UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA RAČUNALNIŠTVO IN INFORMATIKO
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Jernej Azarija

Štetje vpetih dreves v grafih

DIPLOMSKO DELO
NA INTERDISCIPLINARNEM UNIVERZITETNEM ŠTUDIJU

Mentor: prof. dr. Riste Škrekovski

Ljubljana, 2012

Besedilo je oblikovano z urejevalnikom besedil LaTeX.

Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta *za računalništvo in informatiko*

Tržaška 25
1001 Ljubljana, Slovenija
telefon: 01 476 84 11
01 476 83 87
faks: 01 426 46 47
01 476 87 11
www.fri.uni-lj.si
e-mail: dekanat@fri.uni-lj.si

Št. naloge: 00039/2012
Datum: 27.08.2012

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za računalništvo in informatiko ter Fakulteta za matematiko in fiziko izdaja naslednjo nalogo:

Kandidat: **JERNEJ AZARIJA**

Naslov: **ŠTETJE VPETIH DREVES V GRAFIH**
COUNTING SPANNING TREES IN GRAPHS

Vrsta naloge: Diplomsko delo univerzitetnega študija

Tematika naloge:

Zgodovina štetja vpetih dreves sega v leto 1842, ko je nemški matematik Gustav Kirchhoff našel zvezo med številom vpetih dreves grafa G (t(G)) in determinanto posebne matrike povezane z G. Po tej ugotovitvi je sledilo mnogo rezultatov povezanih s t(G) za konkretne grafe G.
Funkcijo t danes zasledimo predvsem na področju fizike in na področju računalniških omrežij.
V uvodnem delu diplomske naloge predstavimo lastnosti funkcije t in nekatere probleme povezane s številom vpetih dreves v grafih. Izpeljemo tudi Kirchhoffov izrek in nekatere posledice, ki sledijo iz izreka. V zadnjih poglavjih pa nas bo predvsem zanimal odgovor na vprašanje, kako velik je lahko razred grafov reda n, če imajo grafi tega razreda različna števila vpetih dreves. Poleg tega se bomo ukvarjali tudi z ekstremalnim problemom, ki opredeljuje najmanjši graf G, ki ima predpisano vrednost funkcije t(G).

Mentor:

prof. dr. Riste Škrekovski

Dekan Fakultete za računalništvo in informatiko:

prof. dr. Nikolaj Zimic

Dekan Fakultete za matematiko in fiziko:

akad. prof. dr. Franc Forstnerič

UNIVERZA V LJUBLJANI • Fakulteta za matematiko in fiziko • 1

IZJAVA O AVTORSTVU

diplomskega dela

Spodaj podpisani Jernej Azarija,

z vpisno številko 63070004,

sem avtor diplomskega dela z naslovom:

Štetje vpetih dreves v grafih

S svojim podpisom zagotavljam, da:

- sem diplomsko delo izdelal samostojno pod mentorstvom
  izr. prof. dr. Risteja Škrekovskija
- so elektronska oblika diplomskega dela, naslov (slov., angl.), povzetek (slov., angl.) ter ključne besede (slov., angl.) identični s tiskano obliko diplomskega dela
- soglašam z javno objavo elektronske oblike diplomskega dela v zbirki "Dela FRI".

V Ljubljani, dne 1.9.2012 Podpis avtorja:

Zahvala

Zahvaljujem se družini, prijateljem in Tini za podporo, mentorju Risteju Škrekovskemu za prijateljski odnos in Nejcu Trdinu za skupne učne ure ter pomoč pri obvladovanju kompleksnosti življenja.

Kazalo

Seznam uporabljenih kratic in simbolov

- $\tau(G)$ - število vpetih dreves grafa G
- $\det(M)$ - determinanta matrike M
- $\operatorname{adj}(M)$ - adjugirana matrika matrike M
- $\operatorname{rang}(M)$ - število linearno neodvisnih vrstic matrike M
- $\alpha(n)$ - najmanjše število k za katerega obstaja graf reda k, ki ima n vpetih dreves

Povzetek

Zgodovina štetja vpetih dreves sega v leto 1842, ko je nemški matematik Gustav Kirchhoff [1] našel zvezo med številom vpetih dreves grafa G, $\tau(G)$ in determinanto posebne matrike povezane z G. Po tej ugotovitvi je sledilo mnogo rezultatov povezanih s $\tau(G)$ za konkretne grafe G. Leta 1889 je na primer angleški matematik A. Cayley pokazal [18], da ima poln graf na n vozliščih n^{n-2} vpetih dreves.

Funkcijo τ danes zasledimo na področju fizike [2, 3, 4, 5], kjer je število vpetih dreves grafa pomembna količina pri računanju *entropije* mrež povezanih s fizikalnimi pojavi. Prav tako je $\tau(G)$ moč zaslediti na področju računalniških omrežij, kjer se $\tau(G)$ uporablja kot merilo za zanesljivost omrežja [19, 20, 21]. Uporabo števila vpetih dreves pa najdemo tudi znotraj matematike kjer trenutno najboljši algoritem za realizacijo 3-povezanih ravninskih grafov kot 3D politop uporablja $\tau(G)$ pri računanju zgornje meje za skaliranje koordinat.

V uvodnem delu diplomske naloge predstavimo lastnosti funkcije τ in nekatere probleme povezane s številom vpetih dreves v grafih. V zadnjih poglavjih nas bo predvsem zanimal odgovor na vprašanje, kako velik je lahko razred grafov reda n, če imajo grafi tega razreda različna števila vpetih dreves. Poleg tega se bomo ukvarjali tudi z ekstremalnim problemom, ki opredeljuje najmanjši graf G, ki ima predpisano vrednost funkcije $\tau(G)$.

Ključne besede:

število vpetih dreves, teorija grafov, kombinatorično preštevanje

Abstract

The history of counting the number of spanning trees dates back into the year 1842 in which the German mathematician Gustav Kirchhoff [1] derived a relation between the number of spanning trees of a graph G ($\tau(G)$) and the determinant of a specific submatrix associated with G. After this result many other related results followed. For example in 1889 the British mathematician A. Cayley [18] showed that the complete graph on n nodes has n^{n-2} spanning trees.

The function τ can nowadays be found in the field of physics [2, 3, 4, 5] where the number of spanning trees is used as an invariant for computing the *entropy* of certain networks related to physical processes. One can also find $\tau(G)$ in the field of network analysis[19, 20, 21] where $\tau(G)$ is used in relation with various quantities indicating the reliability of a network represented by a graph G. In addition there are various applications of the number of spanning trees within mathematics as well. For example, the currently fastest algorithm for embedding a 3-connected planar graph as a 3D polytope uses $\tau(G)$ for computing the scaling factor of the coordinate system.

In this work we present the function τ and some results related to determining the number of spanning trees of a given graph. In later chapters we will be mainly interested in the question of how large can a class of graphs of order n be if they have mutually distinct number of spanning trees. In addition, we will introduce an extremal problem asking for the smallest graph G having a prescribed number of spanning trees.

Key words:

number of spanning trees, graph theory, combinatorial counting

Poglavje 1

Uvod

Teorija grafov je veja kombinatorike, ki se ukvarja s problemi, ki temeljijo na binarnih relacijah. Zgodovina teorije grafov sega v leto 1735, ko je švicarski matematik Leonhard Euler rešil problem sedmih Könisbergovih mostov z uporabo ustreznega grafa. Do naslednjega pomembnejšega rezultata je minlo skoraj stoletje, rezultat pa je atribuiran angleškemu matematiku A. Cayleyu, ki se je v tistih časih ukvarjal z štetjem označenih dreves na n vozliščih. Motivacija njegovega dela je bila diferencialna analiza. Popularnost teorije grafov se je zares razscvetela zadnjih 50 let, skladno z napredkom računalništva in teoretične kemije. Na področju kemije najdejo grafi aplikacijo pri modeliranju molekul. S pomočjo grafovskih invariant se namreč da marsikaj povedati o pripadajoči kemijski strukturi danih spojin. V računalništvu spadajo grafi med osnovne podatkovne strukture. Njihova uporabnost se kaže predvsem pri modeliranju problemov najkrajših poti, to je problemov, kjer za dane pare vozlišč želimo najti najkrajšo pot med njimi.

V danem delu se ukvarjamo s funkcijo $\tau(G)$, ki opredeljuje število vpetih dreves grafa G. V uvodnem poglavju navedemo osnovne pojme in terminologijo teorije grafov, ki bo potrebna za razumevanje preostalih poglavji. V naslednjem poglavju predstavimo osnovne prijeme za izračun funcije $\tau(G)$ za določene razrede grafov in predstavimo Kirchhoffov izrek. Poglavje zaključimo s posplošitvijo omenjenega izreka. V tretjem poglavju predstavimo problem, ki sprašuje po velikosti maksimalne družine grafov z n vozlišči, ki imajo paroma različno število vpetih dreves. S pomočjo teorije števil predstavimo izboljšavo do sedaj znanih rezultatov povezanih s tem problemom. V zadnjem poglavju se ukvarjamo z ekstremalnim problemom povezanim z številom vpetih dreves. Vprašanje na katerega bomo iskali odgovor, sprašuje po tem, kako 'majhen' je lahko nek graf, ki ima predpisano število vpetih dreves. Kot bomo videli, bo naš odgovor na slednje vprašanje povezan z nekaterimi števili, ki jih je prvi odkril švicarski matemaitk L. Euler.

