

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA RAČUNALNIŠTVO IN INFORMATIKO

Martin Ambrožič

**Implementacija nekaterih
subdivizijskih shem**

DIPLOMSKO DELO
NA INTERDISCIPLINARNEM UNIVERZITETNEM ŠTUDIJU

Mentor: doc. dr. Emil Žagar

Ljubljana, 2011

Št. naloge: 00027/2011

Datum: 01.04.2011



Univerza v Ljubljani, Fakulteta za računalništvo in informatiko ter Fakulteta za matematiko in fiziko izdaja naslednjo nalogo:

Kandidat: **MARTIN AMBROŽIČ**

Naslov: **IMPLEMENTACIJA NEKATERIH SUBDIVIZIJSKIH SHEM
IMPLEMENTATION OF SELECTED SUBDIVISION SCHEMES**

Vrsta naloge: Diplomsko delo univerzitetnega študija

Tematika naloge:

V diplomu opišite nekatere linearne stacionarne subdivizijske sheme. Implementirajte tiste, ki jih porajajo kardinalni B-zlepki ter štiritočkovna in šesttočkovna interpolacijska shema. Nato na kratko opišite in implementirajte še tenzorske produkte takih shem.

Mentor:

doc. dr. Emil Žagar



Dekan Fakultete za računalništvo in informatiko:

prof. dr. Nikolaj Zimic

Dekan Fakultete za matematiko in fiziko:

prof. dr. Andrej Likar



Rezultati diplomskega dela so intelektualna lastnina Fakultete za računalništvo in informatiko Univerze v Ljubljani. Za objavljanje ali izkoriščanje rezultatov diplomskega dela je potrebno pisno soglasje Fakultete za računalništvo in informatiko ter mentorja.

Besedilo je oblikovano z urejevalnikom besedil \LaTeX .

Namesto te strani **vstavite** original izdane teme diplomskega dela s podpisom mentorja in dekana ter žigom fakultete, ki ga diplomant dvigne v študentskem referatu, preden odda izdelek v vezavo!

IZJAVA O AVTORSTVU

diplomskega dela

Spodaj podpisani Martin Ambrožič,

z vpisno številko 63060001,

sem avtor diplomskega dela z naslovom:

Implementacija nekaterih subdivizijskih shem

S svojim podpisom zagotavljam, da:

- sem diplomsko delo izdelal samostojno pod mentorstvom doc. dr. Emila Žagarja,
- so elektronska oblika diplomskega dela, naslov (slov., angl.), povzetek (slov., angl.) ter ključne besede (slov., angl.) identični s tiskano obliko diplomskega dela,
- soglašam z javno objavo elektronske oblike diplomskega dela v zbirki "Dela FRI".

V Ljubljani, dne 17.5.2011

Podpis avtorja:

Zahvala

Zahvaljujem se vsem, ki so mi bili v pomoč pri izdelavi diplomskega dela, predvsem pa svojemu mentorju doc. dr. Emilu Žagarju za strokovno vodenje ter številne odgovore, nasvete in popravke.

Kazalo

Povzetek	1
Abstract	2
1 Uvod	3
2 Subdivizijske sheme iz kardinalnih B-zlepkov	8
3 Splošne linearne sheme	17
4 Interpolacijske sheme	38
4.1 Štiritočkovna shema	39
4.2 Šesttočkovna shema	44
5 Tenzorski produkti subdivizijskih shem	47
5.1 Primer: stiskanje slik	51

Povzetek

Subdivizija je postopek generiranja gladkih krivulj ali ploskev iz končne množice začetnih kontrolnih točk, definiranih na regularni mreži. Ta je v primeru krivulj kar podmnožica celih števil, medtem ko je pri generiranju ploskev odvisna od topologije povezanosti kontrolnih točk. Subdivizijska shema določa pravilo, po katerem na vsakem koraku izračunamo nove točke na zgoščeni mreži – dodamo namreč vmesne točke in tako v limiti dobimo krivuljo ali ploskev.

Linearne subdivizijske sheme določajo nove točke kot linearne kombinacije točk prejšnjega nivoja. Maska $a = (a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^s}$ vsebuje koeficiente linearnih kombinacij in določa pravilo za izračun kontrolnih točk k -tega nivoja

$$\mathbf{P}_\alpha^k = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} a_{\alpha-2\beta} \mathbf{P}_\beta^{k-1}.$$

S pomočjo implementacije linearnih subdivizijskih shem v okolju MATLAB sem želel s primeri prikazati nekaj družin subdivizijskih shem, kot so sheme iz kardinalnih B-zlepkov, interpolacijske sheme in tenzorski produkti shem. Prav tako sem na primerih preveril nekatere pogoje, ki morajo veljati, da subdivizijske sheme generirajo zvezne in gladke krivulje ali ploskve.

Ključne besede: subdivizija, subdivizijska shema, kardinalni B-zlepek, osnovna limitna funkcija

Abstract

Subdivision is the process of generating smooth curves or surfaces from a finite set of initial control points, defined on a regular mesh. In the case of curves this is simply a subset of integers, while with generating surfaces it depends on the topology of the control points. The subdivision scheme determines the refinement rule by which new points are calculated on a denser mesh - by adding in-between points we get a curve or surface in the limit.

Linear subdivision schemes calculate new points as linear combinations of points from the previous level. The subdivision mask $a = (a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^s}$ contains the linear combination coefficients and so determines the refinement rule for calculating points of the k th level:

$$\mathbf{P}_\alpha^k = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} a_{\alpha-2\beta} \mathbf{P}_\beta^{k-1}.$$

By implementing linear subdivision schemes in the MATLAB environment I aimed to present through examples several types of subdivision schemes, including schemes from cardinal B-splines, interpolation schemes and tensor product schemes. Also through examples I checked various conditions for the continuity and smoothness of curves and surfaces, generated by subdivision schemes.

Key words: subdivision, subdivision scheme, cardinal B-spline, basic limit function

Poglavje 1

Uvod

Subdivizija je metoda za konstrukcijo gladkih krivulj ali ploskev iz diskretnih podatkov (končne množice začetnih točk). Po pravilih, ki jih določa subdivizijska shema, na vsakem koraku izračunamo nove “vmesne” točke in tako v limiti dobimo krivuljo ali ploskev, ki v nekem smislu aproksimira začetne točke. Od subdivizijske sheme so tako odvisne lastnosti dobljenega konstrukta, kot sta zveznost in odvedljivost. Običajno želimo hitro in učinkovito generirati gladke krivulje in ploskve. V tem primeru namreč lahko subdivizijska shema skupaj z začetnimi točkami služi tudi kot učinkovita predstavitev krivulje oz. ploskve, ki jo generira, kar je lastnost, ki je zanimiva zlasti v računalniški grafiki in geometrijskem oblikovanju.

Poglejmo si nalogo subdivizijske sheme v splošni obliki:

Najprej definiramo začetno mrežo indeksov, ki bo v splošnem podmnožica \mathbb{Z}^s , kjer s pomeni dimenzijo končnega konstrukta.

Za $s = 1$ torej generiramo krivuljo, začetni indeksi pa so kar podmnožica celih števil. Množica

$$\mathbf{P} = \{\mathbf{P}_i, i \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}^d$$

je tako množica začetnih kontrolnih točk. Urejene so po naraščajočem indeksu, in če jih med seboj povežemo, dobimo t.i. kontrolni poligon. S subdivizijo želimo generirati nove točke med obstoječimi (pa tudi namesto obstoječih), zato moramo mrežo indeksov v vsakem koraku zgostiti. Najbolj naravna izbira je, da interval med mrežnimi točkami razpolovimo. Dobili bomo torej nove mrežne točke na razpoloviščih intervalov med mrežnimi točkami prejšnjega nivoja, na k -tem nivoju subdivizije pa bo tako točka \mathbf{P}_i^k ustrezala mrežni točki $2^{-k}i$.

Za $s = 2$, torej pri generiranju ploskev, je potrebno najprej določiti topologijo povezanosti mrežnih (in s tem tudi kontrolnih) točk, saj so v dveh dimenzijah možnosti določanja sosednosti različne. Najbolj znana je topologija kvadratne mreže, kjer za sosedne točke $P_{i,j}$ vzamemo štiri točke, in sicer $P_{i-1,j}$, $P_{i+1,j}$, $P_{i,j-1}$ in $P_{i,j+1}$. Na analogen način kot prej na vsakem nivoju subdivizije dodamo k mrežnim točkam še razpolovišča daljic med sosednjimi točkami prejšnjega nivoja in s tem zgostimo indeksno mrežo. Na k -tem nivoju bo tako kontrolna točka $P_{i,j}^k$ ustrezala mrežni točki $2^{-k}(i, j)$.

Povedali smo torej, kako bomo urejali in indeksirali točke, ničesar pa nismo povedali o načinu njihovega izračuna. V resnici imamo tu zelo svobodno izbiro in zato ločimo veliko družin subdivizijskih shem glede na nekatere osnovne lastnosti. Omenimo jih samo nekaj.

Stacionarne subdivizijske sheme uporabljajo isto pravilo za izračun novih točk na vseh nivojih. Njihovo nasprotje so **nestacionarne** sheme, kjer je pravilo za nove točke lahko na vsakem koraku drugačno, zato je v splošnem analiza v smislu lastnosti limitnih krivulj oz. ploskev, ki jih generirajo, mnogo težja.

Linearne subdivizijske sheme izračunajo nove kontrolne točke kot affine kombinacije kontrolnih točk prejšnjega nivoja, kar zaradi enostavnosti operacij pomeni hitro generiranje limitne krivulje, poleg tega pa jih lahko, kot bomo videli, enostavno predstavimo.

Ločimo tudi **interpolacijske** in **aproksimacijske** subdivizijske sheme. Pri prvih na vsakem nivoju subdivizije ohranimo vse točke prejšnjega nivoja, kar pomeni, da limitna krivulja interpolira točke začetnega kontrolnega poligona. Pri aproksimacijskih subdivizijskih shemah to v splošnem ne drži.

V tem diplomskem delu se bomo ukvarjali s stacionarnimi linearnimi subdivizijskimi shemami.

Stacionarna linearna subdivizijska shema je določena z masko a , ki je zaporedje koeficientov

$$a = (a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^s}.$$

Pri tem gre za $s = 1$ za shemo za generiranje krivulj, za $s = 2$ pa shema generira ploskev. Pravilo za izračun kontrolnih točk na k -tem nivoju je glede na masko a naslednje:

$$\mathbf{P}_\alpha^k = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} a_{\alpha-2\beta} \mathbf{P}_\beta^{k-1}. \quad (1.1)$$

Pri enačbi (1.1) predpostavljamo, da so točke \mathbf{P}_β definirane za vse indekse β , kljub temu da jih je v praksi samo končno mnogo. Podobno za koeficiente a_α predpostavimo, da je $a_\alpha = 0$ za $\alpha \notin I$, kjer je I končna množica indeksov, za katere so koeficienti a_α neničelni.

Opazimo tudi, da so za $s = 1$ indeksi koeficientov $a_{\alpha-2\beta}$ vselej sodi za sode α in vselej lihi za lihe α , kar pomeni, da bomo za $s = 1$ imeli dve pravili, in sicer

$$P_{2\alpha}^k = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}} a_{2\alpha-2\beta} P_\beta^{k-1} = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}} a_{2\beta} P_{\alpha-\beta}^{k-1}$$

za točke s sodimi indeksi in

$$P_{2\alpha+1}^k = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}} a_{2\alpha+1-2\beta} P_\beta^{k-1} = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}} a_{2\beta+1} P_{\alpha-\beta}^{k-1}$$

za točke z lihimi indeksi.

Analogno dobimo za $s = 2$ štiri različna pravila glede na sodost oz. lihost obeh komponent indeksa posamezne kontrolne točke. Namreč

$$P_{2\alpha_1+1, 2\alpha_2+1}^k = \sum_{(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{Z}^2} a_{2\beta_1+1, 2\beta_2+1} P_{\alpha_1-\beta_1, \alpha_2-\beta_2}^{k-1},$$

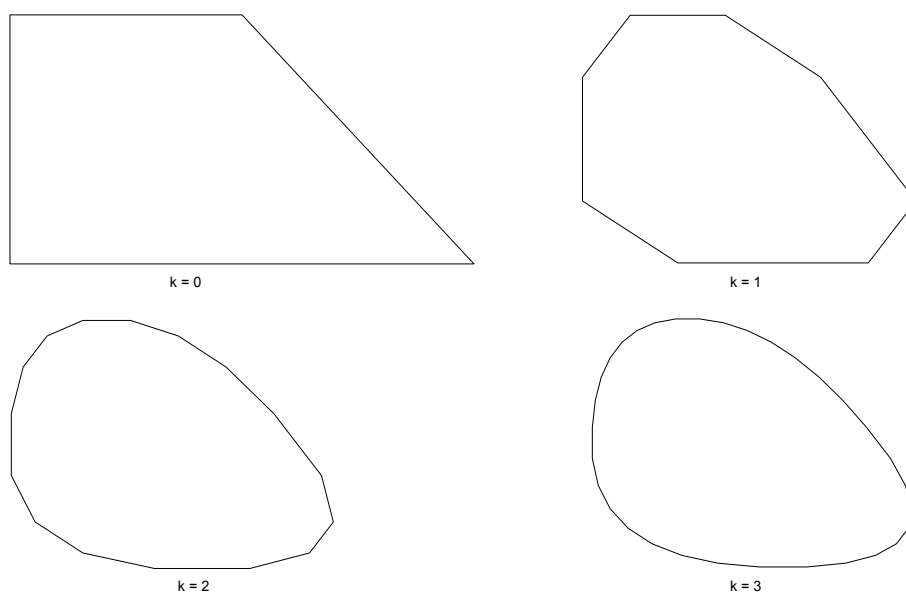
$$P_{2\alpha_1+1, 2\alpha_2}^k = \sum_{(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{Z}^2} a_{2\beta_1+1, 2\beta_2} P_{\alpha_1-\beta_1, \alpha_2-\beta_2}^{k-1},$$

$$P_{2\alpha_1, 2\alpha_2+1}^k = \sum_{(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{Z}^2} a_{2\beta_1, 2\beta_2+1} P_{\alpha_1-\beta_1, \alpha_2-\beta_2}^{k-1},$$

$$P_{2\alpha_1, 2\alpha_2}^k = \sum_{(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{Z}^2} a_{2\beta_1, 2\beta_2} P_{\alpha_1-\beta_1, \alpha_2-\beta_2}^{k-1}.$$

V splošnem bi tako za dimenzijo s dobili 2^s pravil za izračun novih kontrolnih točk.

Kot primer linearne subdivizijske sheme si oglejmo Chaikinov algoritem, znan tudi kot "rezanje kotov", kar je dober opis ideje algoritma, saj nove kontrolne točke vsakič dobimo kot delilne točke na četrtni in treh četrtninah daljic starega kontrolnega poligona. Novi kontrolni poligon tedaj izgleda tako, kot bi staremu "odrezali kote".



Slika 1.1: Chaikinov algoritem.

Slika 1.1 prikazuje začetni kontrolni poligon in tri korake Chaikinovega algoritma.

Formalno so pri Chaikinovem algoritmu točke k -tega nivoja definirane kot

$$P_{2i}^k = \frac{3}{4}P_{i-1}^{k-1} + \frac{1}{4}P_i^{k-1},$$

$$P_{2i+1}^k = \frac{1}{4}P_{i-1}^{k-1} + \frac{3}{4}P_i^{k-1}.$$

Maska algoritma je torej

$$a_0 = a_3 = \frac{1}{4},$$

$$a_1 = a_2 = \frac{3}{4}.$$

Iz slike 1.1 pa tudi iz enačb za izračun novih kontrolnih točk je razvidno, da je Chaikinov algoritem aproksimativna subdivizijska shema, saj ne ohranja točk prejšnjega nivoja. Izkazuje se, da je v tesni povezavi s kardinalnim B-zlepkom stopnje 2 in zato konvergira k zvezno odvedljivi krivulji.

Več o subdivizijskih shemah in B-zlepkih sledi v drugem poglavju, kjer si bomo

bolj natanko ogledali povezave med njimi.

V tretjem poglavju bomo obravnavali stacionarne linearne sheme na splošno in si ogledali nekaj izrekov o njihovi konvergenci in gladkosti krivulj, ki jih generirajo.

V četrtem poglavju bomo nekaj pozornosti namenili interpolacijskim shemam. Ogledali si bomo shemo na štirih točkah (angl. four point scheme) in njeno ustreznico na šestih točkah.

Zadnje poglavje pa bomo posvetili subdiviziji v dveh dimenzijah, torej generiranju ploskev. Omejili se bomo na subdivizijo na regularni mreži s tenzorskimi produkti enodimenzionalnih shem, ki jih bomo spoznali v prvih štirih poglavjih.

