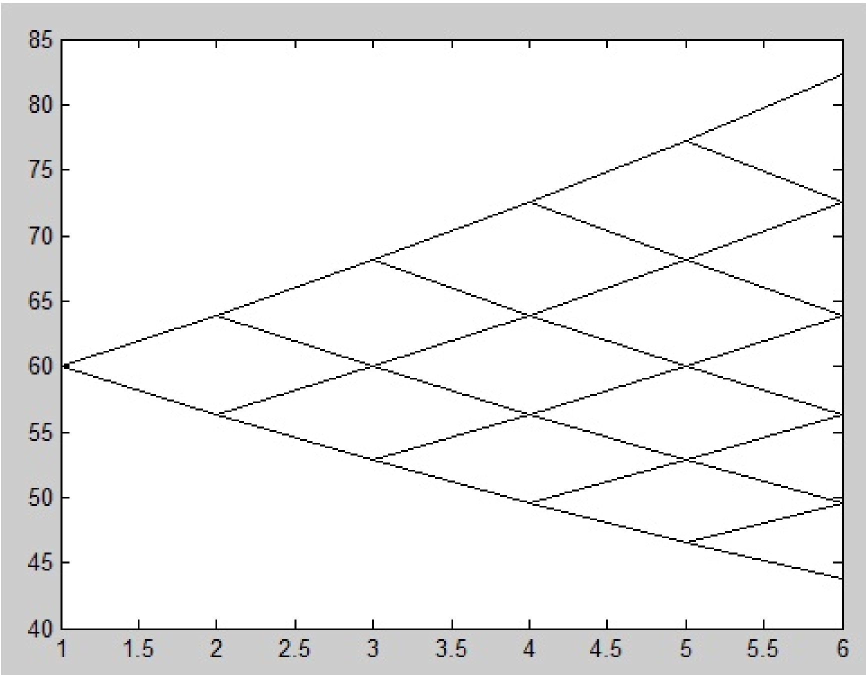
$$S_0 = 60 \qquad K = 65 \qquad r = 0.1$$

$$T = 0.5 \qquad \sigma = 0.2 \qquad N = 5$$

Časovni potek cen delnice do zapadlosti opcije za dane parametre izračunamo z algoritmom 4.1. Matrično predstavitev cen prikazuje tabela 4.2, grafični prikaz binomskega drevesa pa vsebuje slika 4.5.

60.0000	63.9173	68.0904	72.5359	77.2716	82.3166
	56.3228	60.0000	63.9173	68.0904	72.5359
		52.8709	56.3228	60.0000	63.9173
			49.6306	52.8709	56.3228
				46.5889	49.6306
					43.7336

Tabela 4.2: Matrična predstavitev poteka cen delnice. Za izračun vrednosti je uporabljen algoritem 4.1.



Slika 4.5: Grafični prikaz poteka cen delnice v 5-periodnem binomskem modelu za izbrane parametre. Graf je generiran z orodjem Matlab in sicer na podlagi podatkov iz tabele 4.2.

V listih drevesa (zadnji stolpec tabele 4.2) lahko odčitamo vrednosti možnih končnih izidov cene delnice na datum zapadlosti opcije. Ko poznamo možne izide cen delnice na datum zapadlosti opcije, lahko izračunamo tudi vrednosti opcij za vsakega od možnih izidov cene delnice. Ker gre v tem primeru za put opcijo, je izplačilo opcije enako $max\{0, K - S_T\}$. Kot že vemo, je K izvršilna cena opcije, S_T pa je vrednost delnice na datum zapadlosti opcije, kar v našem primeru pomeni vrednosti v zadnjem stolpcu tabele 4.2. Ko je končno izplačilo opcije znano, se vrednotenje opcije nadaljuje nazaj korak po korak, vse do sedanje vrednosti V_0. Vrednost opcije v trenutnem vozlišču je vselej odvisna od njenih dveh predhodnic, zato je izračun narejen z rekurzijo. Nazoren potek takšnega izračuna smo prikazali v razdelku 4.1.1, kjer smo rekurzijo prikazali na primeru dvoperiodnega modela (slika 4.2).

Matriko vrednosti opcije v posameznem koraku prikazuje tabela 4.3.

4.3447	2.4735	1.0382	0.2021	0.0000	0.0000
	6.8591	4.3882	2.1419	0.4678	0.0000
		10.2080	7.3901	4.3532	1.0827
			14.0823	11.4823	8.6772
				17.7643	15.3694
					21.2664

Tabela 4.3: Matrični prikaz rekurzivnega izračuna vrednosti evropske put opcije. Sedanja vrednost opcije $V_0 = 4.3447$. Za izračun vrednosti je uporabljen razširjeni algoritem 4.4.