Poglavje 2

Osnovni pojmi teorije grafov

2.1 Nekaj splošne matematične notacije

V diplomski nalogi bomo uporabljali naslednjo notacijo. Množico prvih n naravnih števil $\{1, 2, \ldots, n\}$ bomo na kratko označili z $[n]$. Za neko množico S in naravno število k bo $\binom{S}{k}$ označevalo množico vseh k-množic množice S. Povedano drugače $X \in \binom{S}{k}$ če in samo če $X \subseteq S$ in $|X| = k$.

Za neko $n \times m$ matriko M bomo element na preseku i-te vrstice ($1 \leq i \leq n$) in j-tega stolpca ($1 \leq j \leq m$) označili z $[M]_{i,j}$. Z $\langle M \rangle_{i,j}$ pa bomo označili matriko, ki jo iz M pridobimo tako, da v M odstranimo j-ti stolpec in i-to vrstico.

Za vso dodatno notacijo, ki smo jo morda pozabili navesti, obračamo bralca na [23].

2.2 Teorija grafov

2.2.1 Graf

Graf je matematična struktura s katero modeliramo probleme, ki temeljijo na binarnih relacijah. Graf sestavljajo objekti, ki jih imenujemo *vozlišča* ter *povezave*, ki ponazarjajo *sosednja* vozlišča. Formalno definiramo graf na naslednji način.

Definicija 2.2.1. *Graf G je urejeni par (V, E) kjer je V* množica vozlišč, *$E \subseteq \binom{V}{2}$ pa množica neurejenih parov vozlišč, ki jo imenujemo tudi množica* povezav.

Ko govorimo o nekem grafu G, označimo njegovo množico vozlišč z $V(G)$, množico povezav pa z $E(G)$. V kolikor definiramo, da je $E(G)$ multimnožica, (t.j. elementi v $E(G)$ se lahko pojavijo večkrat) in dovoljujemo, da se v $E(G)$ pojavljajo tudi enojci iz V potem pravimo, da je G *multigraf.*

Elemente $e = \{x, y\} \in E(G)$ krajše označimo z xy. Pravimo, da sta x, y krajišči e, da sta si x in y *sosednja* in da je x sosed y. Število vseh sosedov danega vozlišča v označimo z $d(v)$ in imenujemo *stopnja* vozlišča v. Grafu, kjer imajo vsa vozlišča isto stopnjo k, pravimo k-regularen graf. V posebnem primeru ko je $k = 3$, govorimo o kubičnih grafih. S pomočjo preproste uporabe tehnike dvojnega štetja, lahko izpeljemo sledečo zvezo med stopnjami vozlišč grafa G in njegovim številom povezav.

Trditev 2.2.1 (Lema o rokovanju)**.**

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|.$$

Lema nosi ime po znanem dejstvu, da če se skupina n ljudi rokuje, je vseh rokovanj za pol manj, kot je vsota rokovanj vsakega posameznika.

Pri preučevanju grafov se želimo osredotočiti na lastnosti, ki so neodvisne od izbire množice vozlišč ter od specifične predstavitve grafa. Želimo obravnavati le grafe, ki so na nek način 'različni'. Ta aspekt podobnosti grafov vpelje pojem *izomorfizma.*

Definicija 2.2.2. *Grafa G in H sta izomorfna, če obstaja preslikava:*

$$f : V(G) \mapsto V(H),$$

da je

$$uv \in E(G) \quad \textit{natanko tedaj ko} \quad f(u)f(v) \in E(H).$$

2.2.2 Povezanost in sprehodi

Zaporedje vozlišč $v_1 v_2 \cdots v_n v_{n+1}$ imenujemo sprehod, če so vozlišča v_i in v_{i+1} sosednja za vsak $1 \leq i \leq n$. Pravimo, da sta vozlišči v_1 in v_{n+1} *povezani.* Če so v sprehodu $P = v_1 v_2 \cdots v_n v_{n+1}$ vozlišča $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}$ različna, potem je P *enostaven* sprehod. Če sta vozlišči v_1 in v_{n+1} enostavnega sprehoda P incidenčni, potem prehodu Pv_1 pravimo tudi *cikel.* Grafu G, kjer je vsak par vozlišč povezan, imenujemo povezan graf. Povezanemu grafu z minimalnim možnim številom povezav pa pravimo *drevo.* Drevesa se da definirati na več načinov. Velja namreč

Trditev 2.2.2. *Naj bo G drevo. Spodnje trditve so ekvivalentne*

- *G ne vsebuje cikla, in če v G dodamo povezavo dobimo cikel.*
- *G je povezan, in če odstranimo poljubno povezavo v G, dobimo nepovezan graf.*
- *G je povezan in ima $|V(G)| - 1$ povezav.*

Pravimo, da je v prerezno vozlišče grafa G če graf, ki ga dobimo tako, da v G odstranimo vozlišče v in vse incidenčne povezave, ni povezan. Grafu, ki je brez prereznega vozlišča, rečemo tudi 2-povezan graf. V naslednjem razdelku bomo s pomočjo prereznih vozlišč definirali pojem *bloka*.

2.2.3 Podgraf in bloki grafa

Lastnosti nekega grafa G večkrat obravnavamo prek obravnavanja manjših podstruktur, ki jih G na naraven način definira in jih imenujemo *podgrafi*. Pravimo, da je graf H *podgraf* G ($H \subseteq G$), če je $V(H) \subseteq V(G)$ in $E(H) \subseteq E(G)$.

V kolikor je $V(H) = V(G)$ potem pravimo, da je H vpet podgraf grafa G. Na vpete podgrafe lahko gledamo kot na grafe, pridobljene iz nekega osnovnega grafa G prek odstranjevanja povezav. Odstranjevanje povezav formalno definiramo v naslednjem razdelku.

Podgrafu $H \subseteq G$ pravimo *blok,* če med vsakim parom vozlišč v H, obstajata vsaj dve po povezavah disjunktni poti med njima. Očitno lahko vsak graf zapišemo kot unijo njegovih blokov.

2.2.4 Operacije nad grafi

Velikokrat želimo iz nekih grafov $G_1, \ldots, G_n$ ustvariti nov graf G s pomočjo neke predpisane operacije na $G_1, \ldots, G_n$. Najpreprostejši primer imamo za $n = 1$, kjer sta najbolj znani operaciji odstranitve vozlišča in odstranitve povezave.

Definicija 2.2.3. *Naj bo G graf, $e = xy \in E(G)$ in $u \in V(G)$. Označimo z $G - u$ graf katerega množica vozlišč je $V(G) \setminus \{u\}$ in množica povezav je $\{e \in E(G) \mid u \notin e\}$.*

Za nas je zanimiva tudi operacija *skrčitve* povezave. Skrčitev povezave $e = uv$ grafa G, ponazarja graf G/e pridobljen iz grafa G, z odstranitvijo vozlišč

u, v ter dodatnim vozliščem w incidenčnim s sosedi vozlišč u in v. Posebnost operacije skrčitve je, da ni nujno, da je dobljeni graf enostaven.

Kot zadnjo omenjamo operacijo *(kartezičnega) produkta* dveh grafov G_1 in G_2.

Definicija 2.2.4. Kartezični produkt $G_1 \square G_2$ *grafov* G_1 *in* G_2 *je graf z množico vozlišč* $V(G_1) \times V(G_2)$. *Vozlišči* (u, u') *in* (v, v') *sta sosednji če:*

- $u = v$ *in sta* u', v' *sosednja v* H
- $u' = v'$ *in sta* u, v *sosednja v* G.

2.2.5 Posebne vrste grafov

V tem podrazdelku so navedene nekatere vrste podgrafov, s katerimi se bomo srečali v nadaljevanju diplomske naloge. *Poln graf* K_n je graf na množici vozlišč $[n]$ in z množico povezav $E(K_n) = \binom{[n]}{2}$. *Pot* P_n ponazarja množica vozlišč $[n+1]$, kjer sta dve vozlišči i, j sosednji, če in samo če je $|i - j| = 1$. Če v pot P_{n+1} $(n \geq 2)$, dodamo povezavo $1(n+1)$ dobimo graf C_n, imenovan tudi *n-cikel.* Če so $C_{n_1}, \ldots, C_{n_k}$ disjunktni cikli, potem je $C_{n_1,\ldots,n_k}$ graf, ki ga dobimo, če identificiramo po eno vozlišče iz vsakega izmed $C_{n_1}, \ldots, C_{n_k}$ v skupno vozlišče. Očitno ima $C_{n_1,\ldots,n_k}$ natanko $\sum_{i=1}^{k} n_i - k + 1$ vozlišč.

Za disjunktne poti P_a, P_b, P_c definiramo graf $\Theta_{a,b,c}$ kot graf, ki ga dobimo tako, da tri krajišča P_a, P_b, P_c skrčimo v eno vozlišče, prav tako preostala tri krajišča.

Za konec bomo definirali še tako imenovani *Kneserjev graf.* Za $n > 0$ in $k < \frac{n}{2}$ je $K(n, k)$ graf katerega množica vozlišč so vse k-podmnožice množice $[n]$. Vozlišči X, Y pa sta incidenčni, če in samo če sta disjunktni. Hitro lahko preverimo, da je $\binom{n}{k}$ število vozlišč grafa $G(n, k)$ in da je $G(n, k)$ regularen graf s stopnjo vozlišč $\binom{n-k}{k}$.