Skozi vsa poglavja se bomo ustavljali le pri elementarnejših dokazih izrekov in lastnosti. Veliko več poudarka bo na prikazu njihove veljavnosti na primerih, pri čemer nam bo v pomoč implementacija linearnih subdivizijskih shem v okolju MATLAB. Vse slike, ki bodo sledile v nadaljnjih poglavjih, bodo namreč plod funkcij, ki sem jih implementiral v ta namen.

Poglavje 2

Subdivizijske sheme iz kardinalnih B-zlepkov

B-zlepki so odsekoma polinomske funkcije, s pomočjo katerih je moč konstruirati gladke krivulje na danih kontrolnih točkah. Iz njih bomo izpeljali linearne subdivizijske sheme, ki konvergirajo k istim gladkim krivuljam. V splošnem so vozli B-zlepkov lahko poljubni in večkratni, za nas pa bodo pomembni samo kardinalni B-zlepki, ki imajo za enostavne vozle cela števila.

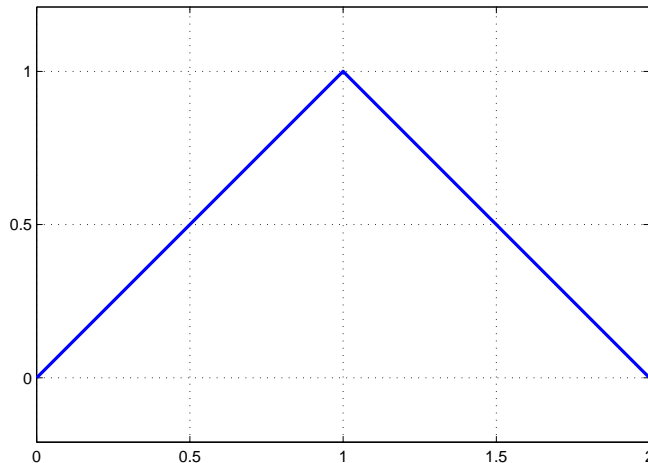
Kardinalni B-zlepek stopnje m je funkcija B_m z naslednjimi lastnostmi:

1. $B_m \in C^{m-1}(\mathbb{R})$, zožitev $B_m|_{(i,i+1)}$ pa je polinomska funkcija stopnje največ m za vsak $i \in \mathbb{Z}$.
2. $B_m(x) > 0$ za $x \in (0, m+1)$ in $B_m(x) = 0$ za $x \notin (0, m+1)$.
3. $\sum_{i \in \mathbb{Z}} B_m(x-i) = 1$ za $\forall x \in \mathbb{R}$.
4. Vsako funkcijo $f \in C^{m-1}$ s polinomskimi zožitvami na intervalih $(i, i+1)$, $i \in \mathbb{Z}$, je moč enolično zapisati kot linearno kombinacijo funkcij $B_m(\cdot - i)$, $i \in \mathbb{Z}$.

Naj bo torej B_m B-zlepek stopnje m . Tedaj lahko na kontrolnih točkah $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$ definiramo krivuljo s predpisom

$$\mathbf{C}(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i B_m(t-i). \quad (2.1)$$

Krivulja \mathbf{C} je zvezna in $(m-1)$ -krat zvezno odvedljiva, točke na krivulji pa ležijo v notranjosti konveksne lupine točk $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$.



Slika 2.1: Zlepke B_1 , kjer je različen od 0

Podobno lahko za množico točk $\{\mathbf{P}_{i,j}, i = 1, 2, \dots, n_1, j = 1, 2, \dots, n_2\}$ na podlagi B-zlepka B_m definiramo ploskev S kot

$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \mathbf{P}_{i,j} B_m(u - i) B_m(v - j)$$

Za ploskev S ravno tako velja, da je zvezna in $(m - 1)$ -krat zvezno odvedljiva ter leži v konveksni lupini kontrolnih točk $\{\mathbf{P}_{i,j}, i = 1, 2, \dots, n_1, j = 1, 2, \dots, n_2\}$.

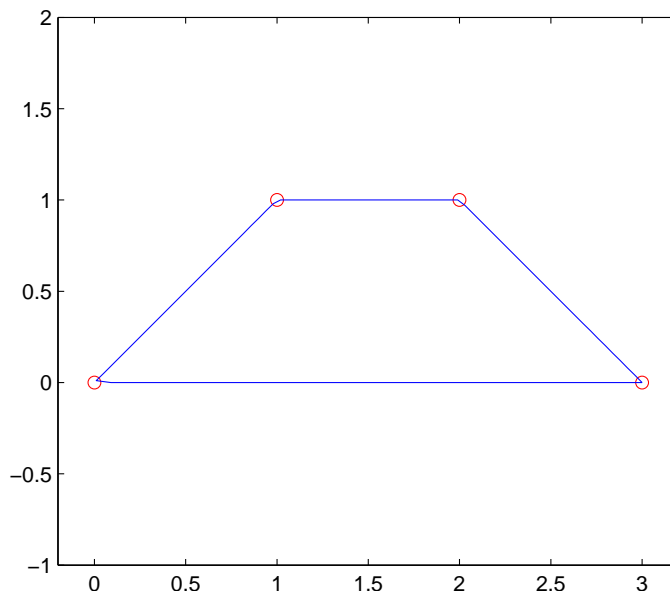
Oglejmo si kot primer funkcijo B_1 , definirano s predpisom

$$B_1(x) = \begin{cases} x; & \text{za } x \in [0, 1], \\ 2 - x; & \text{za } x \in [1, 2], \\ 0; & \text{sicer.} \end{cases}$$

Ni težko preveriti, da je funkcija B_1 kardinalni zlepek stopnje 1. Njen graf na intervalu $[0, 2]$, kjer je različna od 0, je prikazan na sliki 2.1.

Za B_1 definirajmo še primer krivulje \mathbf{C}_1 po enačbi (2.1). Kontrolne točke v ravnini naj bodo $\mathbf{P}_1 = (0, 0)$, $\mathbf{P}_2 = (1, 1)$, $\mathbf{P}_3 = (2, 1)$ in $\mathbf{P}_4 = (3, 0)$, pri čemer smatramo, da je kontrolni poligon zaprt in je torej $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_4$. Dobimo torej krivuljo

$$\mathbf{C}_1(t) = \sum_{i=1}^4 \mathbf{P}_i B_1(t - i)$$



Slika 2.2: Krivulja, ki jo generira zlepek B_1 na kontrolnih točkah $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,1)$ in $(3,0)$

ki je za $t \in [1, 5]$ kar kontrolni poligon, ki ga določajo dočke $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4$ in \mathbf{P}_5 , kar je vidno na sliki 2.2. Velja $C_1(i+1) = \mathbf{P}_i$. Krivulja je zvezna, vendar v kontrolnih točkah ni odvedljiva, zato je $\mathbf{C}_1 \in \mathcal{C}^0$.

Pri določanju B-zlepkov višjih stopenj je koristna naslednja lastnost:

$$B_{m+1}(x) = \int_{x-1}^x B_m(t) dt. \quad (2.2)$$

Vemo, da je B_1 kardinalni B-zlepek stopnje 1. Predpostavimo, da je B_m kardinalni B-zlepek m -te stopnje in pokažimo, da je tedaj B_{m+1} , definiran z enačbo (2.2), res kardinalni B-zlepek stopnje $m+1$:

1. Ker je $B_m \in C^{m-1}$ in odsekoma polinom, je $\int_{x-1}^x B_m(t) dt \in C^m$ in tudi odsekoma polinom.
2. B_{m+1} je res pozitivna na $(0, m+2)$ in ničelna povsod drugod.

3. $\sum_{i \in \mathbb{Z}} B_{m+1}(x - i) = 1$, saj je

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbb{Z}} B_{m+1}(x - i) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \int_{x-i-1}^{x-i} B_m(t) dt = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \int_{x-1}^x B_m(t - i) dt = \\ &= \int_{x-1}^x \sum_{i \in \mathbb{Z}} B_m(t - i) dt = \int_{x-1}^x 1 dt = x - (x - 1) = 1 \end{aligned}$$

4. Vzemimo poljubno $f \in C^m$ s polinomskimi zožitvami na intervalih $(i, i + 1)$, $i \in \mathbb{Z}$. Tedaj za f' velja po indukcijski predpostavki

$$f' = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \alpha_i B_m(\cdot - i)$$

in s tem:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{x-1}^x f'(t) dt = \int_{x-1}^x \sum_{i \in \mathbb{Z}} \alpha_i B_m(t - i) dt = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \alpha_i \int_{x-i-1}^{x-i} B_m(t) dt = \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \alpha_i B_{m+1}(t - i) \end{aligned}$$

kar pomeni, da smo f zapisali z linearno kombinacijo premaknjenih kardinalnih B-zlepkov stopnje $m + 1$.

Funkcija B_{m+1} , definirana z enačbo (2.2), je torej res kardinalni B-zlepek stopnje $m + 1$.

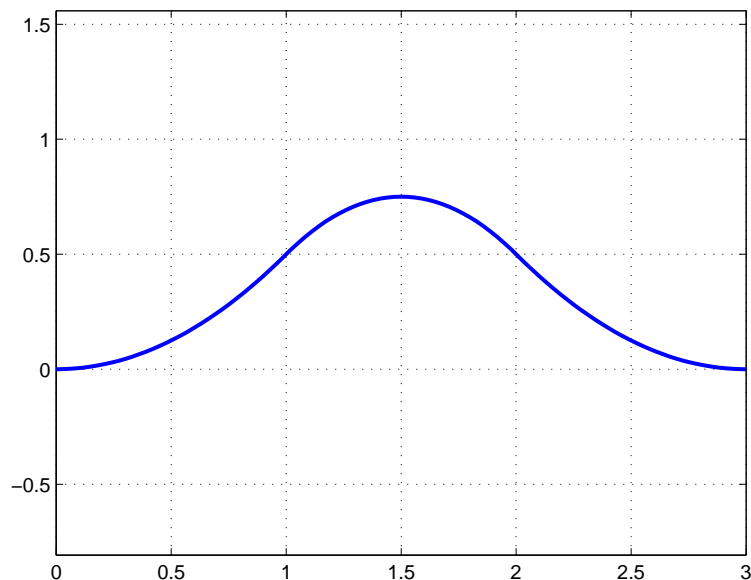
Zdaj lahko iz B-zlepka stopnje 1 izračunamo B-zlepek stopnje 2:

$$B_2(x) = \int_{x-1}^x B_1(t) dt = \begin{cases} x^2/2; & \text{za } x \in [0, 1], \\ -x^2 + 3x - 3/2; & \text{za } x \in [1, 2], \\ (x - 3)^2/2; & \text{za } x \in [2, 3], \\ 0; & \text{sicer.} \end{cases}$$

Graf B_2 je izrisan na sliki 2.3. Enako kot prej pogledjmo še primer krivulje, ki jo generira B_2 . Vzemimo iste kontrolne točke $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4$ v ravnini in definirajmo

$$\mathbf{C}_2(t) = \sum_{i=1}^4 \mathbf{P}_i B_2(t - i)$$

Krivuljo $\mathbf{C}_2(t)$ za $t \in [1, 5]$ vidimo na sliki 2.4. Vidna je razlika v gladnosti v

Slika 2.3: Zlepek B_2 , kjer je različen od 0

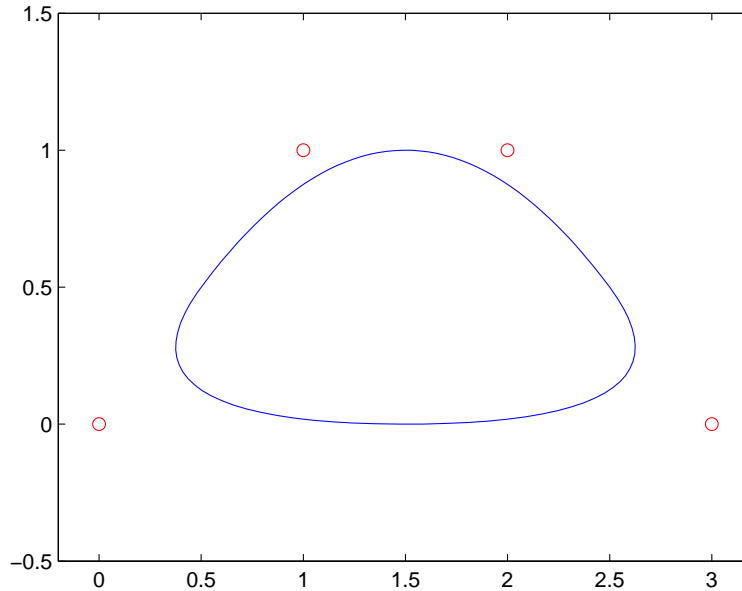
primerjavi s krivuljo C_1 , ki smo jo definirali z B-zlepkom stopnje 1, kar nam je zagotavljalo samo zveznost. Z zlepkom B_2 pa smo zagotovili, da je $C_2 \in C^1$, torej ima C_2 zvezen še prvi odvod.

B-zlepki imajo še eno zanimivo lastnost, ki jo bomo izkoristili pri subdivizijskih shemah. Velja namreč

$$B_m(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{j,m} B_m(2x - j),$$

kjer je neničelnih koeficientov $a_{j,m}$ le končno mnogo.

Če to upoštevamo v enačbi (2.1), ki določa krivuljo na kontrolnih točkah \mathbf{P}_1 ,



Slika 2.4: Krivulja, ki jo generira zlepek B_2 na kontrolnih točkah $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,1)$, $(3,0)$, $(0,0)$

$\mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$, dobimo

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}(t) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbf{P}_i B_m(t - i) \\
 &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbf{P}_i \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{j,m} B_m(2t - 2i - j) \\
 &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbf{P}_i \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{j-2i,m} B_m(2t - j) \\
 &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_{j-2i,m} \mathbf{P}_i \right) B_m(2t - j)
 \end{aligned}$$

Če označimo $\mathbf{P}_i^0 := \mathbf{P}_i$ in definiramo

$$\mathbf{P}_i^{k+1} = \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{j-2i,m} \mathbf{P}_i^k \right)$$

dobimo zaporedje nivojev kontrolnih točk, za katerega velja

$$\mathbf{C}(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbf{P}_i^0 B_m(t - i) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbf{P}_i^1 B_m(2t - i) = \dots = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbf{P}_i^k B_m(2^k t - i)$$

Dobili smo torej subdivizijsko shemo z začetnimi kontrolnimi točkami $\mathbf{P}_1^0, \mathbf{P}_2^0, \dots, \mathbf{P}_n^0$ in masko $a = (a_{j,m})_{j \in \mathbb{Z}}$, kjer je m stopnja ustreznega kardinalnega B-zlepka. Točka \mathbf{P}_i^k ustreza mrežni točki $2^{-k}i$. Z višanjem nivoja k se točke \mathbf{P}_i^k bližajo krivulji C in v limiti tudi ležijo na njej.

Za $m = 1$ je na primer

$$B_1(x) = \frac{1}{2}B_1(2x) + B_1(2x - 1) + \frac{1}{2}B_1(2x - 2),$$

kar pomeni, da so koeficienti maske $a_{0,1} = a_{2,1} = \frac{1}{2}$ in $a_{1,1} = 1$, ustrežna subdivizijska shema pa je

$$\mathbf{P}_{2i}^{k+1} = \frac{1}{2}\mathbf{P}_{i-1}^k + \frac{1}{2}\mathbf{P}_i^k$$

za točke s sodimi indeksi in

$$\mathbf{P}_{2i+1}^{k+1} = \mathbf{P}_i^k$$

za točke z lihimi indeksi. Opazimo, da ta shema ohranja vse točke prejšnjih nivojev, zato je interpolacijska. Kot bomo videli, je med shemami, porojenimi z B-zlepkami, ta tudi edina taka. Geometrijsko gledano v novem nivoju ohranimo stari kontrolni poligon, dodamo pa mu še razpolovišča stranic. Zato je očitno, da v limiti dobimo kar originalni kontrolni poligon, kakršnega smo dobili tudi s krivuljo C_1 , ki smo jo definirali z B-zlepkom prve stopnje.

Poglejmo še primer, ko je $m = 2$. Z integriranjem enačbe (2) od $x - 1$ do x , kot veli pravilo (2.2), dobimo zvezo

$$B_2(x) = \frac{1}{4}B_2(2x) + \frac{3}{4}B_2(2x - 1) + \frac{3}{4}B_2(2x - 2) + \frac{1}{4}B_2(2x - 3).$$

Maska, ki jo dobimo, je torej $a_{0,2} = a_{3,2} = \frac{1}{4}$ in $a_{1,2} = a_{2,2} = \frac{3}{4}$. Ustrežna subdivizijska shema pa deluje po pravilu

$$\mathbf{P}_{2i}^{k+1} = \frac{3}{4}\mathbf{P}_{i-1}^k + \frac{1}{4}\mathbf{P}_i^k$$

za točke s sodimi indeksi in

$$\mathbf{P}_{2i+1}^{k+1} = \frac{1}{4}\mathbf{P}_{i-1}^k + \frac{3}{4}\mathbf{P}_i^k$$

za točke z lihimi indeksi.