Z opisanim postopkom smo zaključili vrednotenje evropske put opcije. Izračunana vrednost V_0 je numerična ocena sedanje vrednosti opcije. Metoda je uporabna za opcije s katerimkoli številom diskretnih period do zapadlosti. S povečevanjem števila korakov bo diskretni čas počasi prehajal v zveznega, premiki cene delnice navzdol in navzgor pa bodo postali infinitezimalno majhni. To nas pripelje do že omenjene *Black - Scholesove* rešitve.

Black - Scholes

Obravnava Black - Scholesove enačbe sicer ni predmet te naloge, vendar se je za konec vredno seznaniti z nekaj splošnimi podatki o Black - Scholesovi rešitvi. Oglejmo si torej glavne prednosti in slabosti Black - Scholesove formule.

Prednosti:

- hitrost - omogoča izračun v zelo kratkem času
- natančnost izračunavanja rezultatov

Slabosti:

- omejitev na evropske opcije

Black - Scholesova formula nas torej omeji izključno na evropske opcije. Tako ostaja dejstvo, da je CRR diskretni model širše uporaben, saj lahko v vsakem koraku binomskega drevesa preverimo možnost predčasne izvršitve, česar nam Black - Scholesova formula ne omogoča. Vrednotenje opcij z možnostjo predčasne izvršitve (primer takšnih opcij so ameriške in eksotične opcije) zato ostaja v domeni diskretnih modelov.

Omenili smo že, da binomska metoda v limiti aproksimira Black - Scholesovo rešitev. Da bi se lahko v to prepričali, bomo izračunali vrednost evropske put opcije z Black - Scholesovo formulo, nato pa bomo s pomočjo algoritma 4.3 naredili še izračun v diskretnem modelu. V obeh primerih bomo upoštevali parametre iz primera 4. Za izračun vrednosti z Black - Scholesovo formulo uporabimo kalkulator iz naslova [13]. Podrobnejše informacije o Black - Scholesovi formuli lahko zahtevnejši bralec najde v [2].

Rezultate prikazuje tabela 4.4, kjer lahko vidimo, kaj se dogaja, ko v CRR diskretnem modelu povečujemo korake. S povečevanjem korakov se vrednost opcije približuje vrednosti, dobljeni z Black - Scholesovo formulo. V limiti torej binomska metoda aproksimira Black - Scholesovo rešitev.

Število korakov N	CRR	Black-Scholes
5	3,4470	4,4259
10	3,7540	4,4259
50	4,4031	4,4259
100	4,4240	4,4259
200	4,4241	4,4259
300	4,4242	4,4259

Tabela 4.4: Vrednost evropske put opcije glede na izbrano število korakov in rezultat, izračunan s pomočjo Black - Scholesove formule. Vrednost opcije, izračunana s CRR modelom, se s povečevanjem korakov N približuje rezultatu Black -Scholesove formule.

4.3 Azijska opcija

Azijske opcije spadajo v skupino eksotičnih opcij. Rekli smo, da je pri evropskih opcijah izplačilo odvisno od cene delnice na dan zapadlosti opcije glede na izvršilno ceno opcije. Za razliko od evropskih opcij, je izplačilo azijske opcije odvisno od poteka cen delnice v nekem časovnem obdobju. Ker je končno izplačilo teh opcij odvisno od povprečne cene delnice v določenem časovnem obdobju, pravimo azijskim opcijam tudi *opcije odvisne od poti.* Če rečemo, da so cene delnice v časovnih trenutkih $t = 0, 1, 2, ..., n$ enake $S_0, S_1, ..., S_n$, potem bo končno izplačilo azijske opcije enako $g(S_0, S_1, ..., S_n)$.

Izračun vrednosti azijske opcije bomo povzeli iz [7] in [8].

Spomnimo se binomskega modela (razdelek 4.1), kjer lahko cena delnice, ki je trenutno enaka S_j, v naslednjem časovnem trenutku zavzame vrednosti S_{2j+1} ali S_{2j+2}. Privzemimo še, da je obrestna mera r netvegana in nespremenljiva.