2.3 Matrike asocirane z grafi

Nekemu grafu G želimo pripisati matriko $M(G)$ tako, da študiramo lastnosti grafa G prek algebrajskih lastnosti matrike $M(G)$. Predpisov, ki določajo matriko $M(G)$ je več. V tem razdelku si bomo ogledali tri najbolj znane matrike povezane z grafi. V nadaljevanju bomo predpostavili, da je G graf z množico vozlišč $\{v_1, \ldots, v_n\}$ in množico povezav $\{e_1, \ldots, e_m\}$.

2.3.1 Matrika sosednosti

Matrika sosednosti za graf G, $A(G)$ je kvadratna matrika reda n, ki opisuje sosednost vozlišč v G.

Definicija 2.3.1. Matrika sosednosti $A(G)$ *je matrika, ki zadošča*

$$[A(G)]_{i,j} = \begin{cases} 1 & \textit{če } v_i v_j \in E(G) \\ 0 & \textit{sicer.} \end{cases}$$

Matriko sosednosti bomo potreboval le zato, da izrazimo njeno zvezo z Laplacovo matriko, definirano v naslednjem razdelku.

2.3.2 Laplacova matrika

V našem delu se bomo največkrat srečali z *Laplacovo* matriko. Podobno kot matrika sosednosti, tudi Laplacova matrika hrani informacijo o sosednjih vozliščih, le da so incidenčna vozlišča označena z -1. Dodatno ima Laplacova matrika na diagonali zabeležene stopnje vozlišč grafa G.

Definicija 2.3.2. *Laplacova matrika, $L(G)$ je kvadratna matrika reda n, ki zadošča*

$$[L(G)]_{i,j} = \begin{cases} -1 & \textit{če } v_i v_j \in E(G) \\ d(v_i) & \textit{če } i = j \\ 0 & \textit{sicer.} \end{cases}$$

Matriko $L(G)$ lahko definirano tudi nekoliko drugače. Če $\Delta(G)$ označuje matriko, ki ima za diagonalne elemente zaporedne stopnje vozlišč grafa G, potem je

$$L(G) = \Delta(G) - A(G).$$

2.3.3 Incidenčna matrika

Da bi lahko uvedli *incidenčno matriko*, potrebujemo pojem orientacije grafa. Za vsako povezavo $v_i v_j \in E(G)$ določimo eno vozlišče v_i kot pozitivno krajišče povezave e, preostalo vozlišče v_j pa kot negativno. Graf G, opremljen z neko usmeritvijo povezav, označimo z $\vec{G}$ in ga imenujemo *usmerjen* graf grafa G. Opomnimo še, da je več možnih orientacij grafa G in da lahko na $\vec{G}$ gledamo kot na graf, ki ima za povezave urejene pare vozlišč in ne množice, kot je to pri navadnem grafu. Za dano orientacijo $\vec{G}$ lahko zdaj definiramo incidenčno matriko.

Definicija 2.3.3. *Incidenčna matrika $D(\vec{G})$ je $n \times m$ matrika za katero velja*

$$[D(\vec{G})]_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{če je } v_i \text{ pozitivno krajišče povezave } e_j \\ -1 & \text{če je } v_i \text{ negativno krajišče povezave } e_j \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Kot je razvidno iz definicije je incidenčna matrika odvisna od podane orientacije grafa. Kljub temu, da je možnih orientacij grafa več, se izkaže, da je izbira orientacije pri definicij incidenčne matrike na nek način nepomembna. To dejstvo dokazuje spodnja trditev, ki incidenčno matriko povezuje z Laplacovo matriko.

Trditev 2.3.1. *Naj bo $\vec{G}$ poljubna orientacija grafa G. Velja*

$$D(\vec{G})D(\vec{G})^t = \Delta(G) - A(G) = L(G).$$

Dokaz. Po definiciji matričnega množenja je

$$[D(\vec{G})D(\vec{G})^t]_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} [D(\vec{G})]_{i,k}[D(\vec{G})]_{j,k}.$$

Če je $i \neq j$, potem ima navedena vsota neničeln sumand, če in samo če sta vozlišči v_i in v_j incidenčni. V tem primeru je eden od faktorjev -1, drugi pa 1, zato je skupen seštevek v tem primeru enak -1.

Če je $i = j$, potem je posamezen produkt sumanda zgornje vsote neničeln za vsak $1 \leq l \leq m$, za katerega je v_i incidenčen z e_l. Ker ima vsak tak sumand vrednost 1, je po definiciji vsota enaka stopnji vozlišča v_i. □

Ko bomo v tretjem poglavju izpeljevali Kirchoffov izrek, nam bo prišla zelo prav sledeča lema, ki povezuje število c vseh povezanih komponent nekega grafa G, z rangom matrike $D(\vec{G})$ velja namreč

Trditev 2.3.2. $\operatorname{rang}(D(\vec{G})) = n - c$.

Dokaz. Z lahkoto preverimo, da se da matriko $D(\vec{G})$ zapisati v obliki

$$\begin{bmatrix} D_1 & \cdots & 0 \\ 0 & D_2 \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & D_c \end{bmatrix},$$

kjer je posamezna podmatrika D_i incidenčna matrika za posamezno povezano komponento G_i grafa G. Pokazali bomo, da ima matrika D_i $(1 \leq i \leq c)$ rang $|V(G_i)| - 1$. Trditev bo nato avtomatsko sledila.

V vsakem stolpcu D_i se pojavita natanko dva neničelna elementa in sicer -1 in 1, zato je vsota vseh vrstic nič in je rang D_i kvečjemu $|V(G_i)| - 1$. Naj bodo $d_1, \ldots, d_l$ vrstice D_i in naj bodo $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ skalarji, da je:

$$\sum_{i=1}^{l} \alpha_i d_i = 0.$$

Naj bo d_k vrstica D_i za katero je pripadajoč skalar α_k neničeln. Ker je G_i povezan, je v_k incidenčen z vsaj eno povezavo, in je d_k posledično neničeln vektor. Za vsak neničeln element d_k obstaja natanko ena od d_k različna vrstica d_o, ki ima prav tako neničeln element na isti poziciji kot d_k. Da bi torej zgornja vsota bila nič, mora torej veljati $\alpha_k = \alpha_o$. Ker je G_i povezan, lahko zgornji argument ponovimo na vrstici d_o in zaključimo, da je $\alpha_1 = \cdots = \alpha_l$. Od tod zaključimo da je edina linearna kombinacija, za katero je $\sum_{i=1}^{l} \alpha_i d_i = 0$ večkratnik $\sum_{i=1}^{l} d_i$ kar pomeni, da je rang D_i zares $|V(G_i)| - 1$. $\square$

Z naslednjo trditvijo delno opišemo jedro matrike $D(\vec{G})$. Spomnimo se, da je jedro matrike A množica vektorjev x, za katere je $Ax = 0$. Če je sledeča zveza izpolnjena le za ničelni vektor, pravimo da je jedro matrike A trivialno. Kot bomo videli v naslednji trditvi, se izkaže, da vsebuje matrika $D(\vec{G})$ v jedru 'cikle' grafa G.

Trditev 2.3.3. *Če je jedro $D(\vec{G})$ trivialno, potem je G acikličen.*

Dokaz. Denimo, da G ni acikličen in naj bo C neki cikel v G. Naj $\vec{C}$ predstavlja eno izmed dveh možnih orietnacij C, s katero dobimo usmerjen cikel. Definirajmo stolpični vektor v na naslednji način

$$[v]_{i,1} = \begin{cases} 1 & e_i \in E(C) \text{ in se orientacija } e_i \text{ na } \vec{C} \text{ ujema z orientacijo v } \vec{G} \\ -1 & e_i \in E(C) \text{ in je orientacija } e_i \text{ na } \vec{C} \text{ nasprotna z orientacijo v } \vec{G} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Izračunajmo produkt $D(\vec{G})v$. Vrednost $[D(\vec{G})v]_{i,1}$ je notranji produkt i-te vrstice $D(\vec{G})$ in vektorja x. Če v_i ni na ciklu C, potem je ustrezen notranji produkt nič. Če je $v_i \in V(C)$, potem je v_i incidenčen z natanko dvema povezavama na $\vec{C}$, po definiciji predznakov vektorja v je tedaj ustrezen notranji produkt prav tako nič. Pokazali smo, da je v v jedru $D(\vec{v})$. To pa je

G	Spekter $L(G)$
K_n	$0, n^{n-1}$
$K_{m,n}$	$0, m^{n-1}, n^{m-1}, m+n$
C_n	$e^{\frac{2\pi ij}{n}}$, $j = 0, \ldots, n-1$
P_n	$4\sin^4(\frac{\pi i}{2j})$, $j = 0, \ldots, n-1$

Tabela 2.1: Spekter Laplacove matrike nekaterih grafov. Notacija x^k pomeni, da ima lastna vrednost x kratnost k.

protislovje, saj je po predpostavki jedro $D(\vec{G})$ trivialno, v pa gotovo ni ničeln vektor. Iz dobljenega protislovja zaključimo, da imajo aciklični grafi trivialno jedro incidenčne matrike. □

2.3.4 Nekatere lastnosti Laplacove matrike

Za konec si bomo ogledali lastnosti Laplacove matrike, ki nam bodo prišle prav v nadaljevanju. Večina rezultatov je povzetih po preglednem delu [17].