To shemo smo videli že v uvodu - gre za Chaikinov algoritem. Zdaj vemo, da Chaikinov algoritem v limiti generira krivuljo kardinalnega zlepk stopnje 2, ki je zvezna in enkrat zvezno odvedljiva. Primer konvergence Chaikinovega algoritma kaže slika 2.5.

Oglejmo si še izračun koeficientov $a_{j,m}$ pri splošnem m . Računajmo

$$\begin{aligned} B_m(t) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{j,m} B_m(2t - j) \\ \int_{x-1}^x B_m(t) dt &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{j,m} \int_{x-1}^x B_m(2t - j) dt \\ B_{m+1}(x) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{j,m} \frac{1}{2} \int_{2x-j-2}^{2x-j} B_m(t) dt \\ B_{m+1}(x) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{j,m} \frac{1}{2} \left(\int_{2x-j-2}^{2x-j-1} B_m(t) dt + \int_{2x-j-1}^{2x-j} B_m(t) dt \right) \\ B_{m+1}(x) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{j,m} \frac{1}{2} (B_{m+1}(2x - j - 1) + B_{m+1}(2x - j)) \\ B_{m+1}(x) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2} (a_{j-1,m} + a_{j,m}) B_{m+1}(2x - j) \end{aligned}$$

Ker pa je

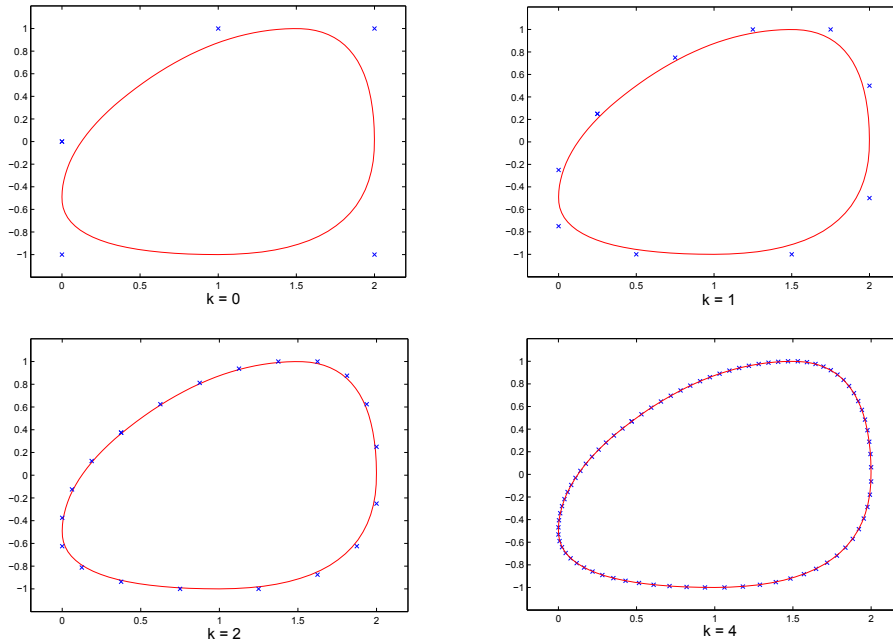
$$B_{m+1}(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{j,m+1} B_{m+1}(2x - j),$$

velja

$$a_{j,m+1} = \frac{1}{2}(a_{j-1,m} + a_{j,m}) \quad (2.3)$$

kar nam da rekurzivno zvezo med koeficienti $a_{j,m}$, kratek premislek pa pripelje tudi do splošne formule

$$a_{j,m} = 2^{-m} \binom{m+1}{j}, \quad j = 0, 1, \dots, m+1. \quad (2.4)$$



Slika 2.5: Konvergenca Chaikinove sheme (modre točke) h kardinalnemu zlepku stopnje 2 (rdeča krivulja).

Pokažimo z indukcijo, da formula (2.4) velja. Za $m = 1$ smo videli $a_{0,1} = a_{2,1} = \frac{1}{2}$ in $a_{1,1} = 1$, kar se ujema z našo formulo. Predpostavimo torej, da ta velja za m . Po enačbi (2.3) dobimo:

$$\begin{aligned}
 a_{j,m+1} &= \frac{1}{2}(a_{j-1,m} + a_{j,m}) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(2^{-m} \binom{m+1}{j-1} + 2^{-m} \binom{m+1}{j} \right) = \\
 &= 2^{-m-1} \left(\binom{m+1}{j-1} + \binom{m+1}{j} \right) \\
 &= 2^{-(m+1)} \binom{m+2}{j},
 \end{aligned}$$

kar pomeni, da zveza (2.4) velja tudi za $m + 1$ in je ta tako dokazana.

Subdivizijske sheme iz B-zlepkov so podlaga za splošnejše linearne sheme, ki jih bomo opisali v naslednjem poglavju.

Poglavje 3

Splošne linearne sheme

Pri subdivizijskih shemah iz prejšnjega poglavja nam je njihova konstrukcija iz kardinalnih B-zlepkov zagotavljala konvergenco in gladkost ustreznega zlepka tudi za limitno krivuljo sheme [1]. V splošnem takega zagotovila za linearne sheme ni in pri naključnem izboru koeficientov maske $a = (a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^s}$ se nam prav lahko zgodi, da shema divergira.

Poglejmo tak primer. Vzemimo subdivizijsko shemo z masko

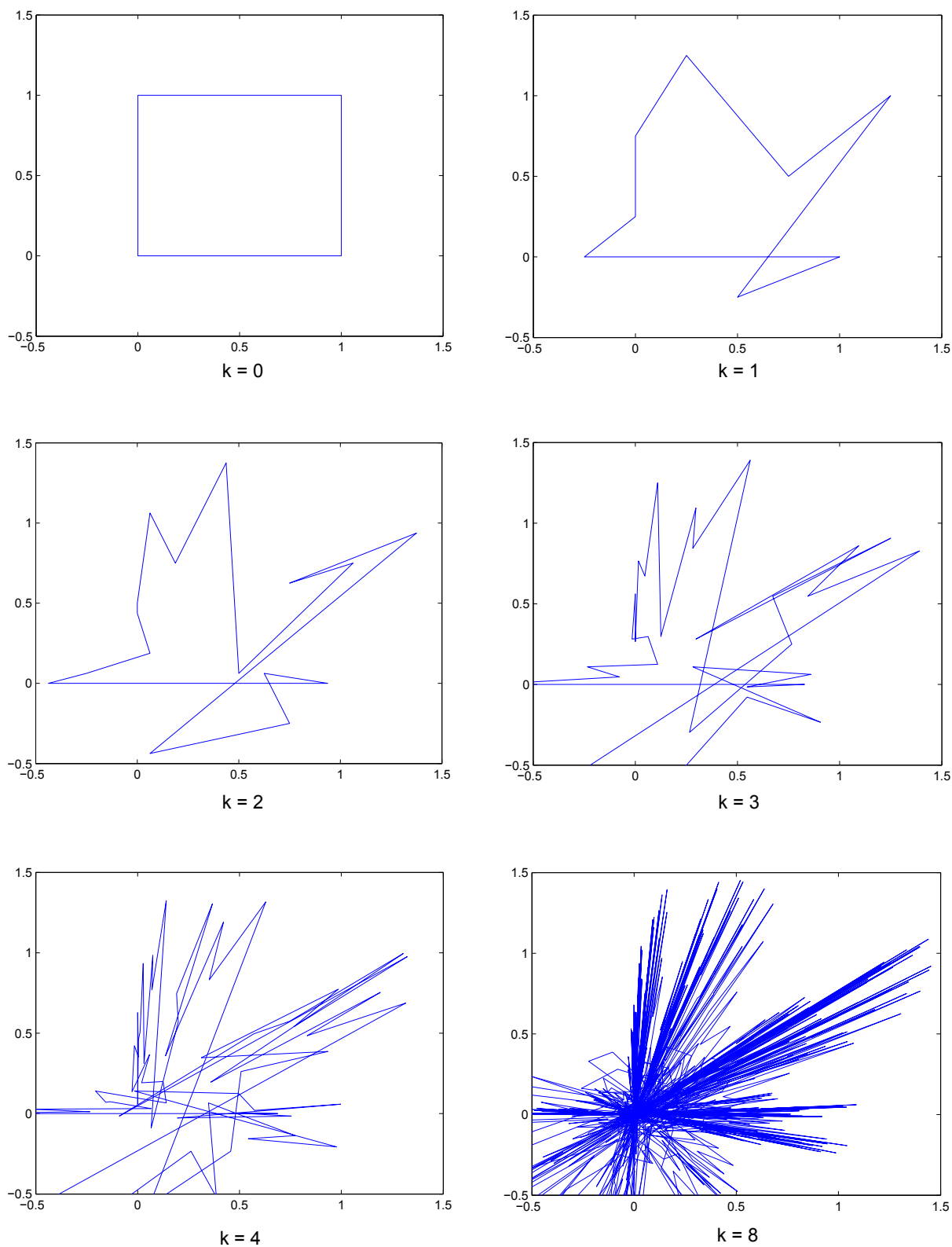
$$a_0 = \frac{1}{4}, \quad a_1 = 1$$
$$a_2 = \frac{3}{4}, \quad a_3 = -\frac{1}{4}$$

Subdivizijski pravili sta torej:

$$\mathbf{P}_{2i}^k = \frac{3}{4}\mathbf{P}_{i-1}^{k-1} + \frac{1}{4}\mathbf{P}_i^{k-1}$$
$$\mathbf{P}_{2i+1}^k = -\frac{1}{4}\mathbf{P}_{i-1}^{k-1} + \mathbf{P}_i^{k-1}$$

Oglejmo si nekaj korakov take subdivizije. Prikazuje jo slika 3.1. Očitno je, da shema divergira. Dovolj je divergenca za eno začetno množico točk, saj za konvergentno shemo zahtevamo, da konvergira k limitni krivulji za vsak začetni kontrolni poligon.

V nadaljevanju si bomo ogledali nekatere pogoje za konvergenco linearnih subdivizijskih shem. Preden pa to storimo, si pogledajmo, kaj natanko imamo v mislih, ko govorimo o konvergentnih subdivizijskih shemah. Pri analizi lastnosti



Slika 3.1: Divergenca sheme z masko $[1 \ 4 \ 3 \ -1]/4$ na zaprtem začetnem kontrolnem poligonu na točkah $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ in $(1,0)$.

limitnih krivulj oz. ploskev je potrebno vsako njihovo komponento obravnavati posebej. V resnici torej neodvisno obravnavamo zaporedja kontrolnih točk v \mathbb{R} in je konvergenco subdivizijske sheme dovolj definirati na eni komponenti [1]. Točke k -tega nivoja bomo zaradi jasnosti tedaj označevali z f_α^k , kjer $f_\alpha^k \in \mathbb{R}$ ustreza mrežni točki $2^{-k}\alpha$.

Definicija 3.1. *Subdivizijska shema S je **konvergentna**, če za vsako začetno zaporedje kontrolnih točk $f^0 = \{f_\alpha^0, \alpha \in \mathbb{Z}^s\}$ obstaja zvezna funkcija $f \in C(\mathbb{R}^s)$, da velja*

$$\lim_{l \leftarrow k \rightarrow \infty} |(S^k f^0)_{2^{k-l}\alpha} - f(2^{-l}\alpha)| = 0 \quad \text{za } \forall \alpha \in \mathbb{Z}^s, l \in \mathbb{Z}^+, \quad (3.1)$$

in če za vsaj eno začetno zaporedje f^0 ta funkcija ni identično enaka nič.

Z oznako $S^k f^0$ mislimo na k -ti nivo subdivizijske sheme S pri začetnem zaporedju f^0 , limitno funkcijo pa tako označimo z $S^\infty f^0$. Število l v definiciji potrebujemo zato, ker želimo, da subdivizijska shema konvergira za vsako mrežno točko $2^{-l}\alpha$, ki smo jo morda definirali šele v l -tem nivoju subdivizije in v začetnem zaporedju kontrolnih točk še ni določena.

Kot običajno pa konvergenca po točkah ni edina možnost, zato vpeljimo še pojem enakomerne konvergence.

Definicija 3.2. *Subdivizijska shema S je **enakomerno konvergentna**, če za poljubno kompaktno množico $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ in za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja število $K(\varepsilon, \Omega) \in \mathbb{Z}$, da velja*

$$|(S^k f^0)_\alpha - f(2^{-k}\alpha)| < \varepsilon, \quad \text{za } \forall k > K(\varepsilon, \Omega), \forall \alpha \in \mathbb{Z}^s \cap 2^k\Omega. \quad (3.2)$$

Ekvivalentna formulacija je, da zahtevamo, da za vsa zaporedja $f^0 \in l^\infty(\mathbb{Z}^s)$ velja

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|S^k f^0 - f(\frac{\cdot}{2^k})\|_\infty = 0,$$

kjer $f(\frac{\cdot}{2^k})$ pomeni zaporedje $(f(2^{-k}\alpha))_{\alpha \in \mathbb{Z}^s}$.

Norma $\|\cdot\|_\infty$ je tu definirana kot

$$\|f^0\|_\infty = \sup \{|f_\alpha^0|, \alpha \in \mathbb{Z}^s\}, f^0 \in l^\infty(\mathbb{Z}^s),$$

oziroma v funkcijskem primeru

$$\|f\|_\infty = \sup \{|f(x)|, \quad x \in \mathbb{R}^s\}, f \in C(\mathbb{R}^s).$$

Poglejmo zdaj preprost potreben pogoj za enakomerno konvergenco linearne subdivizijske sheme S .

Trditev 3.1. *Naj bo S enakomerno konvergentna linearna subdivizijska shema z masko $a = \{a_\alpha, \alpha \in \mathbb{Z}^s\}$. Tedaj velja:*

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} a_{\gamma-2\alpha} = 1 \quad \text{za} \quad \forall \gamma \in E_s, \quad (3.3)$$

Tukaj E_s pomeni množico skrajnih točk hiperkocke dimenzije s . Za $s = 1$ je torej $E_1 = \{0, 1\}$, za $s = 2$ pa $E_2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$. V vsakem izmed subdivizijskih pravil mora torej vsota nastopajočih koeficientov znašati 1, sicer shema gotovo ne bo enakomerno konvergentna.

Dokaz: Naj bo f^0 tako začetno zaporedje točk, da $f = S^\infty f^0 \neq 0$. Zaradi zveznosti f obstaja vsaj kaka mrežna točka $2^{-l}\alpha$ (torej $l \in \mathbb{Z}^+, \alpha \in \mathbb{Z}^s$), da je $f(2^{-l}\alpha) \neq 0$.

Naj bo Ω okolica take točke $2^{-l}\alpha$. Za dovolj velik k tedaj veljata zvezi:

$$2^{-l}\alpha + 2^{-k}\gamma \in \Omega \quad \text{za} \quad \gamma \in E_s \quad (3.4)$$

$$2^{-l}\alpha - 2^{-k+1}\beta \in \Omega \quad \text{za} \quad \gamma \in \Lambda, \quad (3.5)$$

kjer je $\Lambda = \{\beta; a_{\gamma+2\beta} \neq 0, \gamma \in E_s\}$. Ker je maska a končna, je končna tudi množica Λ , zato lahko enačba (3.5) res velja za dovolj velik k .