Če je bil dosedanji potek cen delnice $(S_0, S_{j1}, ..., S_{jk})$, naj bo $v_k(S_0, S_{j1}, ..., S_{jk})$ vrednost opcije v trenutku k. Izrazimo $v_k(S_0, S_{j1}, ..., S_{jk})$ s količinama $v_{k+1}(S_0, S_{j1}, ..., S_{jk}, S_{j2k+1})$ in $v_{k+1}(S_0, S_{j1}, ..., S_{jk}, S_{j2k+2})$.

Portfelj (x, y) sestavimo tako, da bo veljalo:

$$x(1+r) + yS_{2j+1} = v_{k+1}(S_0, S_1, \ldots, S_{2j+1}) \tag{4.29}$$

$$x(1+r) + yS_{2j+2} = v_{k+1}(S_0, S_1, ..., S_{2j+2}) \tag{4.30}$$

Enačbi odštejemo in dobimo:

$$y(S_{2j+1} - S_{2j+2}) = v_{k+1}(S_0, S_1, ..., S_{2j+1}) - v_{k+1}(S_0, S_1, ..., S_{2j+2}) \tag{4.31}$$

$$y = \frac{v_{k+1}(S_0, S_1, ..., S_{2j+1}) - v_{k+1}(S_0, S_1, ..., S_{2j+2})}{(S_{2j+1} - S_{2j+2})} \tag{4.32}$$

Izražen y vstavimo v zgornjo enačbo in dobimo:

$$x(1+r) + \frac{v_{k+1}(S_0, S_1, ..., S_{2j+1}) - v_{k+1}(S_0, S_1, \ldots, S_{2j+2})}{(S_{2j+1} - S_{2j+2})} S_{2j+1} =$$

$$= v_{k+1}(S_0, S_1, \ldots, S_{2j+1}) \tag{4.33}$$

$$x = \frac{v_{k+1}(S_0, S_1, \ldots, S_{2j+1})S_{2j+1} - v_{k+1}(S_0, S_1, \ldots, S_{2j+2})S_{2j+2}}{(1+r)(S_{2j+1} - S_{2j+2})} \tag{4.34}$$

Težava evropskih opcij se pokaže v tem, da lahko premiki cene delnice tik pred zapadlostjo opcije močno vplivajo na njeno izplačilo. V tem pogledu je azijska opcija bolj zanesljiva, saj je njeno izplačilo odvisno od celotnega poteka cen delnice. Izplačilo azijske opcije je torej definirano kot

$$(A_n - K)^+$$

pri čemer je $A_n = \sum_{i=0}^{n} S_i/(n+1)$, kar je povprečje cen delnice skozi n korakov.

Naj bo $T_j = \sum_{i=0}^{j} S_i$ vsota cen delnice do j-tega časovnega koraka. Ko se bo lastnik odločil izkoristiti pravico, bo s tem dobil izplačilo $T_j/(n+1) - K$.

Zanima nas torej vrednost azijske opcije. Ker je cena opcije določena kot diskontirana pričakovana vrednost izplačila, je dovolj, če izračunamo pričakovano izplačilo.

Izračunati moramo torej vsoto cen delnice $T_n(\mathbf{P})$ za vsako pot $\mathbf{P}$ v binomskem drevesu, skupaj z verjetnostjo $\mathrm{P}(\mathbf{P})$, da se ta pot zgodi:

$$E((A_n - K)^+) = \sum \left\{ P(\mathbf{P}) \left(\frac{T_n(\mathbf{P})}{(n+1)} - K \right)^+ \middle| \mathbf{P} : \text{pot od korena do lista} \right\} \tag{4.35}$$

Opomba 9: V tem razdelku so opisane izključno splošne smernice za izračun vrednosti azijske opcije. Obsežnost tematike presega cilje tega diplomskega dela, zato bralcem, ki bi se radi v azijske opcije bolj poglobili, svetujem literaturo [2], [3], [5] in [7].

Poglavje 5

Sklepne ugotovitve

Zaradi učinkovitosti, pogoste praktične uporabe in preprostosti implementacije sem v diplomski nalogi za pristop k reševanju problema vrednotenja evropske opcije, izbral CRR binomski model. Binomska metoda se je pokazala kot preprosta numerična tehnika za aproksimacijo cen evropskih opcij. S to metodo sem izvedel konstrukcijo binomskega drevesa, s katerim sem prikazal razvoj cen osnovnega instrumenta skozi določeno obdobje, vrednost evropske opcije pa sem aproksimiral z uporabo rekurzivnega algoritma. Metoda temelji na analizi skokov cene delnice skozi neko časovno obdobje. Zato je potrebno čas poteka cen delnice od nakupa do zapadlosti opcije razdeliti na več manjših intervalov oziroma korakov. Edino tako namreč lahko dobimo natančne rezultate vrednosti opcije. Ko s povečevanjem korakov skoki cene postajajo vedno manjši, vidimo, da ta metoda v limiti aproksimira Black - Scholesovo zvezno rešitev.