2.3.5 Spekter $L(G)$

Spomnimo se, da je λ lastna vrednost matrike M, če obstaja primeren neničeln stolpični vektor x, da je $Mx = \lambda x$. Ker je $L(G)$ simetrična matrika, se iskaže, da so vse lastne vrednosti $L(G)$ realna števila. Z malo več dela se da pokazati, da je $L(G)$ pozitivno semidefinitna, kar implicira, da so vse lastne vrednosti $L(G)$ pozitivne. Če je $x = [1, \ldots, 1]^t$ vektor z n enicami, potem je $L(G)v = 0$, zato je 0 lastna vrednost vsake Laplacove matrike. Med drugim, hitro sledi tudi spodnja trditev

Trditev 2.3.4. *Kratnost lastne vrednosti* 0 *matrike* $L(G)$ *je število povezanih komponent grafa* G.

Od tu dalje se bomo na lastne vrednosti $\alpha(G)$ sklicevali z $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$. Z nekaj računanja se lahko bralec dokoplje do spektra $L(G)$ za grafe, ki jih prikazuje tabela 2.1.

Kot zadnjo omenjamo zvezo za izračun spektra kartezičnega produkta grafa G_1 s spektrom $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n_1}$ in grafa G_2 s spektrom $\mu_1, \ldots, \mu_{n_2}$. Spekter grafa $G \Box H$ je

$$\lambda_i + \mu_j \quad \text{za} \quad i = 1, \ldots, n_1 \text{ in } j = 1, \ldots, n_2.$$

2.3.6 Adjugiranka $L(G)$

V tem razdelku predstavimo lastnost matrike $L(G)$, ki nam bo omogočala govoriti o *kofaktorju* matrike G. Adjugirana matrika kvadratne matrike M je definirana kot matrika istega reda, katere (i,j)-ti element je produkt $(-1)^{i+j}$ in determinante matrike $\langle M \rangle_{j,j}$. Povedano drugače, adjugirana matrika matike M, $\text{adj}(M)$ je matrika, ki zadošča

$$[\text{adj}(M)]_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(\langle M \rangle_{j,i}).$$

Za $L(G)$ se iskaže, da je njena adjugirana matrika večkratnik matrike J, pri čemer je J matrika iz samih enic.

Lema 2.3.1. *Za poljuben graf G obstaja nenegativno celo število k, da je*

$$\text{adj}(L(G)) = kJ.$$

Dokaz. Ker je po trditvi 2.3.1 $L(G) = D(\vec{G})D(\vec{G})^t$ je

$$\text{rang}(L(G)) \leq \text{rang}(D(\vec{G})).$$

Če G ni povezan, potem je po trditvi 2.3.2 $\text{rang}(D(\vec{G})) < n-1$ in je potemtakem $\text{adj}(L(G)) = 0 = 0J$. Sicer, če je G povezan je $\text{rang}(Q) = n-1$ in iz Kramerjevega pravila

$$L(G)\text{adj}(L(G)) = \det(L(G)) \cdot I = 0$$

razberemo, da so vsi stolpci $\text{adj}(L(G))$ v jedru matrike $L(G)$. Ker ima jedro $L(G)$ dimenzijo 1 in je $[1,\ldots,1]^t$ v jedru $L(G)$ so vsi stolpci $\text{adj}(L(G))$ večkratniki $[1,\ldots,1]^t$. Iz dejstva, da je $\text{adj}(L(G))$ simetrična matrika, zaključimo da so vsi stolpci $\text{adj}(Q)$ isti večkratnik vektorja $[1,\ldots,1]$ od koder neposredno sledi naša trditev. □

Kot se bo izkazalo v tretjem poglavju je število k iz trditve 2.3.1 ravno $\tau(G)$.

Poglavje 3

Štetje vpetih dreves

V tem poglavju raziščemo osnovne lastnosti funkcije τ. Kot prvo pokažemo preprosto zvezo za izračun $\tau(G)$ za poljuben graf G. V nadaljevanju predstavimo *Kirchoffov* izrek, ki pravi, da je $\tau(G)$ za nek graf reda n enako absolutni vrednosti determinante $\langle L(G)\rangle_{i,j}$ za poljubna $1 \leq i, j \leq n$. Na koncu izplejemo še posplošitev Kirchoffovega izreka ter dodatne lastnosti, ki sledijo iz predstavljenih izrekov. V nadaljevanju bo G vedno označeval povezan graf reda n. Kjer bo to potrebno, bomo z $\vec{G}$ označili neko poljubno orientacijo grafa G.

3.1 Osnovni prijemi za izračun $\tau(G)$

Za določene razrede grafov je izračun števila $\tau(G)$ zelo preprosto opravilo. Kot smo že opazili, je $\tau(G) = 0$, če in samo če G ni povezan in $\tau(G) = 1$ če in samo če je G drevo. Če iz cikla na n vozliščih odstranimo poljubno povezavo, dobimo vpeto drevo grafa C_n zato je

$$\tau(C_n) = n.$$

S podobnim načinom razmišljanja lahko določimo $\tau(\Theta_{a,b,c})$. Vpeto drevo grafa $\Theta_{a,b,c}$ dobimo tako, da odstranimo poljubni povezavi, ki ležita na disjunktnih poteh med vozliščema stopnje 3. Ker je izbir takšnih parov povezav $ab+ac+bc$ velja

$$\tau(\Theta_{a,b,c}) = ab + ac + bc.$$

Računanje števila vpetih dreves lahko precej poenostavimo v primeru, ko ima G več blokov. V tem primeru lahko vpeta drevesa posameznega bloka poljubno kombiniramo v vpeto drevo celotnega grafa. Slednjo ugotovitev strnemo v naslednji trditvi.

Trditev 3.1.1. *Če so $G_1, \ldots, G_k$ bloki grafa G je*

$$\tau(G) = \tau(G_1) \cdots \tau(G_k).$$

S pomočjo trditve 3.1.1 lahko na preprost način izrazimo število vpetih dreves v grafu $C_{x_1,\ldots,x_k}$. Velja

$$\tau(C_{x_1,\ldots,x_k}) = \prod_{i=1}^{k} x_i$$

V splošnem ni mogoče $\tau(G)$ direktno izračunati za vsak graf. V teh primerih je koristna spodnja zveza, ki temelji na opazki, da pri dani povezavi $e \in E(G)$ lahko množico vpetih dreves grafa G razdelimo na množico vpetih dreves U_e, ki vsebujejo povezavo e in množico vpetih dreves N_e, ki povezave e ne vsebujejo. Ker sta množici U_e in N_e očitno disjunktni, velja

Trditev 3.1.2. *Za poljubno povezavo $e \in E(G)$ velja zveza*

$$\tau(G) = \tau(G/e) + \tau(G - e).$$

Dokaz. Trditev neposredno sledi iz zgornje opazke po premisleku, da $\tau(G/e)$ označuje število vpetih dreves grafa G, ki vsebujejo povezavo e, $\tau(G - e)$ pa je moč množice N_e. □

V rekurzivni zvezi trdtive 3.1.2 se skriva postopek za izračun števila vpetih dreves poljubnega grafa. Postopek je seveda neučinkovit, saj v splošnem zahteva izračun eksponentnega števila členov in je zato uporaben le za zelo preproste grafe in za specifične teoretične argumente. Vprašanje, ali se da $\tau(G)$ izračunati učinkoviteje, ima pozitiven odgovor, predstavljen v naslednjem razdelku.

3.2 Kirchoffov izrek

Za izračun števila vpetih dreves obstaja preprosta formula, katere veljavnost je prvi opazil Kirchoff leta 1847 pri študiranju električnih vezij. Poglavje začnemo z vzpostavitvijo nekaterih pomožnih trditev potrebnih za dokaz glavnega izreka.

Prva na seznamu je lema, ki govori o vrednosti determinante poljubne kvadratne podmatrike matrike $D(\vec{G})$.

Lema 3.2.1 (Poincaré, 1901)**.** *Naj bo D poljubna kvadratna podmatrika matrike $D(\vec{G})$. Tedaj je*

$$\det(D) \in \{-1, 0, 1\}.$$

Dokaz. Vsak stolpec $D(\vec{G})$ vsebuje natanko dva neničelna elementa in sicer 1 in -1. Ker je D podmatrika $D(\vec{G})$, ima tudi D v vsakem stolpcu kvečjemu dva neničelna elementa. Če ima vsak stolpec D natanko dve neničelni vrednosti, potem je vsota vseh vrstic D ničelni vektor, kar med drugim pomeni, da je D singularna in je $\det(D) = 0$. Podobno je $\det(D) = 0$, če ima D stolpec s samimi ničlami. Preostane nam primer, ko ima D stolpec z natanko enim neničelnim elementom. V tem primeru lahko D razvijemo po tem stolpcu in zaključimo, da je $\det(D) = \pm\det(D')$, kjer je D' za eno dimenzijo manjša podmatrika matrike D. Opisan argument lahko zdaj induktivno nadaljujemo na D' in zaključimo, da je navedena trditev resnična. □

Naslednja lema je bolj specifična in karakterizira, kdaj so kvadratne $(n-1)$ podmatrike $D(\vec{G})$ nesingularne. Izkaže se, da je to natanko tedaj, ko dana podmatrika predstavlja neko vpeto drevo v G.