Za $k > l$ velja

$$f_{2^{k-l}\alpha+\gamma}^k = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} a_{2^{k-l}\alpha+\gamma-2\beta} f_\beta^{k-1} = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} a_{\gamma+2\beta} f_{2^{k-l-1}\alpha-\beta}^{k-1}. \quad (3.6)$$

Za shemo S smo predpostavili, da je enakomerno konvergentna, zato za $\forall \varepsilon > 0$ obstaja $K(\varepsilon, \Omega)$, da za $\forall k > K(\varepsilon, \Omega)$ velja

$$|f_{2^{k-l}\alpha+\gamma}^k - f(2^{-l}\alpha + 2^{-k}\gamma)| < \varepsilon,$$

$$|f_{2^{k-l-1}\alpha+\beta}^{k-1} - f(2^{-l}\alpha + 2^{-k+1}\beta)| < \varepsilon,$$

ali drugače

$$f_{2^{k-l}\alpha+\gamma}^k = f(2^{-l}\alpha + 2^{-k}\gamma) + \eta_k, \quad \forall \gamma \in E_s, |\eta_k| < \varepsilon, \quad (3.7)$$

$$f_{2^{k-l-1}\alpha+\beta}^{k-1} = f(2^{-l}\alpha + 2^{-k+1}\beta) + \theta_{k,\beta}, \quad \forall \beta \in \Lambda, |\theta_{k,\beta}| < \varepsilon \quad (3.8)$$

Če vstavimo (3.7) in (3.8) v (3.6), dobimo

$$f(2^{-l}\alpha + 2^{-k}\gamma) + \eta_k = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} a_{\gamma+2\beta} (f(2^{-l}\alpha - 2^{-k+1}\beta) + \theta_{k,\beta})$$

$$f(2^{-l}\alpha + 2^{-k}\gamma) - \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} a_{\gamma+2\beta} f(2^{-l}\alpha - 2^{-k+1}\beta) = -\eta_k + \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} a_{\gamma+2\beta} \theta_{k,\beta}$$

in v limiti, ko pošljemo $k \rightarrow \infty$,

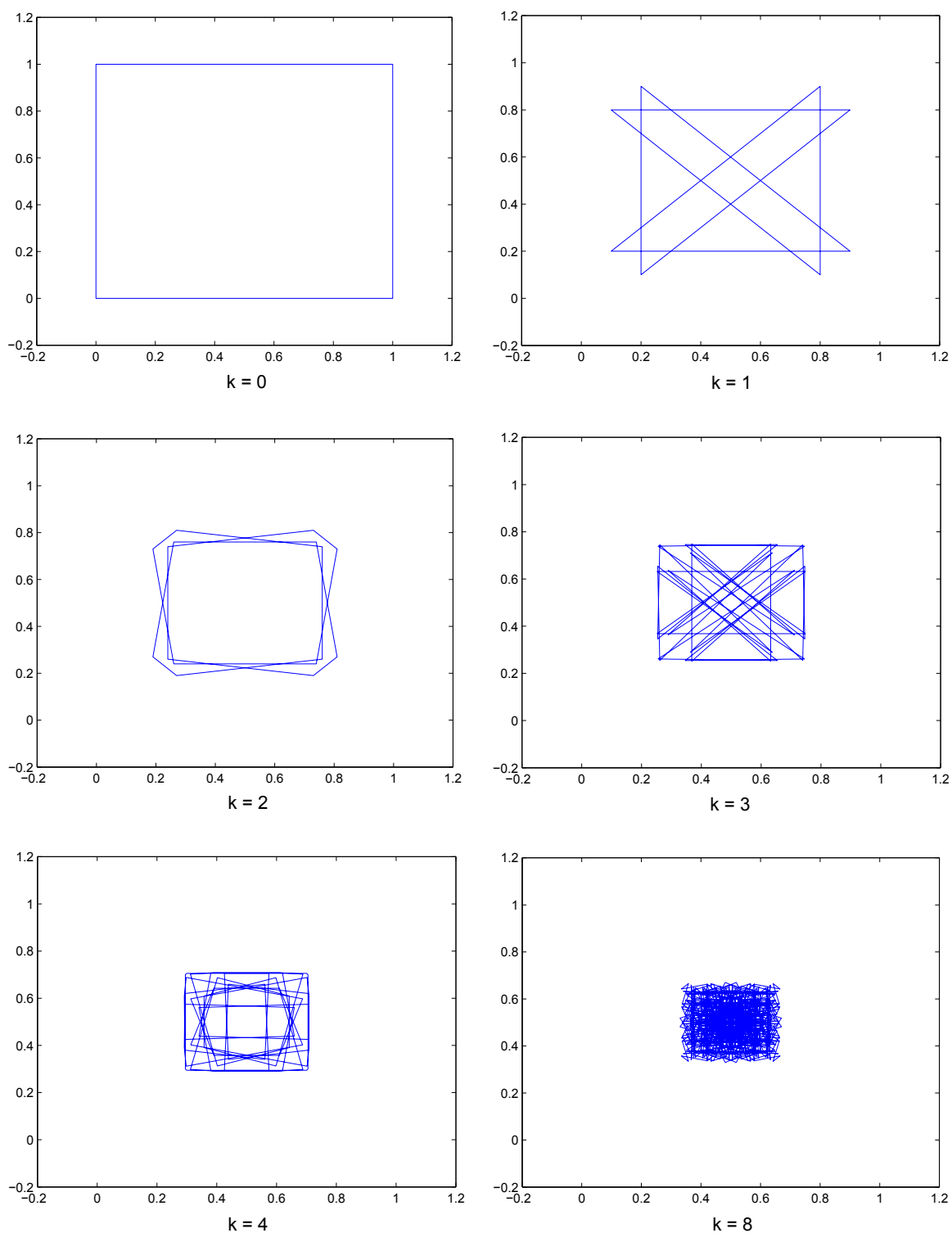
$$\begin{aligned} |f(2^{-l}\alpha) - \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} a_{\gamma+2\beta} f(2^{-l}\alpha)| &\leq \varepsilon (1 + \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} |a_{\gamma+2\beta}|) \\ |f(2^{-l}\alpha) (1 - \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} a_{\gamma+2\beta})| &\leq \varepsilon (1 + \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} |a_{\gamma+2\beta}|). \end{aligned}$$

Ker pa je ε poljubno majhen in $\ker f(2^{-l}\alpha) \neq 0$, sledi

$$\sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} a_{\gamma+2\beta} = 1 \quad \text{za} \quad \forall \gamma \in E_s,$$

kar smo želeli pokazati in s tem je dokaz končan.

Da pogoj (3.3) res ni zadosten, preverimo na primeru. Vzemimo linearno subdivizijsko shemo z masko $a_0 = a_5 = \frac{4}{5}$ in $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \frac{1}{10}$. Očitno za to shemo velja lastnost (3.3), vendar pa nam slika 3.2 pokaže, da shema v resnici divergira.



Slika 3.2: Divergenca sheme z masko $[8 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 8]/10$ na zaprtem začetnem kontrolnem poligonu na točkah $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ in $(1,0)$.

Na tem mestu definirajmo za subdivizijsko shemo S z masko a linearni operator

$$T\Psi = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} a_\alpha \Psi(2 \cdot -\alpha).$$

Tedaj velja

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} (S^k f^0)_\alpha \Psi(2^k x - \alpha) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} f_\alpha^0(T^k \Psi)(x - \alpha), \quad (3.9)$$

kar bomo potrebovali pri dokazih v nadaljevanju. Dokaz zveze (3.9) naredimo z indukcijo.

Za $k = 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} (S f^0)_\alpha \Psi(2x - \alpha) &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} \left(\sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} a_{\alpha-2\beta} f_\beta^0 \right) \Psi(2x - \alpha) = \\ &= \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} f_\beta^0 \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} a_{\alpha-2\beta} \Psi(2x - \alpha) = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} f_\beta^0 \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^s} a_\gamma \Psi(2x - 2\beta - \gamma) = \\ &= \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} f_\beta^0 \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^s} a_\gamma \Psi(2(x - \beta) - \gamma) = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} f_\beta^0 (T\Psi)(x - \beta). \end{aligned}$$

Indukcijski korak:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} (S^{k+1} f^0)_\alpha \Psi(2^{k+1}x - \alpha) &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} \left(\sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} a_{\alpha-2\beta} S^k f_\beta^0 \right) \Psi(2^{k+1}x - \alpha) = \\ &= \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} S^k f_\beta^0 \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} a_{\alpha-2\beta} \Psi(2^{k+1}x - \alpha) = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} S^k f_\beta^0 \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^s} a_\gamma \Psi(2^{k+1}x - 2\beta - \gamma) = \\ &= \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} S^k f_\beta^0 \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^s} a_\gamma \Psi(2(2^k x - \beta) - \gamma) = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} S^k f_\beta^0 (T\Psi)(2^k x - \beta) \end{aligned}$$

in po indukcijski predpostavki

$$\begin{aligned} \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} S^k f_\beta^0 (T\Psi)(2^k x - \beta) &= \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} f_\beta^0 T^k (T\Psi)(2^k x - \beta) = \\ &= \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} f_\beta^0 (T^{k+1} \Psi)(2^k x - \beta), \end{aligned}$$

kar smo želeli pokazati.

Navedimo še eno lastnost, ki jo bomo uporabili v nadaljevanju, vendar je ne bomo dokazali (dokaz se nahaja v [3]). Naj bo $\psi \in C(\mathbb{R}^s)$ funkcija, ki zadošča pogoju

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} \psi(x - \alpha) = 1, \quad x \in \mathbb{R}^s,$$

in naj bo S subdivizijska shema z masko, ki ima lastnost (3.3). Če je S enakomerno konvergentna, tedaj velja

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} (S^k f^0)_\alpha \psi(2^k \cdot -\alpha) = S^\infty f^0. \quad (3.10)$$

Poseben primer limitne funkcije dobimo, če vzamemo za f^0 zaporedje δ , ki ga definiramo kot $\{\delta_{\alpha,0}, \alpha \in \mathbb{Z}^s\}$, kjer je

$$\delta_{\alpha,0} = \begin{cases} 1, & \text{če } \alpha = (0, \dots, 0), \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases} \quad (3.11)$$

Funkcijo $\varphi = S^\infty \delta$, če obstaja, imenujemo **osnovna limitna funkcija** subdivizijske sheme S .

Trditev 3.2. Če je S enakomerno konvergentna subdivizijska shema z masko $a = \{a_\alpha, \alpha \in \mathbb{Z}^s\}$, potem je funkcija $\varphi = S^\infty \delta$ enolično določena in ima naslednje lastnosti:

$$\bullet \quad \varphi(x) = T\varphi(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} a_\alpha \varphi(2x - \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^s \quad (3.12)$$

$$\bullet \quad \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} \varphi(x - \alpha) = 1, \quad x \in \mathbb{R}^s \quad (3.13)$$

$$\bullet \quad \text{Za vsak } f^0 \text{ je } S^\infty f^0 = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} f_\alpha^0 \varphi(\cdot - \alpha) \quad (3.14)$$

Dokažimo samo drugo točko.

Vzemimo sledeče zaporedje začetnih kontrolnih točk:

$$f^0 = \{f_\alpha^0 = 1, \alpha \in \mathbb{Z}^s\}.$$

Ker je shema enakomerno konvergentna, vemo da velja lastnost (3.3) in dobimo

$$(Sf^0)_\alpha = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} a_{\alpha-2\beta} f_\beta^0 = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} a_{\alpha-2\beta} = 1 \quad \text{za } \forall \alpha \in \mathbb{Z}^s$$

in zato induktivno velja

$$(S^k f^0)_\alpha = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} a_{\alpha-2\beta} S^{k-1} f_\beta^0 = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} a_{\alpha-2\beta} = 1 \quad \text{za } \forall \alpha \in \mathbb{Z}^s.$$

Očitno je torej, da bo limitna funkcija v tem primeru $S^\infty \equiv 1$ in od tod dobimo

$$1 = S^\infty f^0(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} f_\alpha^0 \varphi(x - \alpha) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} \varphi(x - \alpha), \quad \text{za } \forall x \in \mathbb{R}^s$$

S tem smo dokazali lastnost (3.13).

Pokažimo še, da je φ res enolično določena. Naj bo torej ψ neka druga funkcija, ki zadošča lastnostim (3.12), (3.13) in (3.14). Pokazali bomo, da je tedaj $\psi \equiv \varphi$.

Po točkah (3.12) in (3.9) velja za vsak $k \geq 1$

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} f_\alpha^0 \psi(x - \alpha) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} S^k f_\alpha^0 \psi(2^k x - \alpha).$$

Ker za ψ velja točka (3.13), sledi po enačbi (3.10)

$$S^\infty f^0(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} (S^k f^0)_\alpha \psi(2^k x - \alpha) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} f_\alpha^0 \psi(x - \alpha).$$

Če za f^0 vzamemo $f^0 = \delta$, dobimo

$$\varphi(x) = S^\infty \delta(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} \delta_{\alpha,0} \psi(x - \alpha) = \psi(x), \quad \text{za } \forall x \in \mathbb{R}^s,$$

torej je φ res enolično določena.

Oglejmo si nekaj primerov osnovnih limitnih funkcij za sheme, ki smo jih že videli.

Slika 3.3 prikazuje konvergenco subdivizijske sheme z masko $a_0 = a_2 = \frac{1}{2}$ in

$a_1 = 1$, torej tisto, ki smo jo izpeljali iz kardinalnega B-zlepka prve stopnje, na začetnih podatkih δ . Kot je vidno na sliki, ima ta shema za osnovno limitno funkcijo natanko zlepek B_1 . Podobno je na sliki 3.4 vidna konvergenca za shemo iz B-zlepka stopnje 2. Tudi v splošnem sheme iz B-zlepkov za začetno zaporedje δ konvergirajo natanko k ustreznemu B-zlepku.

Slika 3.5 pa prikazuje še z vidika osnovne limitne funkcije divergenco sheme z masko $a_0 = a_5 = \frac{4}{5}$ in $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \frac{1}{10}$. Vidno je namreč, da za začetno zaporedje δ shema ne konvergira k zvezni funkciji.

Konvergenca, ki jo prikazujeta sliki 3.3 in 3.4, v resnici ni presenetljiva. V prvem poglavju smo namreč že videli, da za B-zlepke B_m velja

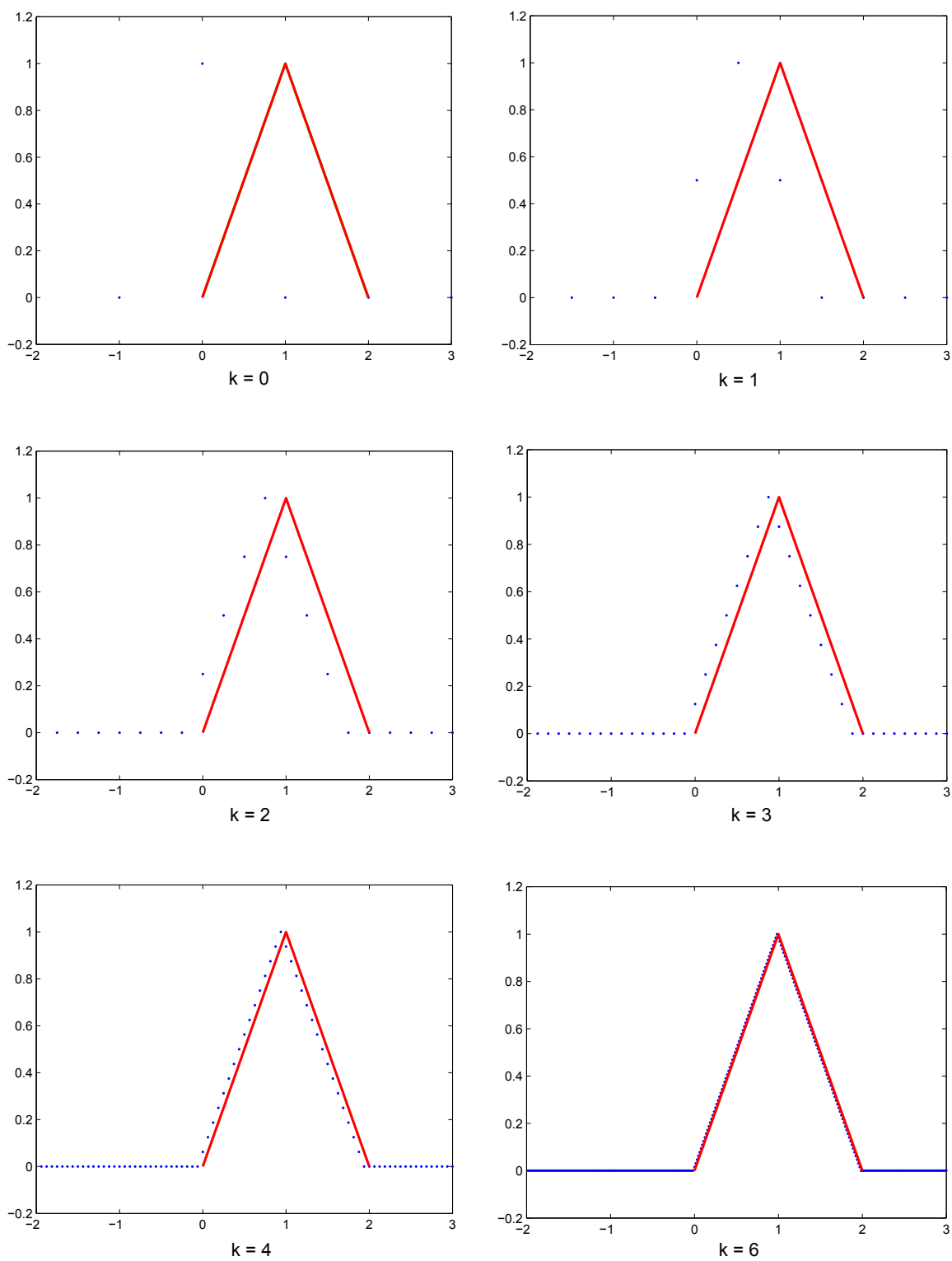
$$B_m(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{j,m} B_m(2x - j),$$

poleg tega zlepek B_m ustreza lastnostim (3.13) in (3.14). Subdivizijska shema z masko