Matlab se je izkazal kot odlično orodje za finančno modeliranje. Ker v Matlabu odpade potreba po definiranju spremenljivk, specificiranju podatkovnih tipov in alokaciji pomnilnika, postane reševanje inženirskih in znanstvenih problemov hitro in enostavno. Zaradi učinkovitega manipuliranja z matrikami sem lahko prikazal tako razvoj cen delnic, kot tudi razvoj cen opcij v matrični obliki. Matrična oblika predstavitve binomskega drevesa omogoča učinkovito in pregledno simuliranje cen delnic in opcij. Določene vrste opcij namreč omogočajo predčasno izvršitev. Pri tovrstnih opcijah moramo poznati tudi vmesne vrednosti opcije, saj lahko le tako ugotovimo, če je predčasna izvršitev možna. V takšnih primerih je torej nujna pregledna predstavitev razvoja cen skozi življenjsko obdobje opcije.

Poleg algoritma za vrednotenje evropskih opcij sem splošno opisal tudi postopek za vrednotenje azijskih opcij. Prikazal sem razvoj formul, ki pripeljejo do splošne metode za vrednotenje tovrstnih opcij. Ker je o implementaciji algoritma za vrednotenje azijskih opcij zelo malo znanega, naj to ostane odprta možnost za nadaljnje raziskave.

Implementacija algoritma za vrednotenje azijskih opcij pa ni ostalo edino odprto poglavje. Zaradi obsežnosti obravnavanega področja, ima diplomska naloga še veliko možnosti za nadaljnje raziskave. Matematično bi bilo potrebno pokazati prehod iz diskretnega v zvezni čas in tako izpeljati Black - Scholesovo formulo. Slednjo bi morali natančneje preučiti in narediti podrobnejšo primerjavo rezultatov z binomskim modelom.

Literatura

[1] Yasir Sherwani, *Binomial approximation methods for option pricing*, 2007, Department of Mathematics, Uppsala University; dostopno na http://uu.divaportal.org/smash/record.jsf?pid=diva2:303745 (zadnji obisk: 23.12.2010)

[2] Gordon Gemmil, *Options Pricing: An international perspective*, London: McGraw-Hill, 1993, pogl. 4, 5

[3] Steven E. Shreve, *Stochastic Calculus for finance*, New York: Springer, 2005, pogl. 1

[4] Marek Capinski, Tomasz Zastawniak, *Mathematics for Finance: An Introduction to Financial Engineering*, Springer, 2003, pogl. 7

[5] Jakša Cvitanić, Fernando Zapatero, *The MIT Press Introduction to the Economics and Mathematics of Financial Markets*, Massachusetts Institute of Technology, 2004, pogl. 3, 7

[6] Prasad Chalasani, *Programming Project: Binomial-Model Option-Valuation*, 1998; dostopno na http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.26.7197 (zadnji obisk: 3.1.2011)

[7] Akiyoshi Shioura, Takeshi Tokuyama, *Efficiently pricing European - Asian Options - Ultimate implementation and analysis of the AMO algorithm*, Graduate School of Information Sciences, Tohoku University, Japan; dostopno na http://www.dais.is.tohoku.ac.jp/ shioura/papers/STpricing.pdf (zadnji obisk: 3.1.2011)

[8] Katja Pipan, *Vrednotenje opcij v diskretnih modelih*, Diplomska naloga, 2007, Fakulteta za Matematiko in Fiziko, Univerza v Ljubljani

[9] John C. Hull, *Options, Futures and Other Derivatives*, 6th Edition, New Delhi: Prentice Hall of India, 2005, pogl. 11

[10] *http://en.wikipedia.org/wiki/Pascal's_triangle* (zadnji obisk: 19.1.2011)

[11] *http://stockcharts.com/* (zadnji obisk: 1.2.2011)

[12] *http://www.fundamentalfinance.com* (zadnji obisk: 20.12.2010)

[13] *http://www.money-zine.com/Calculators/Investment-Calculators/Black-Scholes-Calculator/* (zadnji obisk: 20.12.2010)

[14] *http://www.riskglossary.com* (zadnji obisk: 3.1.2011)