Lema 3.2.2. *Naj bo $U \subseteq E(G)$ poljubna množica moči $n-1$. Naj bo D_U podmatrika matrike $D(\vec{G})$ sestavljena iz $n-1$ stolpcev, ki predstavljajo povezave iz U ter poljubnih $n-1$ vrstic matrike $D(\vec{G})$. Matrika D_U je nesingularna, če in samo če množica U predstavlja neko vpeto drevo v G.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Naj množica U predstavlja vpeto drevo v G. Matrika D_U vsebuje $n-1$ vrstic matrike $D(\vec{U})$. Ker je U povezan graf, je po trditvi 2.3.2 rang $D(\vec{U}) = n-1$. Torej ima matrika D_U prav tako rang $n-1$, kar med drugim pomeni, da je nesingularna.

($\Leftarrow$) Naj bo D_U nesingularna. Tedaj ima incidenčna matrika D' grafa, ki ga U predstavlja, nesingularno $(n-1)$ podmatriko, torej je $\operatorname{rang}(D') = n-1$. Po trditvi 2.3.3 to pomeni, da je U acikličen graf. Ker je $|U| = n-1$ lahko po trditvi karakterizacije dreves 2.2.2 zaključimo, da je U zares drevo v G.

□

Za dokaz Kirchoffovega izreka bomo potrebovali takoimenovano *Cauchy-Binetovo* formulo, ki govori o računanju determinant za matrike produktov. Naj bo A $n \times m$ matrika in naj notacija $A_{X,Y}$ označuje matriko dobljeno tako, da iz A vzamemo vrstice indeksirane s števili v $X \subseteq [n]$ in stolpci indeksiranimi s števili v $Y \subseteq [m]$. Upoštevajoč to notacijo, se Cauchy-Binetov izrek glasi:

Izrek 3.2.1 (Cauchy-Binet)**.** *Naj bo A matrika reda $n \times m$ in B matrika reda $m \times n$. Tedaj je*

$$\det(AB) = \sum_{S \in \binom{[m]}{n}} \det(A_{[n],S}) \det(B_{S,[n]}).$$

Dokaz Cauchy-Binetove formule najde bralec v [24]. Dokaz bomo tukaj izpustili in se raje osredotočili na spodnji izrek.

Izrek 3.2.2 (Kirchoff, 1847).

$$\operatorname{adj}(L(G)) = \tau(G) \cdot J.$$

Dokaz. Po lemi 2.3.1 je dovolj, da preverimo trditev za poljuben kofaktor matrike $L(G)$. Če z E označimo matriko pridobljeno iz $D(\vec{G})$ tako, da odstranimo poljuben stolpec in vrstico, potem je $\det(EE^t)$ kofaktor matrike $L(G)$. Z uporabo Cauchy-Binetove formule dobimo:

$$\det(EE^t) = \sum_{S \in \binom{[m]}{n-1}} \det(E_{S,[n-1]}) \det(E^t_{[n-1],S}) = \sum_{S \in \binom{[m]}{n-1}} \det(E_{S,[n-1]})^2,$$

kjer zadnja enakost sledi iz dejstva, da imata kvadratna matrika in njena transponiranka isto determinanto. Zgornja vsota je seštevek determinant ${D_U}^2$ kjer je $U \subseteq E(G)$ in je D_U matrika definirana kot v lemi 3.2.2. Po tej isti lemi je sumand zgornje vsote 1, če in samo če je U vpeto drevo v G. Po lemi 3.2.1 so vsi preostali členi sumacije nič, zato je vsota zgornje sumacije $\tau(G)$, kar dokazuje zastavljeno trditev. $\square$

Pokažimo praktično uporabo izreka 3.2.2. Za Petersenov graf $K(5,2)$ se z lahkoto prepričamo, da je

$$L(K(5,2)) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Po Kirchoffovem izreku je število vpetih dreves Petersenovega grafa torej enako

$$\tau(K(5,2)) = \det(\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}) = 2000.$$

Izkaže se, da ima Petersenov graf največ vpetih dreves med vsemi kubičnimi grafi reda 10. $K(n,1)$ je poln graf, zato je prav tako graf z maksimalnim številom vpetih dreves v svojem regularnostnem razredu. S pomočjo računalnika smo želeli preverili (glej dodatek B), če ima $K(6,2)$ največ vpetih dreves med vsemi 6 regularnimi grafi reda 15 in tako postaviti spodnjo domnevo katere odgovor podajamo v dodatku B.

Domneva 3.2.1. *Kneserjev graf $K(n,k)$ ima največ vpetih dreves med vsemi $\binom{n-k}{k}-$regularnimi grafi reda $\binom{n}{k}$.*

Včasih je $\tau(G)$ lažje izračunati s pomočjo lastnih vrednosti $0 = \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ matrike $L(G)$ saj je spekter lastnih vrednosti Laplacove matrike za veliko večino grafov izračunan. V takih slučajih nam pride prav spodnja reformulacija izreka 3.2.2

Posledica 3.2.1. *Število vpetih dreves G je podano z*

$$\tau(G) = \frac{1}{n}\lambda_2 \cdot \cdots \cdot \lambda_n.$$

S pomočjo formule 3.2.1 lahko na osnovi tabele 2.1 na kratek način izrazimo število vseh dreves na n označenih vozliščih.

Izrek 3.2.3 (Cayleyeva formula)**.** *Število vseh možnih dreves na n označenih vozliščih je n^{n-2}. Povedano drugače:*

$$\tau(K_n) = n^{n-2}.$$

3.3 Posplošitev Kirchoffovega izreka

Na izrek 3.2.2 lahko gledamo tudi nekoliko drugače. Naj bo:

$$p_{L(G)}(t) = t^n + q_1 t^{n-1} + \cdots + q_{n-1} t + q_n$$

karakteristični polinom matrike $L(G)$. Po posledici 3.2.1 je $q_{n-1} = n\tau(G)$. Naravna posplošitev Kirchoffovega izreka podaja interpretacijo vseh koeficientov $p_{L(G)}(t)$. Iz uvodnih dejstev o Laplacovi matriki in njenem spektru lahko razberemo še:

$$q_1 = 2m \quad \text{in} \quad q_n = 0.$$

Glavni rezultat bomo izrazili s pomočjo funkcije $\rho(G)$ definirane za gozdove G. Če je G gozd z povezanimi komponentami $G_1, \ldots, G_k$ je

$$\rho(G) = \prod_{i=1}^{k} \rho(G_i).$$

Očitno je $\rho(G) = |V(G)|$, če in samo če je G drevo. Na dlani je izrek, ki podaja predpis za izračun koeficientov $p_{L(G)}(t)$ s pomočjo funckcije $\rho(G)$.

Trditev 3.3.1. *$i-$ti koeficient polinoma $p_{L(H)}(t)$ je za $1 \leq i \leq n$ podan s predpisom*

$$q_i = \sum_{\phi} \rho(\phi),$$

kjer sumacija teče po vseh induciranih podgrafih ϕ grafa G, ki imajo natanko i povezav.

Poglavje 4

Razredi grafov s paroma različnim številom vpetih dreves

V tem poglavju študiramo malo drugačen problem povezan s funkcijo $\tau(G)$, ki ga je leta 1969 predstavil českі matematik J. Sedláček. Problem je sledeč. Naj bo za neničelno celo število $n > 0$, A_n množica vseh števil $x \in A_n$, tako da obstaja povezan graf z n vozlišči in natanko x vpetimi drevesi. Kako se obnaša funkcija $f(n) = |A_n|$? Intuitivno se problem ukvarja z vprašanjem, kako velik je lahko nek razred povezanih grafov reda n, če ima vsak par grafov v razredu različno število vpetih dreves.

V članku [7] je Sedláček pokazal spodnjo trditev.

Trditev 4.0.2.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n} = \infty.$$

Dokaz. Skonstruirali bomo grafe $G_1, G_2, \ldots, G_{\binom{n}{2}-n+1}$ s paroma različnim številom vpetih dreves. Graf G_1 je pot na n vozliščih, za $2 \leq i \leq \binom{n}{2} - n + 1$ pa je G_i graf, ki ga dobimo tako, da v G_{i-1} dodamo poljubno povezavo.

Skonstruiran razred grafov ima različna števila vpetih dreves saj je

$$1 = \tau(G_1) < \tau(G_2) < \cdots < \tau(G_{\binom{n}{2}-n+1}) = n^{n-2}.$$

Limita iz trditve gotovo velja, saj smo za $n > 2$ pokazali, da je $|A_n| > \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 2)$. $\square$

V [7] je tudi omenjeno, da ni znano, kako se obnaša $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n^2}$. Na to vprašanje odgovorimo v tem poglavju. Za lažje razumevanje bomo uvedli

n	$f(n)$	$\frac{n^{n-2}}{f(n)}$
1	1	1
2	1	1
3	2	1.5
4	5	3.2
5	16	7.8
6	65	19.9
7	386	43.5
8	3700	70.8
9	55784	85.7
10	1134526	88.1
11	27053464	87.1

Tabela 4.1: Tabela znanih vrednosti moči množice A_n.

asimptotično notacijo $f(n) = \omega(g(n))$, ki bo za nas pomenila, da velja:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty.$$

Z uporabo računalnika lahko sestavimo spodnjo tabelo vrednosti za $f(n)$

Ker število grafov reda n rase eksponentno z n, je zelo malo verjetno, da se bo v bližnji prihodnjosti dalo izračunati $f(12)$ prek računanja $\tau(G)$ za vse povezane grafe G. Vprašanje ali se da $f(n)$ izračunati učinkoviteje pa ostaja odprto. Tretji stolpec tabele 4.1 je zanimiv, saj je po Cayleyevem izreku $f(n) < n^{n-2}$. Izračun limite $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{n-2}}{f(n)}$ pa je trenutno še odprt problem [9].