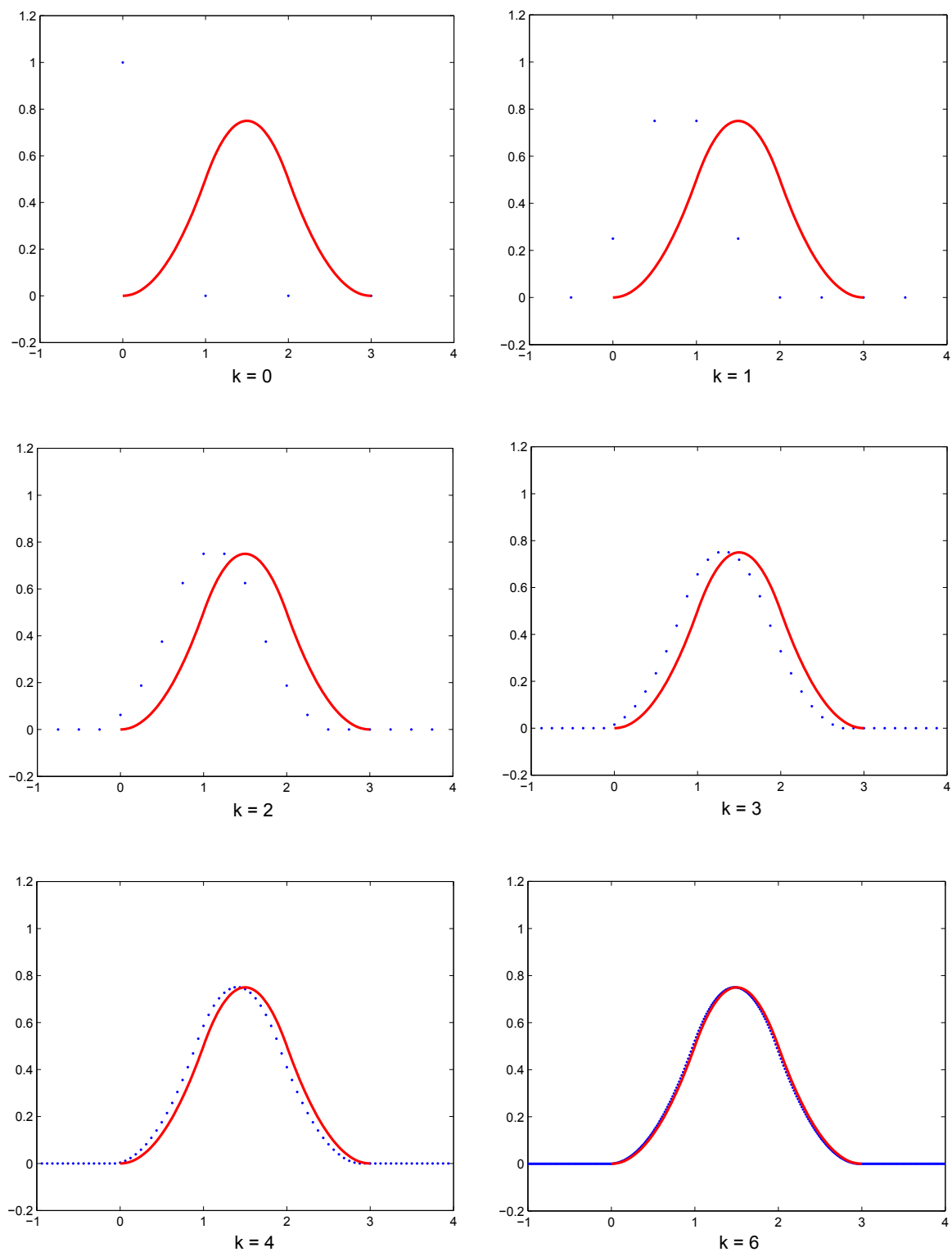
$$a_k = a_{k,m} = 2^{-m} \binom{m+1}{j}, \quad j = 0, 1, \dots, m+1,$$

je enakomerno konvergentna in njena osnovna limitna funkcija $\varphi = S^\infty \delta$ je natanko B_m zaradi enoličnosti osnovne limitne funkcije.

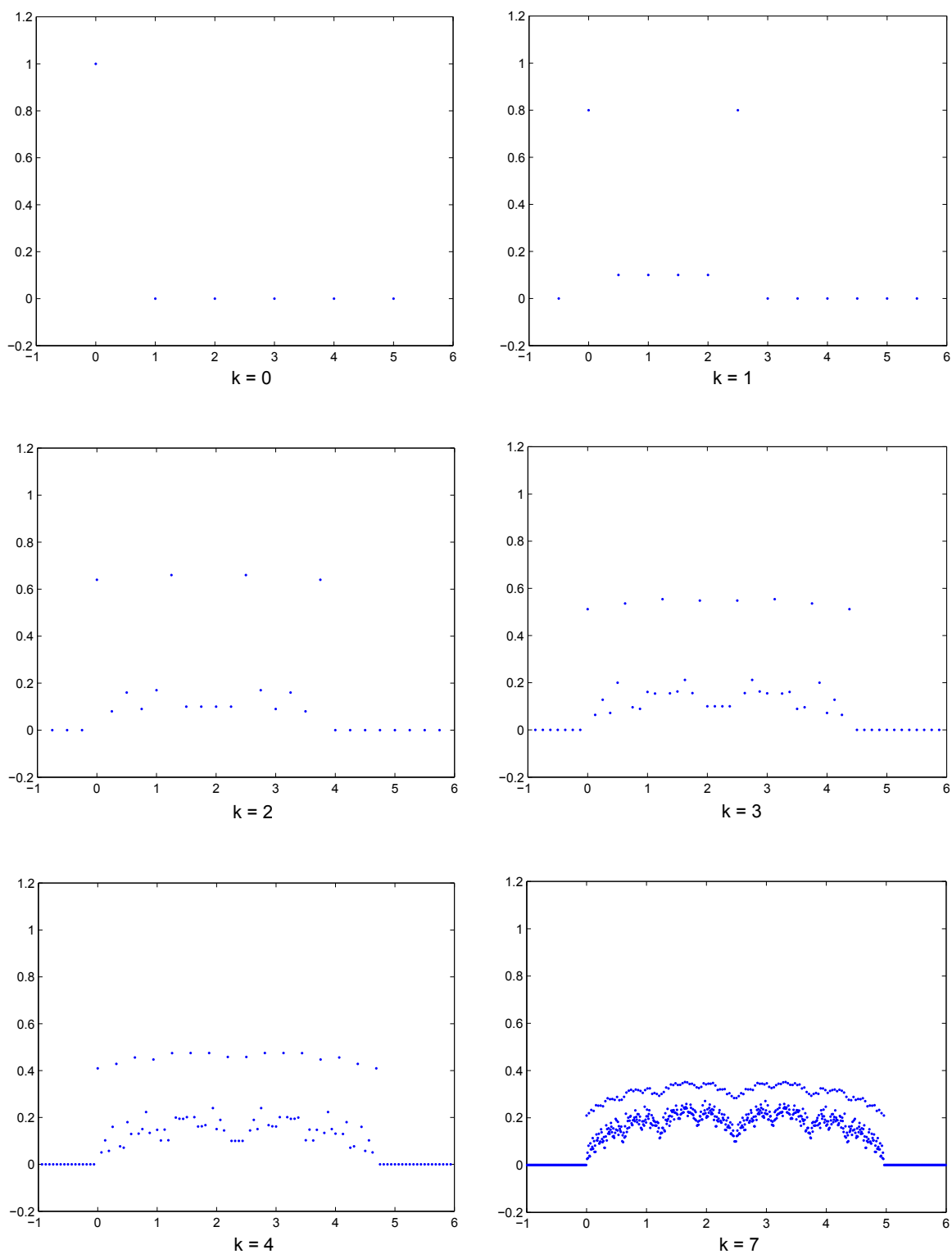
Osnovna limitna funkcija je pri obravnavi subdivizijskih shem pomembna predvsem zaradi lastnosti (3.14), saj to pomeni, da je zveznost in gladkost limitnih funkcij za poljubne začetne podatke enakovredna zveznosti oz. gladkosti osnovne limitne funkcije.



Slika 3.3: Konvergenca osnovne limitne funkcije za subdivizijsko shemo iz B-zlepka 1. stopnje. Kontrolne točke so modre, rdeča krivulja je zlepek B_1 .



Slika 3.4: Konvergenca osnovne limitne funkcije za subdivizijsko shemo iz B-zlepka 2. stopnje. Kontrolne točke so modre, rdeča krivulja je zlepek B_2 .



Slika 3.5: Divergenca osnovne limitne funkcije za subdivizijsko shemo z masko $[8 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 8]/10$.

Naslednje pomembno orodje pri obravnavi subdivizijskih shem so karakteristični polinomi. Tu se bomo omejili na primer, ko je $s = 1$ in s subdivizijo generiramo enodimenzionalne krivulje. Za subdivizijsko shemo S z masko $a = (a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}}$ definiramo karakteristični Laurentov polinom sheme S kot ([2])

$$a(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} a_\alpha z^\alpha.$$

V začetku tega poglavja smo videli, da sta potrebna pogoja za konvergenco sheme S

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} a_{2\alpha} = 1, \quad \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} a_{2\alpha+1} = 1,$$

kar za karakteristični polinom a pomeni

$$a(1) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} a_\alpha 1^\alpha = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} a_{2\alpha} + \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} a_{2\alpha+1} = 1 + 1 = 2$$

in po drugi strani

$$a(-1) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} a_\alpha (-1)^\alpha = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} a_{2\alpha} - \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} a_{2\alpha+1} = 1 - 1 = 0$$

Od obeh je druga lastnost bolj zanimiva, ker pomeni, da je polinom a deljiv s faktorjem $z + 1$.

S to lastnostjo je povezan obstoj subdivizijski shemi S prirejene sheme S_1 z lastnostjo

$$df^k = S_1 df^{k-1} \tag{3.15}$$

kjer je $f^k = S^k f^0$ in $(df^k)_\alpha = 2^k (f_{\alpha+1}^k - f_\alpha^k)$.

Pokažimo, da taka shema S_1 res vselej obstaja.

Ker je a Laurentov polinom, deljiv s faktorjem $z + 1$, je Laurentov polinom tudi $a^{(1)}$, ki ga definiramo kot

$$a^{(1)}(z) = \frac{2z \cdot a(z)}{z + 1}$$

Maska, ki jo definira polinom $a^{(1)}$, določa ravno shemo S_1 , kot bomo pokazali.

Označimo z F_k rodovno funkcijo kontrolnih točk k -tega nivoja. Velja

$$f_\alpha^{k+1} = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}} a_{\alpha-2\beta} f_\beta^k,$$

kar zapišemo z rodovnimi funkcijami takole

$$\begin{aligned} F_{k+1}(z) &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} f_\alpha^{k+1} z^\alpha = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{\beta \in \mathbb{Z}} a_{\alpha-2\beta} f_\beta^k \right) z^\alpha \\ &= \sum_{\beta \in \mathbb{Z}} f_\beta^k \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} a_{\alpha-2\beta} z^\alpha = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}} f_\beta^k \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}} a_\gamma z^{\gamma+2\beta} \\ &= \sum_{\beta \in \mathbb{Z}} f_\beta^k z^{2\beta} \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}} a_\gamma z^\gamma = a(z) \cdot F_k(z^2) \end{aligned}$$

Torej je

$$F_{k+1}(z) = a(z) F_k(z^2). \quad (3.16)$$

Oglejmo si zdaj rodovno funkcijo zgoraj definiranih diferenc

$$\begin{aligned} H_k(z) &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} (df^k)_\alpha z^\alpha = 2^k \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} (f_{\alpha+1}^k - f_\alpha^k) z^\alpha \\ &= 2^k \sum_{\beta \in \mathbb{Z}} f_\beta^k z^{\beta-1} - 2^k \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} f_\alpha^k z^\alpha = 2^k \left(\frac{1}{z} F_k(z) - F_k(z) \right) \\ &= 2^k \frac{1-z}{z} F_k(z) \end{aligned}$$

Opazimo, da velja $H_{k+1}(z) = a^{(1)}(z) \cdot H_k(z)$, saj je

$$\begin{aligned} H_{k+1}(z) &= 2^{k+1} \frac{1-z}{z} F_{k+1}(z) = 2^{k+1} \frac{1-z}{z} a(z) F_k(z^2) \\ &= 2a(z) \cdot 2^k \frac{1-z^2}{z^2} \cdot \frac{z}{1+z} F_k(z^2) \\ &= \frac{2z \cdot a(z)}{1+z} H_k(z^2) = a^{(1)}(z) \cdot H_k(z^2). \end{aligned}$$

To pa ustreza zvezi (3.16), kar pomeni, da Laurentov polinom

$$a^{(1)}(z) = \frac{2z}{z+1} a(z)$$

res določa masko sheme S_1 , ki izpolnjuje pogoj (3.15).

Enačbo (3.15) lahko zapišemo krajše z uvedbo operatorja $(\Delta f)_\alpha = f_{\alpha+1} - f_\alpha$. Tedaj dobimo

$$\Delta S = \frac{1}{2} S_1 \Delta,$$

saj velja

$$\begin{aligned} (\Delta S f^k)_\alpha &= (\Delta f^{k+1})_\alpha = f_{\alpha+1}^{k+1} - f_\alpha^{k+1} = 2^{-k-1} (df^{k+1})_\alpha \\ &= 2^{-k-1} (S_1 df^k)_\alpha = \left(\frac{1}{2} S_1 \Delta f^k\right)_\alpha \quad \text{za } \forall \alpha \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Shema S_1 je izjemnega pomena zaradi naslednjega izreka, ki poda potreben in zadosten pogoj za konvergenco subdivizijske sheme S .

Izrek 3.1. *Subdivizijska shema S je enakomerno konvergentna natanko takrat, ko iz nje izpeljana subdivizijska shema $\frac{1}{2} S_1$ enakomerno konvergira k ničelni funkciji za poljubne začetne podatke f^0 .*

Izrek bomo dokazali samo v eno smer (\Rightarrow).

Recimo torej, da je S enakomerno konvergentna. Po definiciji (3.2) torej za vsak $\varepsilon > 0$ in vsako odprto omejeno $\Omega \subset \mathbb{R}$ obstaja $K(\varepsilon, \Omega)$, da velja:

$$|(S^k f^0)_\alpha - f(2^{-k}\alpha)| < \varepsilon, \quad \text{za } \forall k > K(\varepsilon, \Omega), \forall \alpha \in \mathbb{Z}^s \cap 2^k \Omega.$$

Vzemimo torej poljubno $I \subset \mathbb{R}$. Naj bo $f^k = S^k f_0$ in $\alpha_0 \in 2^k I \cap \mathbb{Z}$. Velja

$$\begin{aligned} |(\Delta f^k)_{\alpha_0}| &= |f_{\alpha_0+1}^k - f_{\alpha_0}^k| \\ &\leq |f_{\alpha_0+1}^k - (S^\infty f^0)(2^{-k}(\alpha_0 + 1))| \\ &\quad + |(S^\infty f^0)(2^{-k}(\alpha_0 + 1)) - (S^\infty f^0)(2^{-k}\alpha_0)| \\ &\quad + |(S^\infty f^0)(2^{-k}\alpha_0) - f_{\alpha_0}^k| \\ &< 3\varepsilon, \end{aligned}$$

saj so zaradi enakomerne konvergence S in zveznosti $S^\infty f^0$ za dovolj velik k vsi trije členi manjši od ε . Tako smo pokazali, da je

$$|(\Delta f^k)_{\alpha_0}| = |(\Delta S f^{k-1})_{\alpha_0}| = |(\frac{1}{2}S_1 \Delta f^{k-1})_{\alpha_0}| < 3\varepsilon,$$

zato shema $\frac{1}{2}S_1$ enakomerno konvergira k ničelni funkciji.

Dokaz obratne smeri je bolj zapleten in ga ne bomo navajali. Nahaja se npr. v [3]. Oglejmo si raje kak primer sheme $\frac{1}{2}S_1$ za kako že znano subdivizijsko shemo.

Vzemimo najpreprostejši B-zlepek, tj. funkcijo B_1 , ki smo jo definirali v drugem poglavju. Shema, ki jo porodi zlepek B_1 , ima masko $a_0 = a_2 = \frac{1}{2}$, $a_1 = 1$. Njen karakteristični Laurentov polinom je torej

$$a(z) = \frac{1}{2} + z + \frac{1}{2}z^2 = \frac{1}{2}(1+z)^2.$$

Shema $\frac{1}{2}S_1$ ima torej karakteristični polinom

$$\frac{1}{2}a^{(1)}(z) = \frac{2z(1+z)^2}{4(1+z)} = \frac{1}{2}z(z+1) = \frac{1}{2}(z+z^2),$$

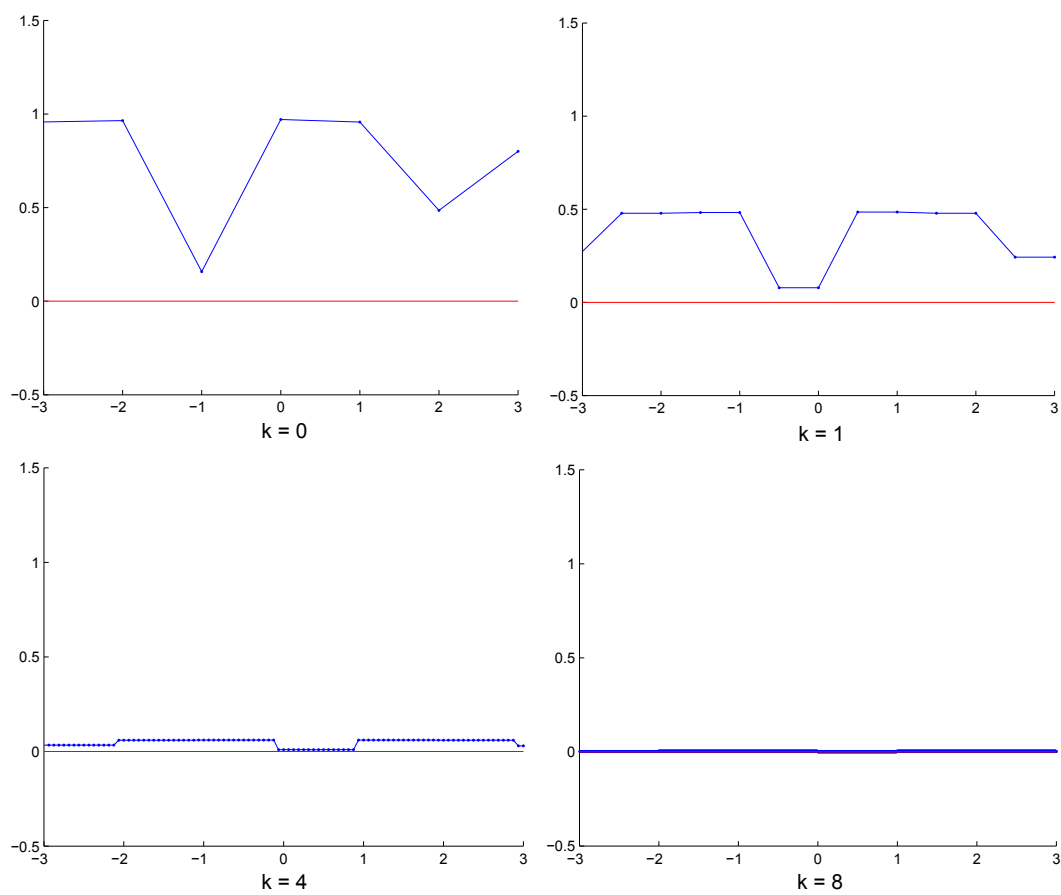
kar pomeni, da je ustrezna maska $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$. Tako sode kot lihe točke bodo tako polovične vrednosti točk prejšnjega nivoja, kar očitno pomeni, da bo shema $\frac{1}{2}S_1$ konvergirala proti ničelni funkciji. Grafični prikaz na naključnem zaporedju f^0 je viden na sliki 3.6.

Na enak način si oglejmo še shemo z masko

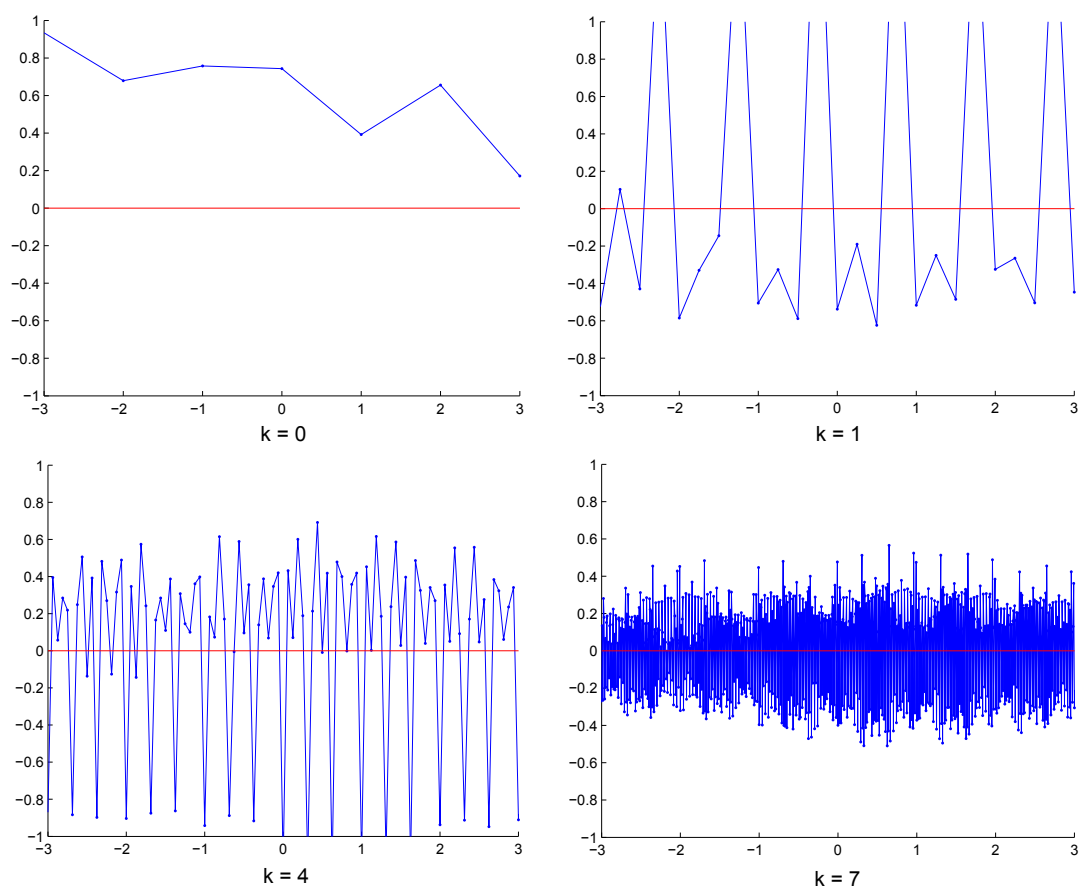
$$a_0 = a_5 = \frac{4}{5} \quad \text{in} \quad a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \frac{1}{10}.$$

Laurentov polinom za to shemo je

$$a(z) = \frac{1}{10}(8 + z + z^2 + z^3 + z^4 + 8z^5) = \frac{1}{10}(1+z)(8 - 7z + 8z^2 - 7z^3 + 8z^4).$$



Slika 3.6: Konvergenca $\frac{1}{2}S_1$ k ničelni funkciji za shemo z masko $[\frac{1}{2} \ 1 \ \frac{1}{2}]$



Slika 3.7: Nekaj korakov $\frac{1}{2}S_1$ za shemo z masko $[8\ 1\ 1\ 1\ 1\ 8]/10$

Ustrezna rodovna funkcija za shemo $\frac{1}{2}S_1$ je torej

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}a^{(1)}(z) &= \frac{2z(1+z)(8-7z+8z^2-7z^3+8z^4)}{20(1+z)} \\ &= \frac{1}{10}(8z-7z^2+8z^3-7z^4+8z^5),\end{aligned}$$

kar pomeni, da je maska za $\frac{1}{2}S_1$ enaka $a_1 = a_3 = a_5 = \frac{4}{5}$ in $a_2 = a_4 = -\frac{7}{10}$. Na sliki 3.7 je vidno, da ta shema ne konvergira enakomerno k ničelni funkciji in zato originalna shema ni enakomerno konvergentna (za začetne podatke f^0 smo zopet vzeli naključna števila med 0 in 1).

S karakterističnimi Laurentovimi polinomi si lahko pomagamo tudi pri določanju gladkosti limitnih krivulj subdivizijskih shem. Velja namreč naslednje:

Izrek 3.2. *Naj bo S subdivizijska shema s karakterističnim Laurentovim polinomom*

$$a(z) = \left(\frac{1+z}{2z}\right)^\nu q(z). \quad (3.17)$$

Če shema S_ν , ki ustreza Laurentovemu polinomu q , enakomerno konvergira, potem je

$$S^\infty \delta = \varphi \in \mathcal{C}^\nu(\mathbb{R})$$

in za vsako zaporedje kontrolnih točk f^0 velja

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu} S^\infty f^0 = S_\nu^\infty \Delta^\nu f^0.$$

Dokaza tu ne bomo navedli (najti ga je moč v [3]). Oglejmo si posledice tega izreka na primeru.

Za shemo iz kardinalnega B-zlepka stopnje 2 vemo, da konvergira k zvezni in odvedljivi krivulji (za začetne podatke δ celo kar k B-zlepku samemu). Laurentov polinom za to shemo je

$$a(z) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}z + \frac{3}{4}z^2 + \frac{1}{4}z^3.$$

Preverimo s pomočjo zgornjega izreka, da je res $S^\infty \delta = \varphi \in \mathcal{C}^1$.

Ustrezni Laurentov polinom $q(z)$ je za $\nu = 1$

$$q(z) = \frac{2z}{1+z} a(z) = \frac{1}{2}(z + 2z^2 + z^3).$$

Maska, ki ustreza shemi S_1 , je torej $a_1 = a_3 = \frac{1}{2}$ in $a_2 = 1$. Opazimo, da je S_1 v resnici kar shema, ki ustreza kardinalnemu B-zlepku stopnje 1, le da ima zamaknjene indekse. Njena osnovna limitna funkcija je tako premaknjen zlepek B_1 , kar pomeni, da je S_1 enakomerno konvergentna in zato $\varphi \in \mathcal{C}^1$.

Poglavje 4

Interpolacijske sheme

Kot smo povedali že v prvem poglavju, se subdivizijske sheme ločijo na interpolacijske in aproksimacijske. Za prve velja, da točke, generirane na poljubnem nivoju subdivizije, ležijo tudi na limitni krivulji, medtem ko za druge to v splošnem ni res.

V drugem poglavju smo videli, da je med shemami, ki jih porodijo kardinalni B-zlepki, interpolacijska samo tista, ki smo jo izpeljali iz zlepka B_1 . Ta ni posebej zanimiva, saj generira kar originalni kontrolni poligon in je tako limitna krivulja v splošnem zvezna, ne pa tudi odvedljiva. V tem poglavju si bomo ogledali dve interpolacijski shemi, ki poleg zveznosti zagotavljata tudi odvedljivost limitne krivulje. To sta štiritočkovna in šesttočkovna interpolacijska shema.

Ker interpolacijske sheme ohranjajo obstoječe točke, za njihovo masko velja $a_{2\alpha} = \delta_{\alpha,\beta}$, $\alpha \in \mathbb{Z}$ za nek $\beta \in \mathbb{Z}$. Brez izgube splošnosti lahko predpostavimo, da je $\beta = 0$, zato velja

$$a_{2\alpha} = \delta_{\alpha,0}, \alpha \in \mathbb{Z}.$$

Sode točke $(k+1)$ -tega nivoja so tako že določene. Pri računanju lihih točk pa se bomo držali ideje, da si pomagamo z interpolacijskim polinomom okoliških točk in za liho točko $(k+1)$ -tega nivoja vzamemo kar njegovo vrednost v ustrezni mrežni točki.

4.1 Štiritočkovna shema

Kot pove že ime sheme, bomo pri štiritočkovni shemi s polinomom interpolirali 4 točke. Pri izračunu točke f_{2i+1}^{k+1} bomo uporabili točke f_i^k , $f_{i\pm 1}^k$ in f_{i+2}^k . Za $k = 1$ tako za izračun točke pri $\frac{2i+1}{2}$, torej v razpolovišču intervala $[i, i+1]$, potrebujemo točke f_{i-1}^0 , f_i^0 , f_{i+1}^0 , in f_{i+2}^0 .

Interpolacijskega polinoma p_i skozi točke $(i-1, f_{i-1}^0)$, (i, f_i^0) , $(i+1, f_{i+1}^0)$ in $(i+2, f_{i+2}^0)$ ni težko izračunati in je enak

$$\begin{aligned} p_i(x) &= \\ &= \frac{(x-i)(x-i-1)(x-i-2)}{-6} f_{i-1}^0 + \frac{(x-i+1)(x-i-1)(x-i-2)}{2} f_i^0 \\ &+ \frac{(x-i+1)(x-i)(x-i-2)}{-2} f_{i+1}^0 + \frac{(x-i+1)(x-i)(x-i-1)}{6} f_{i+2}^0. \end{aligned}$$

Točko f_{2i+1}^1 definiramo kot vrednost $p_i(\frac{2i+1}{2})$:

$$f_{2i+1}^1 = p_i\left(\frac{2i+1}{2}\right) = -\frac{1}{16} f_{i-1}^0 + \frac{9}{16} f_i^0 + \frac{9}{16} f_{i+1}^0 - \frac{1}{16} f_{i+2}^0.$$

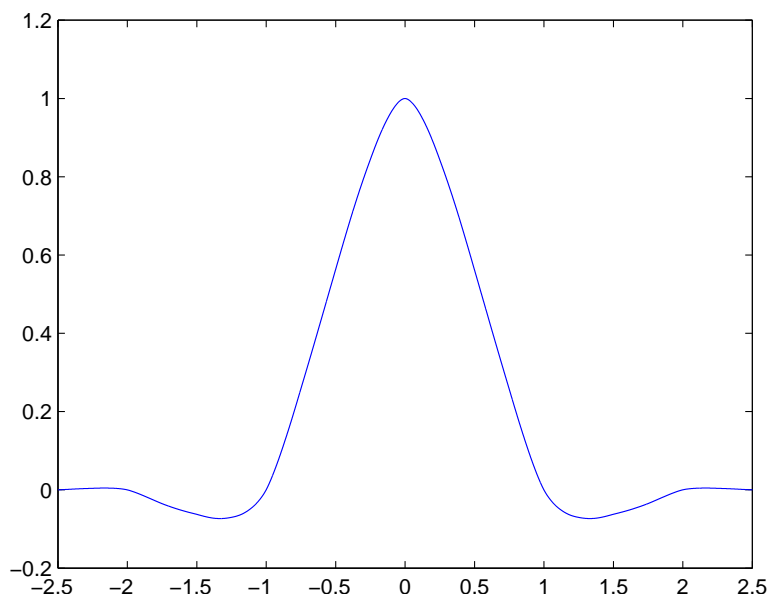
Dobimo torej subdivizijsko shemo s praviloma

$$\begin{aligned} f_{2i}^{k+1} &= f_i^k, \\ f_{2i+1}^{k+1} &= -\frac{1}{16} f_{i-1}^k + \frac{9}{16} f_i^k + \frac{9}{16} f_{i+1}^k - \frac{1}{16} f_{i+2}^k. \end{aligned}$$

Osnovna limitna funkcija za to shemo je vidna na sliki 4.1, slika 4.4 pa prikazuje primer krivulje, ki jo generira.

Konvergenca sheme in zveznost osnovne limitne funkcije nista vprašljivi in ju ne bomo posebej preverjali. Glede gladkosti pa se izkaže, da štiritočkovna shema generira \mathcal{C}^1 , ne pa tudi \mathcal{C}^2 limitne krivulje. Da bi to preverili, si moramo ogledati obnašanje ustreznih shem S_1 in S_2 . Iz Laurentovega polinoma za štiritočkovno shemo in formule (3.17) dobimo

$$a^{(1)}(z) = \frac{1}{8} z^2 (-1 + z + 8z^2 + 8z^3 + z^4 - z^5).$$



Slika 4.1: Osnovna limitna funkcija štiritočkovne interpolacijske sheme.