Sedláčekov problem bomo izboljšali s pomočjo orodji iz teorije števil. Potrebovali bomo pojem *razbitji* pozitivnega celega števila n. Pravimo, da je $\langle x_1, \ldots, x_k \rangle$ razbitje števila n z členi $x_1, \ldots, x_k$ če je

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = n.$$

Število vseh razbitji števila n označimo z $p(n)$. Na primer, bralec se lahko prepriča, da je $p(10) = 42$. Fundamentalno vprašanje iz teorije števil in analitične kombinatorike, ki je matematike v začetku 20. stoletja begalo je, 'Kako se asimptotično obnaša funkcija $p(n)$?' Leta 1918 sta odgovor na to vprašanje našla angleški matematik G. H. Hardy in indijski samoučenjak S. Ramanujan [10]. Pokazala sta, da je

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}},$$

kar brez uporabe asimptotične notacije pomeni

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{\frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}} = 1.$$

Leta 1942 je do istega rezultata kot Hardy in Ramanujan prišel [11] tudi madžarski matematik P. Erdős. Posebnost njegovega prispevka je v tem, da v dokazu uporablja le elementarne kombinatorične prijeme.

V svetu raziskovalne matematike so po rezultatu Ramanujana in Hardya vzklila nova posplošena vprašanja povezana s štetjem razbitji števil. Za nas je zanimiv problem *praštevilskih razbitji,* to je razbitji, kjer so vsi členi razbitja praštevila. Na tem mestu se sklicujemo na rezultat Rotha in Sezekeresa[12], kateri pravi, da je število praštevilskih razbitji števila n asimptotično enako

$$p_p(n) \sim e^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sqrt{n/\log n}}.$$

Nekoliko presenetljivo je dejstvo, da velja ista asimptotična zveza tudi, če se omejimo le na praštevilska razbitja v katerih ne dovoljujemo konstantno mnogo praštevil za člene razbitja. Med drugim to pomeni, da je število razbitji n, kjer so vsi členi razbitja liha praštevila, asimptotično enako $p_p(n)$.

V nadaljevanju bomo potrebovali oceno za število rešitev sistema neenakosti:

$$k \geq 1$$

$$3 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_k$$

$$x_1 + \cdots + x_k \leq n$$

kjer so $x_1, \ldots, x_k$ praštevila in n dano pozitivno celo število. Množico vseh rešitev zgornjega sistema označimo z P_n. Kot pokaže naslednja lema, je moč P_n tesno povezana z številom praštevilskih razbitji.

Lema 4.0.1. *Obstaja število n_0 da za vsa cela števila $n \geq n_0$ velja*

$$|P_n| \geq \frac{1}{4}\sqrt{n \log n} e^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sqrt{n/\log n}}.$$

Dokaz. Po definiciji asimpotične enakosti, obstaja število n_1 da za vse $n \geq n_1$ velja

$$p_p(n) \geq \frac{1}{2} e^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sqrt{n/\log n}}.$$

Za $n \geq n_1$ tedaj imamo:

$$|P_n| = \sum_{i=3}^{n} p_p(i) \geq \frac{1}{2} \sum_{i=n_1}^{n} e^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sqrt{i/\log i}} \geq \frac{1}{2} \int_{n_1-1}^{n} e^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sqrt{x/\log x}}\, dx,$$

kjer smo v zadnjem koraku uporabili znano zvezo med diskretnimi sumacijami in integralom. Če pokažemo, da je $\int_{n_1-1}^{n} e^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sqrt{x/\log x}}\, dx \sim \frac{\sqrt{3}}{\pi}\sqrt{n \log n} e^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sqrt{n/\log n}}$ potem slednje implicira obstoj števila n_2 da velja:

$$\int_{n_1-1}^{n} e^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sqrt{x/\log x}}\, dx \geq \frac{1}{2}\sqrt{n \log n} e^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sqrt{n/\log n}},$$

za vsa cela števila $n \geq n_2$. Trditev leme bi potemtakem veljala za $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Za dokaz zadnje asimptotične enakosti je dovolj preveriti, da z uporabo L'Hopitalovega pravila velja:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_{n_1-1}^{n} e^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sqrt{x/\log x}}\, dx}{\frac{\sqrt{3}}{\pi}\sqrt{n \log n} e^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sqrt{n/\log n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sqrt{n/\log n}}}{\frac{d}{dn}\left(\frac{\sqrt{3}}{\pi}\sqrt{n \log n} e^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sqrt{n/\log n}}\right)} = 1,$$

od koder po definiciji sledi željena asimptotična zveza. □

S pomočjo leme 4.0.1 lahko postavimo sledečo spodnjo mejo za $f(n)$.

Trditev 4.0.3. *Za neko število n_0 in vsa cela števila $n \geq n_0$ velja*

$$f(n) \geq |P_n|.$$

Dokaz. Naj bo P_n množica razbitji kot definirano zgoraj. Vsakemu razbitju $\langle x_1, \ldots, x_k \rangle \in P_n$ z vsoto $s = \sum_{i=1}^{k} x_i$ priredimo graf, ki ga dobimo s skrčitvijo nekega vozlišča grafa $C_{x_1,\ldots,x_k}$ in poljubnega vozlišča disjunktne poti P_{n-s+k}. Dobljeni graf ima po razmisleku iz tretjega poglavja natanko $\prod_{i=1}^{k} x_i$ vpetih dreves in n vozlišč. Ker so elementi P_n praštevilska razbitja, dobimo za različna razbitja grafe z različnim številom vpetih dreves. Zaključimo torej da:

$$f(n) = |A_n| \geq |P_n|,$$

za vse $n \geq n_0$, kjer je n_0 število, ki nam ga da lema 4.0.1. □

Do izboljšave rezultata 4.0.2 je le še kratek korak, ki ga zapišemo s spodnjo posledico.

Posledica 4.0.1. $f(n) = \omega(\sqrt{n} e^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sqrt{n/\log n}})$.

Dokaz. Po prejšnji trditvi je za vse dovolj velike n :

$$f(n) \geq |P_n| \geq \frac{1}{4}\sqrt{n\log n}\; e^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sqrt{n/\log n}}.$$

Ker je:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{4}\sqrt{n\log n}\; e^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sqrt{n/\log n}}}{\sqrt{n}e^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sqrt{n/\log n}}} = \infty,$$

je po znanem izreku iz analize

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|A_n|}{\sqrt{n}\; e^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sqrt{n/\log n}}} = \infty,$$

od koder takoj sledi trditev posledice. □

Konstrukcija iz trditve 4.0.3 dopušča prostor za precejšnjo izboljšavo rezultata posledice 4.0.1. Vsi konstruirani grafi namreč vsebujejo prerezno vozlišče. Izkaže se, da skoraj vsi grafi ne vsebujejo prereznega vozlišča, kar daje upanje, da je možno skonstruirati večjo družino grafov reda n, brez prereznega vozlišča in paroma različnim številom vpetih dreves.

Poglavje 5

Ekstremalen problem povezan s funkcijo τ

Ekstremalna teorija grafov se ukvarja z določanjem maksimalnih/minimalnih grafov, ki zadoščajo določeni lastosti P. Z maksimalnostjo oz. minimalnostjo grafov tukaj mislimo na grafe, ki imajo med vsemi grafi z lastnostjo P največ/najmanj povezav, vozlišč oziroma so ekstremalni glede na neko drugo grafovsko invarianto kot na primer prerez grafa. Za primer ekstremalnega problema lahko vzamemo določanje nepovezanega grafa reda n z maksimalnim številom povezav. Izkaže se, da je odgovor na to ekstremalno vprašanje graf disjunktne unije K_1 in K_{n-1}. Včasih, predvsem ko je težko določiti strukturo ekstremalnega grafa, se preučuje funkcijo, ki določa maksimalno število povezav oz. vozlišč v odvisnosti od nekega parametra, ki določa ekstremalno lastnost.

V tem poglavju bomo študirali funkcijo $\alpha(n)$, definirano kot najmanjše število k, za katerega obstaja graf reda k, ki ima natanko n vpetih dreves. Zgodovina funkcije α sega v leto 1970 in je plod dela [8] češkega matematika J. Sedláčeka, ki je pokazal nekatere osnovne lastnosti funkcije α. Problem je v naslednjih 40 letih ostal neobdelan, dokler ni leta 2009 ameriški matematik Richard Lipton[13] objavil vprašanja povezana s funkcijo α na svojem blogu. Vprašanje, ki ga je Lipton postavil je, 'Kako se asimptotično obnaša funkcija α?'. V tem poglavju predstavimo trenutno znane rezultate povezane s funkcijo α in nekatere osnovne lastnosti minimalnih grafov glede na α.

n	$\alpha(n)$
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	4
9	5
10	10
11	5
12	5
13	13

Tabela 5.1: Prvih nekaj vrednosti funkcije $\alpha(n)$.

5.1 Osnovne lastnosti funkcije α

Iz dejstva, da je $\tau(C_n) = n$ takoj razberemo, da je $\alpha(n)$ dobro definirana za vsak $n \geq 3$ in da je $\alpha(n) \leq n$. Nekatere vrednosti α so prikazane v tabeli 5.1.

Iz začetnih vrednosti za $\alpha(n)$ je težko razbrati obnašanje funkcije α. Iz tabele se namreč ne da razbrati, da α začne zelo počasi naraščati za velike n, tako je na primer $\alpha(56693912375296) = 14$. Prav tako ni jasno, ali ima α končno fiksnih točk ali ne.