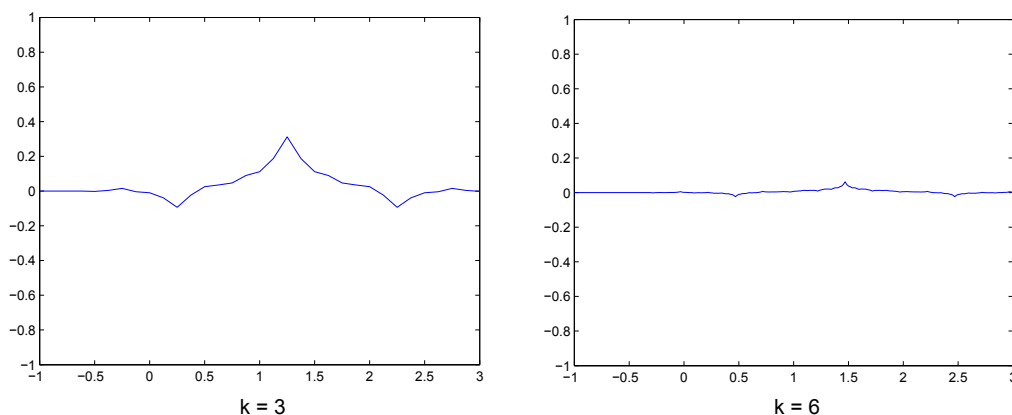
Da shema S_1 konvergira, bomo preverili s konvergenco sheme $\frac{1}{2}S_2$ proti ničelni funkciji. Zopet z uporabo formule (3.17) izračunamo

$$a^{(2)}(z) = \frac{1}{4}z(-1 + 2z + 6z^2 + 2z^3 - z^4).$$

Na sliki 4.2 je vidna “numerična” enakomerna konvergenca osnovne limitne funkcije sheme $\frac{1}{2}S_2$ proti 0, kar je potrditev, da S_1 konvergira in torej štiritočkovna shema generira vsaj \mathcal{C}^1 limitne krivulje.

Za shemo S_2 pa se izkaže, da ni konvergentna. Slika 4.3 prikazuje stanje po 5 in po 10 korakih subdivizije na zaporedju $f^0 = \delta$, kjer je vidno, da shema divergira. To za štiritočkovno shemo pomeni, da generira \mathcal{C}^1 , ne pa tudi \mathcal{C}^2 limitne krivulje, kar smo želeli preveriti na tem primeru.

Da osnovna limitna funkcija za štiritočkovno shemo ni v \mathcal{C}^2 , lahko še bolj neposredno vidimo tudi numerično. Deljena diferenca $f[x_k, \dots, x_{k+j}]$ zaporedja



Slika 4.2: Konvergenca osnovne limitne funkcije sheme $\frac{1}{2}S_2$, ki ustreza štiritočkovni shemi, k ničelni funkciji.

$(x_0, f(x_0)), \dots, (x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ je definirana rekurzivno takole [4]:

$$\begin{aligned} f[x_k] &= f(x_k), \\ f[x_k, \dots, x_{k+j}] &= \frac{f[x_{k+1}, \dots, x_{k+j}] - f[x_k, \dots, x_{k+j-1}]}{x_{k+j} - x_k}. \end{aligned}$$

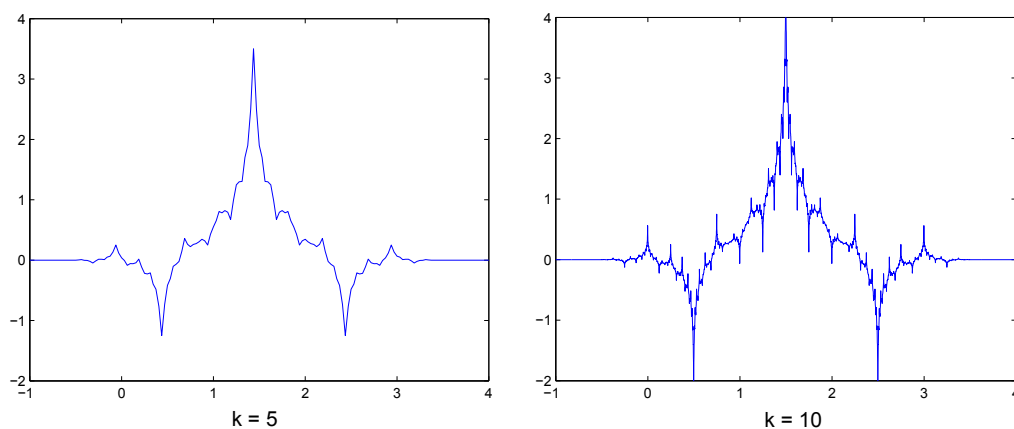
Za deljene difference velja tudi za nas pomembna lastnost

$$\lim_{(x_0, \dots, x_n) \rightarrow (\xi, \dots, \xi)} f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

Zaradi zgoščanja mrežnih točk na vsakem koraku subdivizije avtomatsko velja $(x_0, \dots, x_n) \rightarrow (\xi, \dots, \xi)$, kar pomeni, da lahko z deljenimi differencami $n + 1$ zaporednih točk ocenjujemo vrednost n -tega odvoda v dani točki.

Vzemimo npr. deljeno diferenco $d_k = \varphi_k[-2^{-k}, 0, 2^{-k}]$, kjer je $\varphi_k(x) = f_{2^k x}^k$. Tedaj bo za dvakrat zvezno odvedljivo funkcijo φ moralo veljati

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k[-2^{-k}, 0, 2^{-k}] = \frac{\varphi^{(2)}(0)}{2!},$$



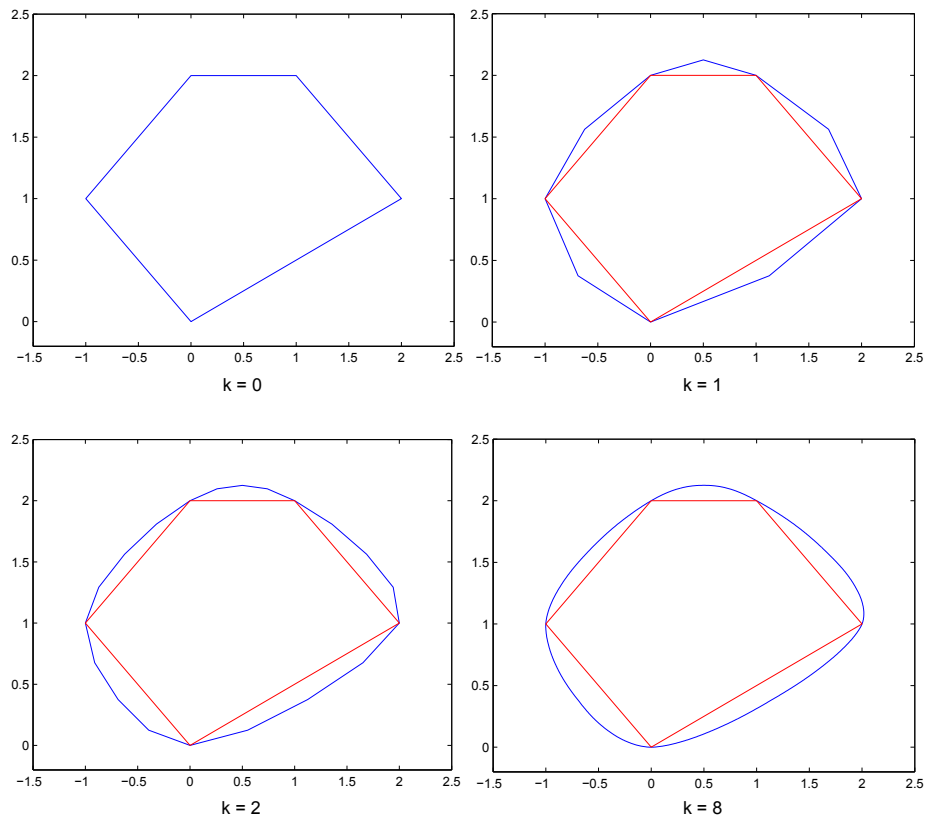
Slika 4.3: Stanje po 5 in 10 korakih subdivizije z začetnim zaporedjem δ s shemo S_2 , ki ustreza štiritočkovni shemi.

kjer je φ limitna funkcija subdivizijske sheme pri danem začetnem zaporedju f^0 . Za $f^0 = \delta$ dobimo za prvih 12 iteracij štiritočkovne subdivizijske sheme naslednje vrednosti:

k	1	2	3	4	5	6
d_k	-2.7344	-3.1641	-3.6689	-4.2539	-4.8996	-5.5863

k	7	8	9	10	11	12
d_k	-6.2989	-7.0274	-7.7651	-8.5083	-9.2545	-10.0024

Očitno je, da vrednosti d_k ne konvergirajo in torej osnovna limitna funkcija štiritočkovne sheme vsaj v točki 0 nima drugega odvoda.



Slika 4.4: Krivulja, ki jo generira štiritočkovna interpolacijska shema na točkah $(0,0)$, $(-1,1)$, $(0,2)$, $(1,2)$ in $(2,1)$ (zaprt kontrolni poligon)

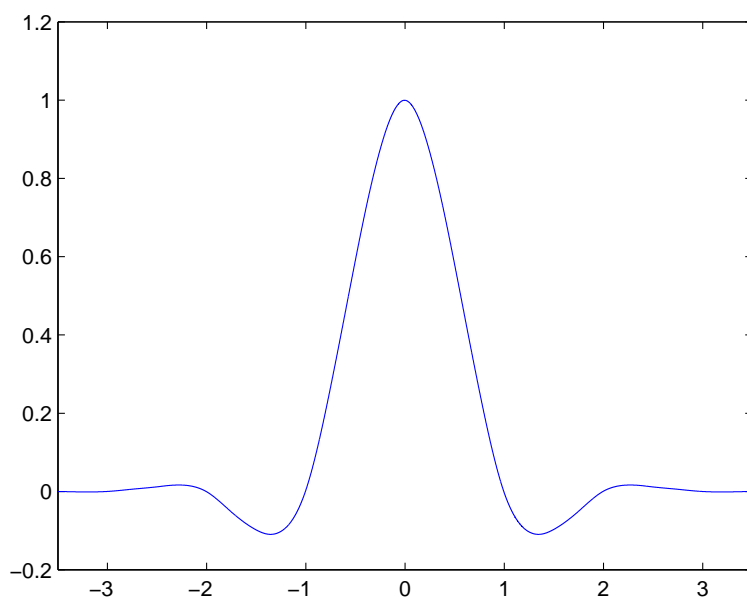
4.2 Šesttočkovna shema

Povsem podobno, kot smo pri štiritočkovni shemi s polinomom interpolirali 4 točke, interpoliramo lahko tudi 6 točk v pričakovanju, da bomo s tem dosegli še večjo stopnjo gladkosti limitne krivulje.

Za izračun točke f_{2i+1}^{k+1} bomo tako potrebovali polinom pete stopnje, ki interpolira točke $f_{i-2}^k, f_{i-1}^k, f_i^k, f_{i+1}^k, f_{i+2}^k$ in f_{i+3}^k , oziroma njegovo vrednost v točki $\frac{2i+1}{2}$. Po analognem računu kot za štiritočkovno shemo dobimo:

$$\begin{aligned} f_{2i+1}^{k+1} &= \frac{3}{256} f_{i-2}^k - \frac{25}{256} f_{i-1}^k + \frac{150}{256} f_i^k + \frac{150}{256} f_{i+1}^k - \frac{25}{256} f_{i+2}^k + \frac{3}{256} f_{i+3}^k, \\ f_{2i}^{k+1} &= f_i^k. \end{aligned}$$

Na sliki 4.5 je izrisana osnovna limitna funkcija za šesttočkovno interpolacijsko shemo, primer krivulje, ki jo generira, pa je na sliki 4.8.



Slika 4.5: Osnovna limitna funkcija šesttočkovne interpolacijske sheme.

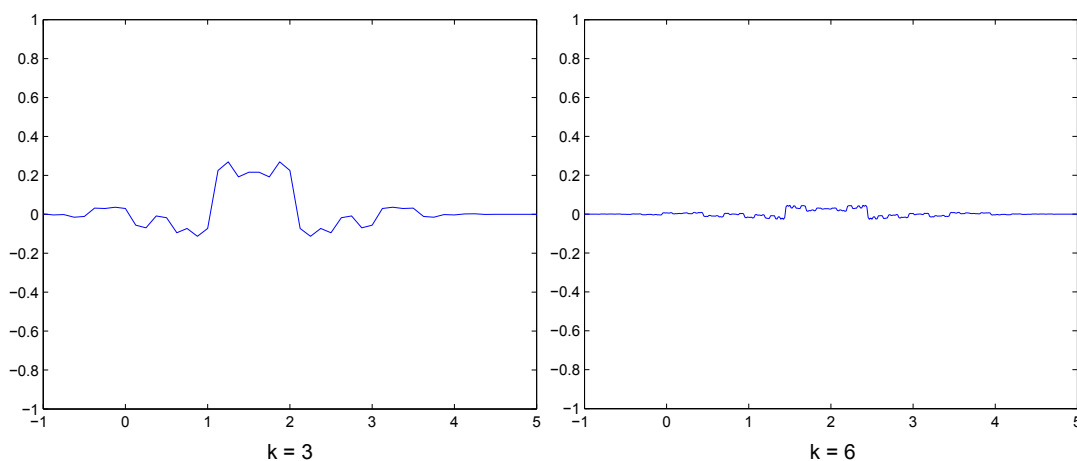
Ponovno se pri zveznosti osnovne limitne funkcije ne bomo posebej zadržali, saj je vidno iz slike 4.5, da ta ni sporna. Izkaže pa se, da smo s povečanjem stopnje interpolacijskega polinoma pridobili en razred gladkosti. Limitne krivulje, ki jih generira šesttočkovna shema, so namreč v \mathcal{C}^2 , ne pa tudi v \mathcal{C}^3 , kar je več, kot smo dosegli pri širitočkovni interpolaciji.

Zopet namesto dokaza preverimo raje to dejstvo samo na primeru. Zanimali nas bosta ustrezni shemi S_2 in S_3 , vendar sheme S_2 ne bomo izračunali, saj si bomo konvergenco S_2 ogledali posredno s konvergenco $\frac{1}{2}S_3$ proti 0.

Iz Laurentovega polinoma za šesttočkovno interpolacijsko shemo in pravila (3.17) izračunamo Laurentov polinom za ustrezno shemo S_3 :

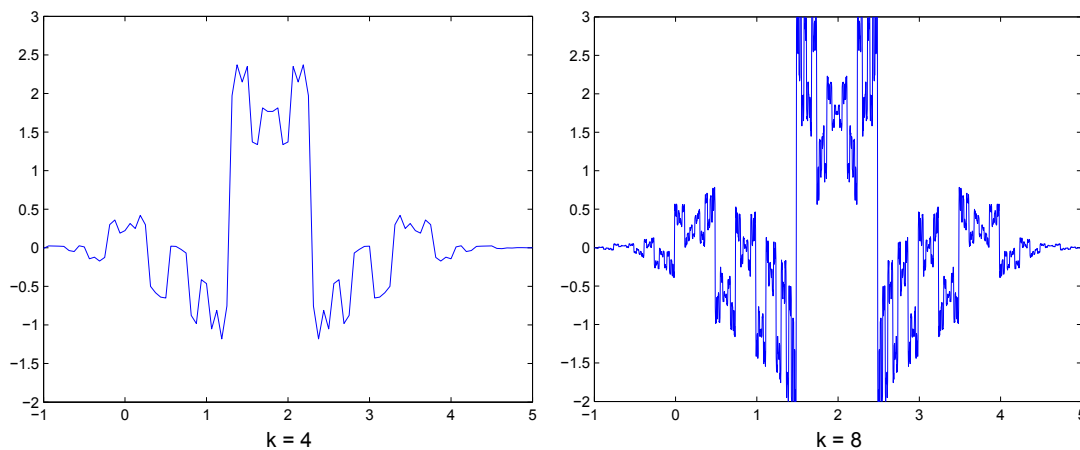
$$a^{(3)}(z) = \frac{1}{32} z^2 (3 - 9z - 7z^2 + 45z^3 + 45z^4 - 7z^5 - 9z^6 + 3z^7).$$

Enakomerna konvergenca osnovne limitne funkcije sheme $\frac{1}{2}S_3$ k ničelni funkciji je vidna na sliki 4.6. Posledica tega je, da je enakomerno konvergentna tudi shema S_2 , zato so limitne krivulje šesttočkovne sheme res v \mathcal{C}^2 .

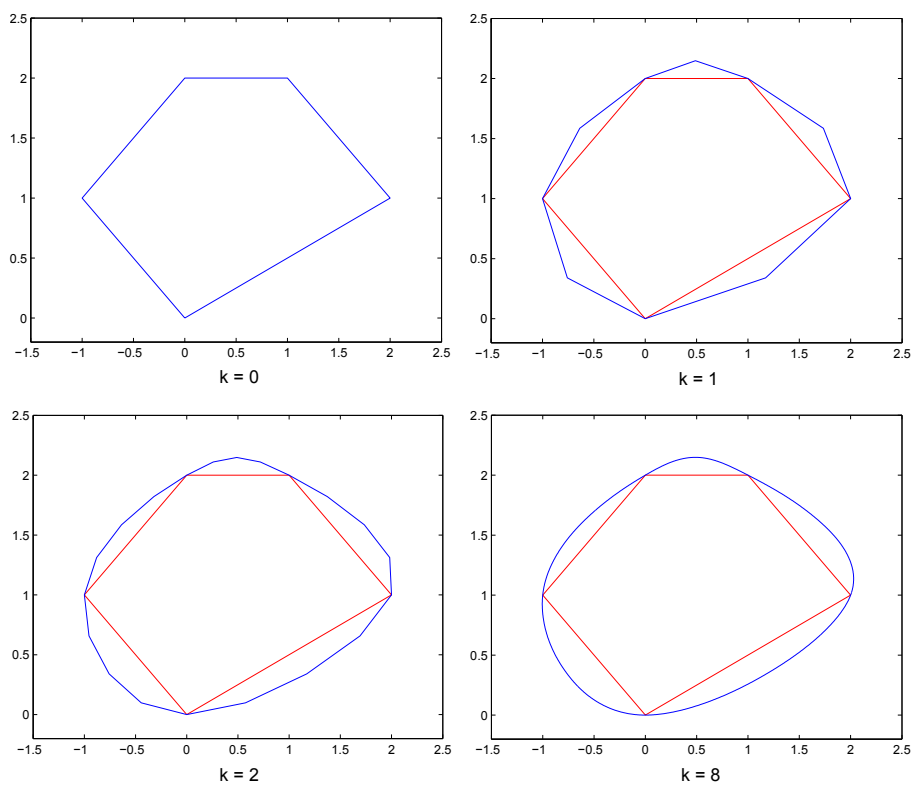


Slika 4.6: Konvergenca osnovne limitne funkcije sheme $\frac{1}{2}S_3$, ki ustreza šesttočkovni shemi, k ničelni funkciji.

Da limitne krivulje niso v \mathcal{C}^3 , pa vidimo tako, da si ogledamo osnovno limitno funkcijo sheme S_3 , oziroma njeno divergenco. Ta je prikazana na sliki 4.7, kjer je vidno stanje po 4 in 8 korakih subdivizije.



Slika 4.7: Stanje po 4 in 8 korakih subdivizije z začetnim zaporedjem δ s shemo S_3 , ki ustreza šesttočkovni shemi.



Slika 4.8: Krivulja, ki jo generira šesttočkovna interpolacijska shema na točkah $(0,0)$, $(-1,1)$, $(0,2)$, $(1,2)$ in $(2,1)$ (zaprt kontrolni poligon).

Poglavje 5

Tenzorski produkti subdivizijskih shem

V tem poglavju bomo nekaj pozornosti posvetili še shemam za generiranje ploskev. Omejili se bomo na posebne subdivizijske sheme, ki jih dobimo iz enodimenzionalnih shem s tenzorskim produktom. Topologija povezanosti točk bo torej kvadratna mreža, ki smo jo omenili že v uvodu.

Imejmo torej dve linearni subdivizijski shemi, ki generirata krivulje, z maskama $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}}$ in $(b_\beta)_{\beta \in \mathbb{Z}}$. Njun tenzorski produkt je subdivizijska shema, ki generira ploskve na kvadratni mreži in ima masko $(c_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{Z}^2}$, pri čemer velja

$$c_{i,j} = a_i \cdot b_j \quad \text{za } i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}. \quad (5.1)$$

Vzemimo za primer subdivizijsko shemo iz kardinalnega B-zlepka stopnje 1 in si oglejmo njegov tenzorski produkt s samim seboj, ki ga označimo z $S_{1,1}$. Po enačbi (5.1) sledi

$$c_{i,j} = \frac{1}{4} \binom{2}{i} \binom{2}{j}, \quad \text{za } i, j \in \{0, 1, 2\}.$$

Dobimo torej 9 neničelnih koeficientov in sledeča subdivizijska pravila:

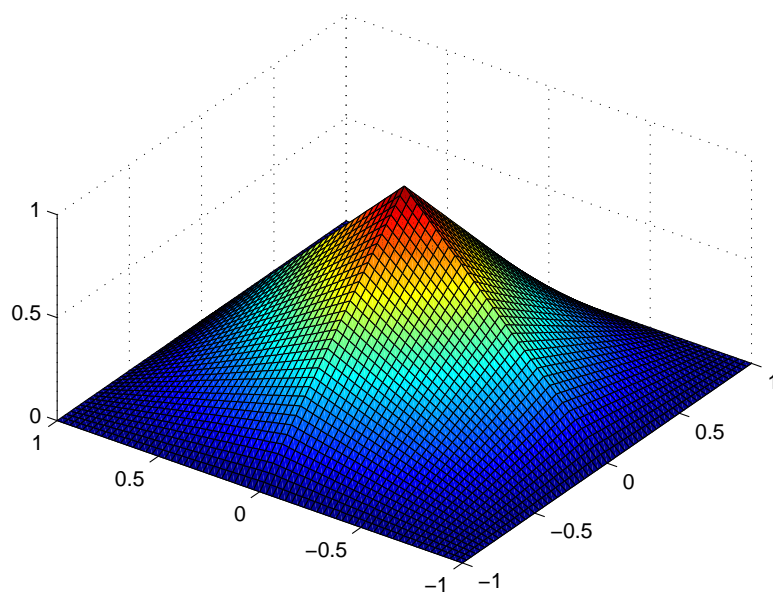
$$P_{2i,2j} = \frac{1}{4}(P_{i,j} + P_{i-1,j} + P_{i,j-1} + P_{i-1,j-1}),$$

$$P_{2i+1,2j} = \frac{1}{2}(P_{i,j} + P_{i,j-1}),$$

$$P_{2i,2j+1} = \frac{1}{2}(P_{i,j} + P_{i-1,j}),$$

$$P_{2i+1,2j+1} = P_{i,j}.$$

Osnovno limitno funkcijo dobimo kot limitno krivuljo na zaporedju $\delta \cdot \delta$, ki ima vrednost 1 v točki $(0,0)$, povsod drugje pa vrednost 0. Slika 5.1 prikazuje osnovno limitno funkcijo za shemo $S_{1,1}$.



Slika 5.1: Osnovna limitna funkcija za tenzorski produkt sheme iz zleпка B_1 s samo seboj.

Masko tenzorskega produkta lahko hitro izračunamo iz mask obeh 'sodelujočih'

shem. Naj bosta S_1 in S_2 enodimenzionalni subdivizijski shemi z maskama a in b . Če zapišemo (neničelne) koeficiente obeh mask v vodoravna vektorja \mathbf{a} in \mathbf{b} , velja, da je matrika C , definirana kot

$$C = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b},$$

ravno matrika neničelnih koeficientov maske tenzorskega produkta shem S_1 in S_2 . Paziti je potrebno kvečjemu še na indekse elementov, saj se v maski ti ne pričnejo nujno z $(1, 1)$.

Oglejmo si še dva primera tenzorskih produktov.

Enako kot za B-zlepek stopnje 1 lahko samo s seboj tenzorsko pomnožimo shemo iz B-zlepka stopnje 2. Ustrezna matrika je

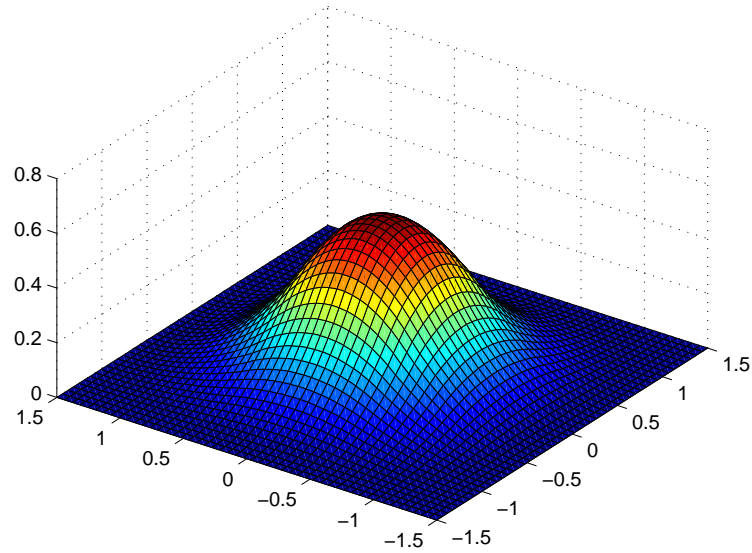
$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{16}(1, 3, 3, 1)^T \cdot (1, 3, 3, 1) = \\ &= \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 9 & 3 \\ 3 & 9 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Graf osnovne limitne funkcije za to shemo je na sliki 5.2.

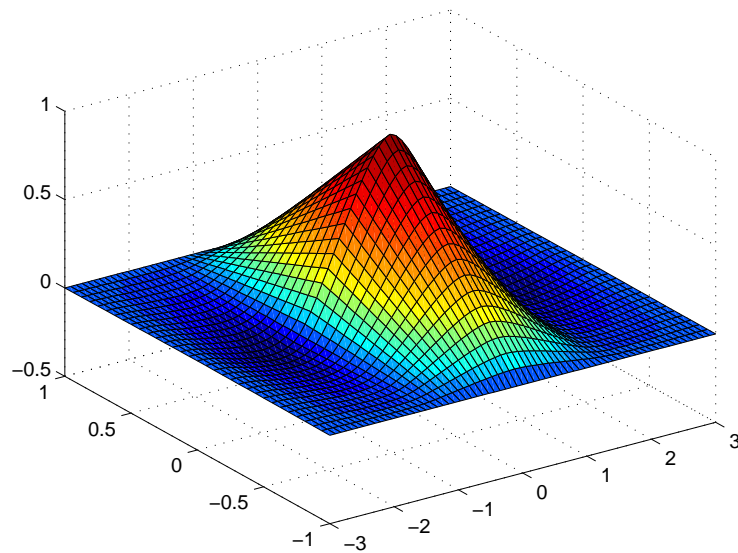
Oglejmo si še produkt sheme iz B-zlepka stopnje 1 s štiritočkovno interpolacijsko shemo. Za to shemo je maska

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{32}(1, 2, 1)^T \cdot (-1, 0, 9, 16, 9, 0, -1) = \\ &= \frac{1}{32} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 9 & 16 & 9 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 18 & 32 & 18 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 9 & 16 & 9 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

njena osnovna limitna funkcija pa je izrisana na sliki 5.3.



Slika 5.2: Osnovna limitna funkcija za tenzorski produkt sheme iz zleпка B_2 s samo seboj.



Slika 5.3: Osnovna limitna funkcija za tenzorski produkt sheme iz zleпка B_1 s štiritočkovno interpolacijsko shemo.

5.1 Primer: stiskanje slik

Možna uporaba subdivizije v dveh dimenzijah je tudi za stiskanje slik. Če si mislimo sliko kot matriko urejenih trojk I , tako da je

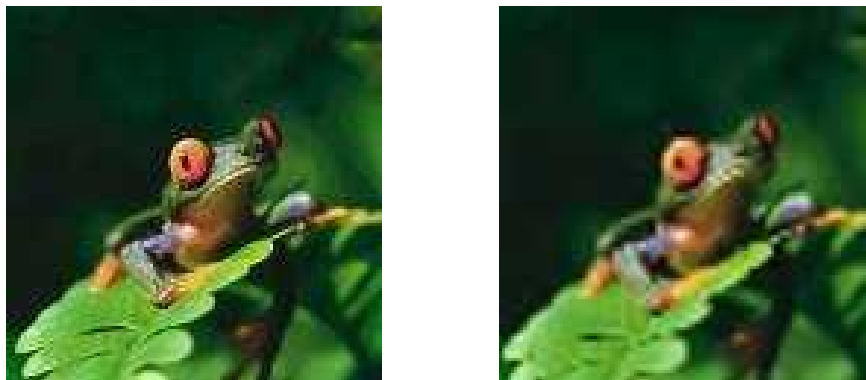
$$I_{ij} = (R_{ij}, G_{ij}, B_{ij}),$$

kjer so R_{ij} , G_{ij} in B_{ij} po vrsti vrednosti za rdečo, zeleno in modro komponento točke (i, j) , lahko namesto celotne slike shranimo le točke na regularni mreži, ki je podmnožica indeksne množice matrike I . Namesto matrike I imamo torej matriko J , kjer je

$$J_{i,j} = I_{ki,kj}, k \in \mathbb{N}.$$

Točke, ki jih matrika J ne vsebuje, pa določimo s subdivizijo na matriki J .

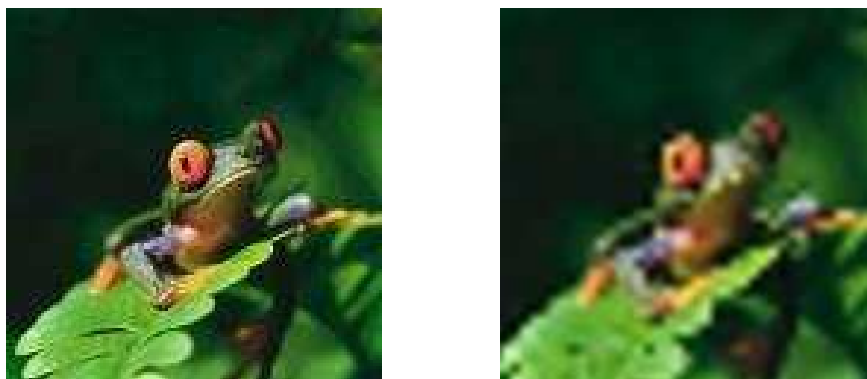
Ker želimo točke, ki pripadajo originalni sliki, ohraniti, pridejo v poštev le interpolacijske subdivizijske sheme. Slike 5.4, 5.5 in 5.6 prikazujejo po vrsti rekonstruirano sliko s polovico, tretjino in četrtno originalnih točk. Za subdivizijo smo uporabili širitočkovno interpolacijsko shemo (oziroma njen tenzorski produkt s samo seboj).



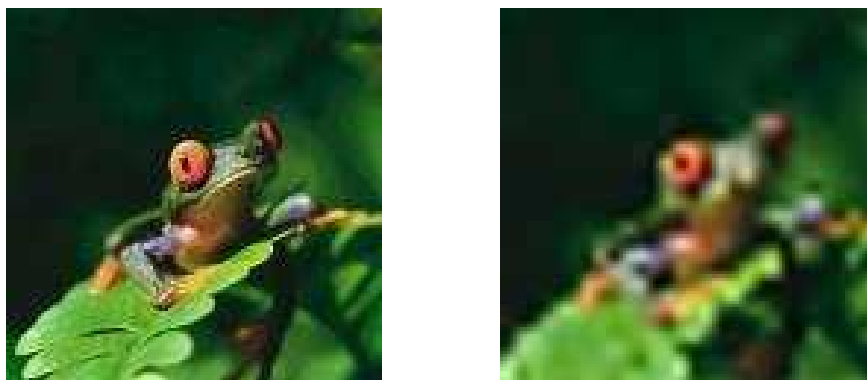
Slika 5.4: Originalna slika (levo) in slika, rekonstruirana z interpolacijsko subdivizijsko shemo na 50% točk prvotne slike (desno).

Stiskanje slik s subdivizijo na tak način je zelo neoptimalno, saj ne upošteva prav nobenih informacij o sami sliki, kot so oblike robov in ploskev. Za boljše

rezultate bi morali v metodo vključiti tudi uporabo tovrstnih informacij. Metoda, ki smo jo omenili, bi se obnesla dobro le pri slikah z zveznimi barvnimi prehodi, saj je to slikovna ustreznica gladkih ploskev, ki smo jih želeli generirati s subdivizijskimi shemami.



Slika 5.5: Originalna slika (levo) in slika, rekonstruirana z interpolacijsko subdivizijsko shemo na 33% točk prvotne slike (desno).



Slika 5.6: Originalna slika (levo) in slika, rekonstruirana z interpolacijsko subdivizijsko shemo na 25% točk prvotne slike (desno).

Literatura

- [1] N. Dyn “Analysis of Convergence and Smoothness by the formalism of Laurent Polynomials”, v *Tutorials on Multiresolution in Geometric modelling*, A. Iske, E. Quak, M.S. Floater (eds.), Springer-Verlag, Heidelberg 2002, str. 51-68
- [2] N. Dyn, “Subdivision Schemes in Computer-Aided Geometric Design”, v *Advances in Numerical Analysis II Wavelets, Subdivision Algorithms and Radial Basis Functions*, W.Light(ed.), Clarendon Press, Oxford 1992, str. 36-104.
- [3] M. Kranjc, *Subdivizijske sheme*, diplomsko delo, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko, 2002.
- [4] Divided Differences. Dostopno na:
http://en.wikipedia.org/wiki/Divided_differences