Prvi rezultat, ki omeji vrednost α za določena števila n, je predstavil Sedláček v [8].

Izrek 5.1.1. *Naj bo $n \geq 6$ celo število. Tedaj je:*

$$\alpha(n) \leq \begin{cases} \frac{n+6}{3} & \textit{če } n \equiv 0 \pmod 3 \\ \frac{n+4}{3} & \textit{če } n \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$$

Dokaz. Če je $x \equiv 0 \pmod 3$, potem ima graf $C_{3,\frac{n}{3}}$ n vpetih dreves in $\frac{n}{3}+2$ vozlišč, kar dokazuje prvi del neenakosti. Sicer, če je $n \equiv 2 \pmod 3$ potem lahko skonstruiramo graf G na $\frac{n+4}{3}$ tako, da vzamemo $C_{\frac{n+4}{3}}$ in dodamo povezavo med dvema vozliščema na razdalji 2. Za dobljeni graf velja po formuli iz trditve 3.1.2

$$\tau(G) = \tau(C_{\frac{n+4}{3}}) + \tau(C_{2,\frac{n+4}{3}-2}) = \frac{n+4}{3} + 2\frac{n+4}{3} - 4 = n,$$

kjer smo $C_{2,x}$ označili graf $C_{3,x}$, v katerem skrčimo eno povezavo na ciklu dolžine 3. $\square$

Prva ideja, kako izboljšat rezultat trditve 5.1.1 leži v konstrukciji primernega grafa $C_{x_1,\ldots,x_k}$. Če je $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ faktorizacija števila n na faktorje, ki so večji od 2 potem je:

$$\alpha(n) \leq 1 + \sum_{i=1}^{k} a_i(p_i - 1).$$

Problem slednje konstrukcije predstavlja situacija, ko je n praštevilo oziroma dvakratnik nekega praštevila.

Za izboljšanje meje iz trditve 5.1.1, je torej potrebna drugačna konstrukcija. Kot v četrtem poglavju se bomo tudi tukaj obrnili na prijeme iz teorije števil. Uporabili bomo pojem *idonealnih števil*. Slednja je prvi definiral Euler leta 1778, pri študiranju zvez, s katerimi je bilo moč dobiti velika praštevila. Kasneje se je izkazalo, da so idonealna števila karakterizirana z *diofantsko* enačbo:

$$n = ab + ac + bc$$

kjer so

$$0 < a < b < c.$$

Izkaže se namreč, da so idonealna števila ravno tista števila n za katere zgornja enačba nima rešitve. Euler je tokom svojega raziskovanja našel [14] 65 idonealnih števil in sicer $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 18, 21, 22, 24, 25, 28, 30, 33, 37, 40, 42, 45, 48, 57, 58, 60, 70, 72, 78, 85, 88, 93, 102, 105, 112, 120, 130, 133, 165, 168, 177, 190, 210, 232, 240, 253, 273, 280, 312, 330, 345, 357, 385, 408, 462, 520, 760, 840, 1320, 1365, 1848\}$. Gauss [15] je kasneje postavil domnevo, da je seznam donealnih števil, ki ga je Euler sestavil popoln. Prvi rezultat v tej smeri je pokazal Chowla [16], ki je dokazal, da je množica idonealnih števil končna. Danes je znano, da če Riemmanova hipoteza drži, potem je I zares celoten seznam idonealnih števil. V kolikor obstaja še kakšno idonealno število, ima le to vsaj 5 različnih lihih prafaktorjev.

S pomočjo navedenih rezultatov,lahko izboljšamo trditev izreka 4.0.2 na sledeč način.Kot smo videli v poglavju 3 je $\tau(\Theta_{a,b,c}) = ab + ac + bc$ Ker je $ab+ac+bc \geq a+b+c-1$ bo $\alpha(n) < n$ za vsak$n$ oblike $n = ab+ac+bc$ pri številih $0 < a < b < c$. Ker je idonealnih števil končno mnogo,smo s tem premislekom pokazali, da ima $\alpha(n)$ končno mnogo fiksni točk. Z obravnavanjem primerov lahko tudi karakteriziramo fiksne točke α.

Trditev 5.1.1. $\alpha(n) = n$ *če in samo če* $n \in \{3, 4, 5, 6, 7, 10, 13, 22\}$.

Dokaz trditve 5.1.1 je zelo tehničen in nezanimiv, zato ga na tem mestu izpustimo in se raje osredotočimo na izboljšavo vzpostavljene meje za $\alpha(n)$.

Minimum izraza:

$$a + b + c$$

pri pogojih:

$$0 < a < b < c,$$

je dosežen ko je $a = 1, b = 2$ in $c = \frac{n-2}{3}$. Ker so a, b, c cela števila mora v tem primeru veljati $c \equiv 2 \pmod 3$ sicer mora biti $a = 1, b \geq 3$ in $c = \frac{n-3}{4}$. Slednjo ugotovitev lahko uporabimo v naslednji trditvi, ki izboljšuje mejo izreka 4.0.2.

Trditev 5.1.2. *Naj bo $n > 26$. Tedaj je:*

$$\alpha(n) \leq \begin{cases} \frac{n+4}{3} & \textit{če } n \equiv 2 \pmod 3 \\ \frac{n+9}{4} & \textit{sicer .} \end{cases}$$

Dokaz. Glede na število $n \geq 26$ ločimo dva primera. Če n ni idonealno število, potem je $n = ab + ac + bc$ za ustrezna cela števila $0 < a < b < c$, zato je po zgornjem razmisleku:

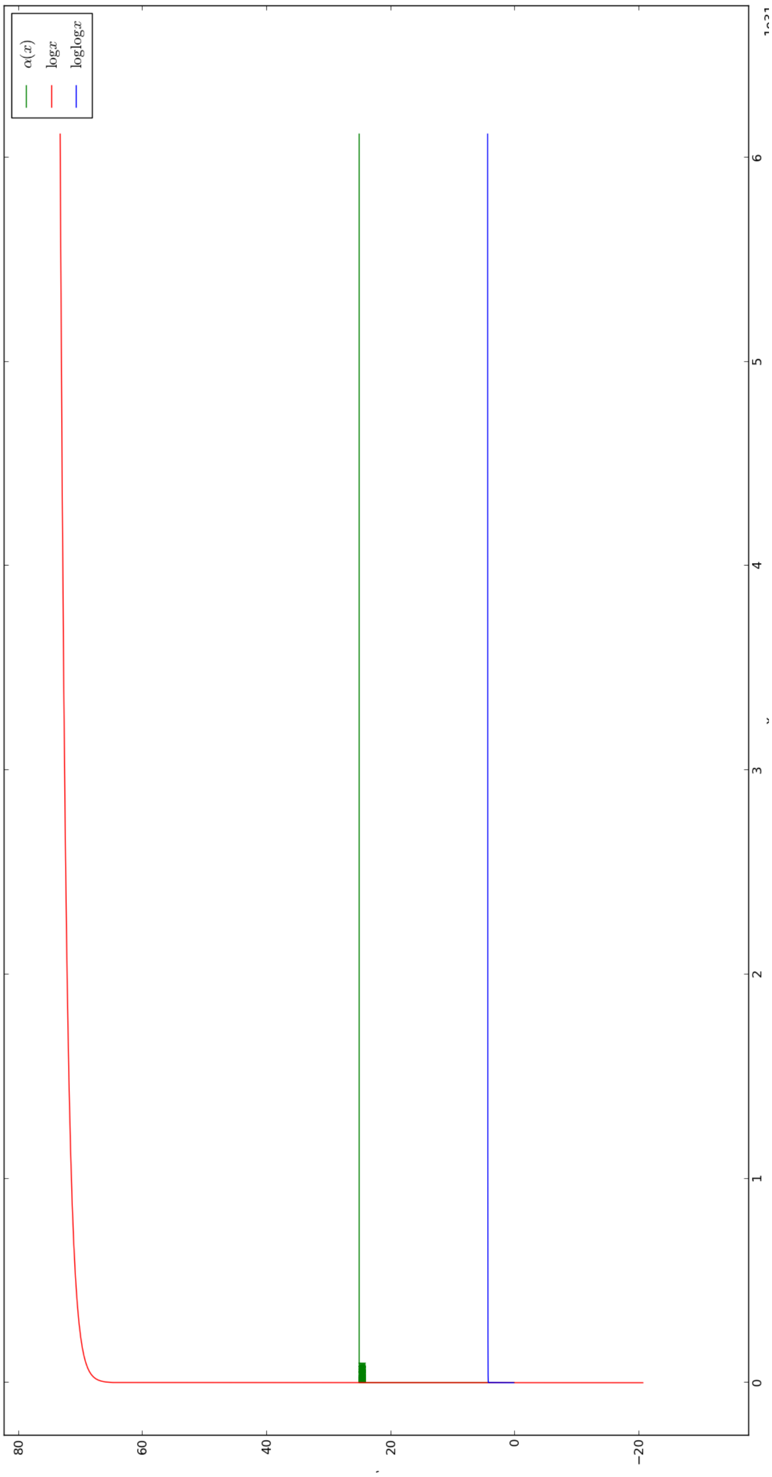
$$\alpha(n) \leq a + b + c - 1 \leq \begin{cases} \frac{n+4}{3} & \text{če } n \equiv 2 \pmod 3 \\ \frac{n+9}{4} & \text{sicer .} \end{cases}$$

Sicer je $n \in (I \setminus \{3, 4, 5, 6, 7, 10, 13, 22\}) \cup I^*$ kjer je I^* množica idonealnih števil katerih obstoj ni znan. Spet bomo ločili dva primera. Če je $n \in I^*$ potem po lastnostih navedenih na začetku poglavja vemo, da ima n vsaj dva liha prafaktorja p_1 in p_2. Graf $C_{p_1,p_2,\frac{n}{p_1 p_2}}$ ima n vpetih dreves in $p_1 + p_2 + \frac{n}{p_1 p_2} - 2 \leq 3 + 3 + \frac{n}{9} - 2 \leq \frac{n+9}{4}$ vozlišč. Preostane nam primer ko je $n \in \{40, 42, 45, 48, 60, 70, 72, 78, 85, 88, 102, 105, 112, 120, 130, 133, 165, 168, 190, 210, 232, 240, 253, 273, 280, 312, 330, 345, 357, 385, 408, 462, 520, 760, 840, 1320, 1365, 1848\}$. Z malo dela se lahko prepičamo da lahko v tem primeru skonstruiramo grafe oblike $C_{x_1,\ldots,x_k}$ oz $\Theta_{a,b,b}$, da neenakost trditve velja. $\square$

Meja pridobljena v izreku 5.1.2 je slaba. S pomočjo hevrističnega programa, ki generira naključne grafe in računa njihovo število vpetih dreves je, moč pridobiti graf kot ga prikazuje slika 5.1. Iz slike je razvidno, da α narašča hitreje kot funkcija $\log \log n$ in počasneje kot $\log n$, kar motivira naslednjo domnevo.

Domneva 5.1.1.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha(n)}{\log n} = 0.$$



Slika 5.1: Aproksimativno obnašanje funkcije α.

Dodatek A

Program za izračun funkcije $f(n)$

S pomočjo odprtokodnega programskega paketa Sage lahko $f(n)$ izračunamo s spodnjo programsko kodo

```
def f(n):
  return len( set([g.spanning_trees_count() for g
  in graphs.nauty_geng('-c ' + str(n))]) )
```

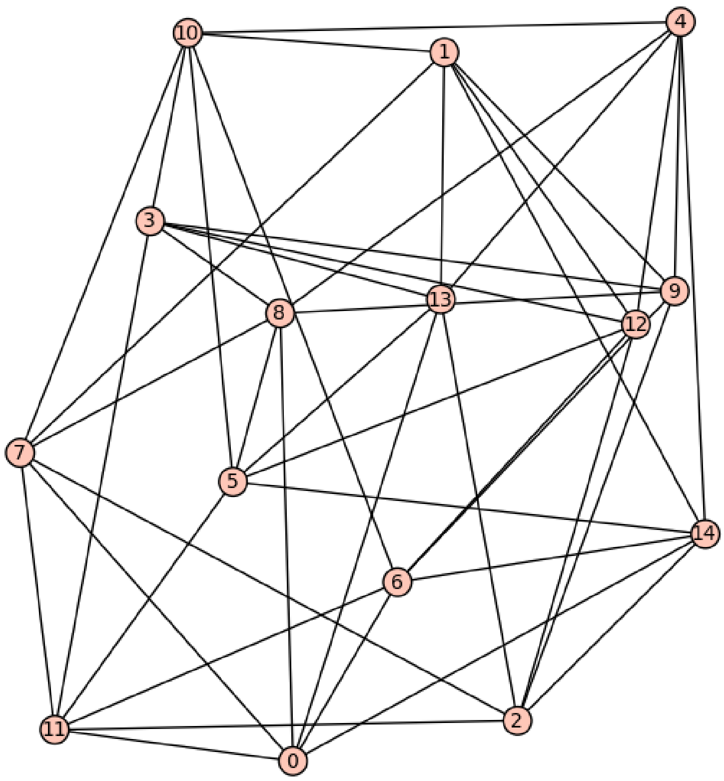
Dodatek B

Kneserjev graf $K(6,2)$ in maksimalnost števila vpetih dreves

V tretjem poglavju smo postavili domnevo, da ima Kneserjev graf $K(n,k)$ maksimalno število vpetih dreves med vsemi $\binom{n-k}{k}$-regularnimi grafi reda $\binom{n}{k}$. Da bi domneva bila upravičena, se jo splača preveriti vsaj še na grafu $K(6,2)$. Ker je 6 regularnih grafov na 15 vozliščih 1470293675 je bil prvi korak pri raziskovaju veljavnosti domneve spodnji Sage program, ki naključno generira 6-regularne grafe reda 15 in prevererja ali imajo več vpetih dreves kot Knesserjev graf.

```
def fc(niter=10000):
        G = graphs.KneserGraph(6,2)
        v = G.num_verts()
        sp = G.spanning_trees_count()
        for _ in xrange(niter):
                Gr = graphs.RandomRegular(6,v)
                if (sp < Gr.spanning_trees_count()):
                        print 'Najden graf'
                        print Gr.adjacency_list()
```

Ker spodnji program ni našel protiprimera, je bil naslednji naraven korak preveriti vseh 1470293675 grafov. S programom *geng* je generiranje datotek vseh povezanih 6 regularnih grafov reda 15 trajalo 4 dni. Datoteko se je nato



Slika B.1: Graf na sliki ima 15 vozlišč je 6-regularen in ima več vpetih dreves kot $K(6,2)$.

razdelilo na 25 kosov, preverjanje domneve pa je potekalo vsporedno na osmih procesorjih s pomočjo Sage programa podobnega zgornjemu. Po nekaj urnem delovanju, je bil najden graf iz slike B, ki ima več vpetih dreves kot $K(6,2)$.

Slike

Tabele

Literatura

[1] G. G. Kirchhoff, *Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Strome gefhrt wird*, Ann. Phy. Chem. **72** (1847) 497–508.

[2] F.Y. Wu, *Number of Spanning Trees on a Lattice*, J. Phys. A **10** (1977) 113–115.

[3] R. Shrock, F. Y. Wu, *Spanning trees on graphs and lattices in d dimensions*, J. Phys. A **33** (2000) 3881–3902.

[4] J. L. Felker and R. Lyons, *Asymptotic enumeration of spanning trees*, J. Phys. A **36** (2003) 8361–8365.

[5] E. Teufl and S. Wagner, *On the number of spanning trees on various lattices*, J. Phys. A **43** (2010) 491–522.

[6] C. Godsil, G. Royle, *Algebraic Graph Theory*, New York: Springer-Verlag.

[7] J. Sedláček, *On the number of spanning trees of finite graphs*, Čas. Pro. Pěst Mat., Vol. **94** (1969) 217–221.

[8] J. Sedláček, *On the minimal graph with a given number of spanning trees*, Canad. Math. Bull. **13** (1970) 515–517.

[9] J. Azarija, Minimal graphs with a prescribed number of spanning trees, Open Problem Garden. Dostopno na: `http://garden.irmacs.sfu.ca/?q=op/minimal_graphs_with_a_prescribed_number_of_spanning_trees`

[10] G. H. Hardy, S. Ramanujan, *Asymptotic formule in combinatory analysis*, Proc. London Math. Soc. (2) **17** (1918) 75–115.

[11] P. Erdős, *On an elementary proof of some asymptotic formulas in the theory of partitions, Ann. Math. (2) **43** (1942) 437–450.*

[12] K. F. Roth, G. Szekeres, Some asymptotic formulae in the theory of partitions, Quarterly Journal of Mathematics, Oxford Series **5** (1954) 241–259.

[13] R. Lipton, The inverse spanning tree problem, Godel lost letter. Dostopno na: `http://rjlipton.wordpress.com/2009/06/24/the-inverse-spanning-tree-problem/`

[14] A. Weil, *Number Theory: An Approach Through History*, Birkhauser, Boston, Basel and Stuttgart, 1984.

[15] C. F. Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*, Springer-Verlag, New York, 1986.

[16] S. Chowla, *An extension of Heilbronn's class number theorem*, Quart. J. Math. **5** (1934) 304–307.

[17] B. Mohar, *The laplacian spectrum of graphs*, objavljeno v: Y. Alavi, G. Chartrand, O. Oellermann and A. Schwenk (Eds.), Graph Theory, Combinatorics, and Applications, Wiley, New York, NY, USA, 1991, pp. 871–898

[18] G. A. Cayley, *A theorem on trees*, Quart. J. Math **23** (1889) 276–378.

[19] T. Atajan and H. Inaba, *Network reliability analysis by counting the number of spanning trees, ISCIT 2004, IEEE International Symposium on Communication and Information technology* ***1*** *(2004) 601–604.*

[20] F. T. Boesch, On unreliabillity polynomials and graph connectivity in reliable network synthesis*, J. Graph Theory* ***10*** *(1986) 339–352.*

[21] F. T. Boesch, A. Satyanarayana in C. L. Suffel, A survey of some network reliability analysis and synthesis results*, Networks* ***54*** *(2009) 99–107.*

[22] A. Ribó Mor, G. Rote in A. Schulz, Embedding 3-polytopes on a small grid*, Discrete and Computational Geometry* ***45*** *(2011) 65–87.*

[23] A. Bondy, U.S.R Murty, Graph theory *Discrete and Computational Geometry* ***45*** *(2011) 65–87. Springer, 2008.*

[24] A. Sheldon, Linear Algebra Done Right*, Springer, 2004.*