Univerza v Ljubljani
Fakulteta za računalništvo in informatiko
Fakulteta za matematiko in fiziko

Maja Ilc

Rang matrike nad tropskim polkolobarjem

DIPLOMSKO DELO

UNIVERZITETNI ŠTUDIJSKI PROGRAM PRVE STOPNJE
RAČUNALNIŠTVO IN MATEMATIKA

Mentor: doc. dr. Polona Oblak

Ljubljana 2012

Besedilo je oblikovano z urejevalnikom besedil LaTeX.

Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta *za računalništvo in informatiko*

Tržaška 25
1001 Ljubljana, Slovenija
telefon: 01 476 84 11
01 476 83 87
faks: 01 426 46 47
01 476 87 11
www.fri.uni-lj.si
e-mail: dekanat@fri.uni-lj.si

Št. naloge: 00011/2012

Datum: 12.04.2012

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za računalništvo in informatiko ter Fakulteta za matematiko in fiziko izdaja naslednjo nalogo:

Kandidat: **MAJA ILC**

Naslov: **RANG MATRIKE NAD TROPSKIM POLKOLOBARJEM**
ON THE RANK OF A TROPICAL MATRIX

Vrsta naloge: Diplomsko delo univerzitetnega študija prve stopnje

Tematika naloge:

V delu predstavite osnove tropske algebre. Nato primerjajte različne definicije rangov matrik nad tropskimi polkolobarji.

Mentor:

doc. dr. Polona Oblak

Polona Oblak

Dekan Fakultete za računalništvo in informatiko:

prof. dr. Nikolaj Zimic

Dekan Fakultete za matematiko in fiziko:

akad. prof. dr. Franc Forstnarič

Izjava o avtorstvu diplomskega dela

Spodaj podpisana Maja Ilc, z vpisno številko **63090007**, sem avtorica diplomskega dela z naslovom:

Rang matrike nad tropskim polkolobarjem

S svojim podpisom zagotavljam, da:

- sem diplomsko delo izdelal samostojno pod mentorstvom doc. dr. Polone Oblak,
- so elektronska oblika diplomskega dela, naslov (slov., angl.), povzetek (slov., angl.) ter ključne besede (slov., angl.) identični s tiskano obliko diplomskega dela
- soglašam z javno objavo elektronske oblike diplomskega dela v zbirki "Dela FRI".

V Ljubljani, dne 18. september 2012 Podpis avtorja:

Pri izdelavi diplomske naloge se za nasvete in strokovno pomoč zahvaljujem mentorici doc. dr. Poloni Oblak.

Kazalo

Povzetek

Rang matrike nad realnimi števili lahko določimo na več ekvivalentnih načinov. Zanimivo pa je, da če uporabimo te definicije ranga za matrike nad tropskim polkolobarjem, dobimo lahko različne vrednosti. To pomeni, da načini, s katerimi lahko določimo rang, niso več ekvivalentni. V diplomskem delu se osredotočimo na tri definicije rangov: rang določen z največjo regularno poddeterminanto matrike, vrstični in pa stolpični rang. S primerom bomo pokazali, da z razširitvijo tropskega polkolobarja dosežemo boljši približek realnih števil, torej, da so opisane definicije rangov matrik nad razširjenim tropskim polkolobarjem zopet ekvivalentne.

Ključne besede: tropska algebra, tropski polkolobar, determinanta matrike, odvisnost vektorjev, singularnost matrike, tropski rang

Abstract

Rank of a real matrix can be defined in many equivalent way. It is interesting that the rank of a matrix over the tropical semiring can vary according to these definitions, which means that the ways in which we can determine rank are no longer equivalent. In the thesis we focus on three rank definitions; rank of a matrix determined by the maximum regular minor, row rank and column rank. We demonstrate with example that with the extension of tropical semiring we can achieve similar results to those over reals.

Keywords: tropical algebra, tropical semiring, determinant of a matrix, dependence of vectors, singular matrix, tropical rank

Poglavje 1

Uvod

Rang matrike, kot ga poznamo v realnem linearnem svetu, nas nikakor ne more presenetiti. Poznamo veliko načinov, kako določimo rang, a ta je ne glede na način, vedno enak. Vendar pa tega ne moremo reči za range matrik nad tropskim polkolobarjem. Prav lahko se zgodi, da naletimo na matriko, katere vrstični rang je drugačen od stolpičnega. V tem diplomskem delu raziskujemo, zakaj je temu tako.
Polkolobar je struktura, ki mu do strukture kolobarja manjkajo aditivni inverzi. Natančneje, ničelni element ima vedno aditiven inverz, medtem ko ga ostali elementi imajo ali pač ne. Polkolobar, ki vsebuje vsa taka nenegativna števila, ki nimajo svojega aditivnega inverza, imenujemo nenegativen polkolobar. Prav taka sta tudi tropski in razširjeni tropski polkolobar, ki ju bomo definirali v poglavju 2.1 in 2.2. Ker števila nimajo aditivnega inverza, v nenegativnih polkolobarjih operacija odštevanja enostavno ne more obstajati.
Tropski polkolobar je algebraična struktura, v kateri sta operaciji seštevanja in množenja definirani drugače kot so nas učili v prvem razredu osnovne šole. Na računanje v tropski matematiki se lahko hitro privadimo. Z malo vaje se kar hitro prepričamo o njegovi enostavnosti.
Postavlja pa se vprašanje, kako in zakaj se s spremembo operacij seštevanja in množenja, spremenijo metode za določitev ranga matrike. Ali se le te sploh spremenijo? Na to vprašanje lahko odgovorimo tako, da nam že znane

definicije ranga preiskusimo na tropskih matrikah.

1.1 Cilji

V diplomski nalogi želimo odgovoriti na naslednja vprašanja:

1. Kaj je tropski in kaj razširjeni tropski polkolobar?
2. Kakšne so lastnosti tropskega in razširjenega tropskega polkolobarja?
3. Kako seštevamo in množimo tropske matrike?
4. Ali lahko rang tropske matrike določimo z determinanto?
5. Ali lahko govorimo o tropski odvisnosti vrstic oziroma stolpcev matrike?
6. Kdaj in zakaj je rang tropske matrike enak 0?
7. Kako lahko najdemo matriko, kjer znani načini, s katerimi lahko določim rang, niso ekvivalentni?
8. Ali je rang neke matrike nad tropskim polkolobarjem vedno enak njenemu rangu nad razširjenim tropskim polkolobarjem?

V želji odgovoriti na zastavljena vprašanja, potrebujemo kar nekaj novega znanja. Zato smo v diplomskem delu začeli povsem od začetka in postopoma dopolnjevali naše znanje o tropski matematiki in tropskih rangih. Tako smo lahko poiskali matriko, ki smo jo obravnavali nad tropskim in tudi nad razširjenim tropskim polkolobarjem ter ugotavljali podobnosti oziroma razlike rangov med strukturama.

Poglavje 2

Aritmetika v tropski algebri

Da bi lahko raziskali kako se rangi matrik obnašajo v tropski algebri, moramo najprej pripraviti prostor. Tropska matematika je definirana nad posebno algebraično strukturo, $(\mathbb{R} \cup -\{\infty\}, \oplus, \odot)$, ki jo imenujemo *tropski polkolobar*. Operaciji, ki jih lahko uporabljamo sta seštevanje in množenje realnih števil, ki pa ju je potrebno redefinirati:

$$x \oplus y = \max\{x, y\}$$

$$x \odot y = x + y$$

Lahko opazimo, da sta seštevanje in množenje v tropski matematiki lažji in hitrejši operaciji. Da je temu tako, lahko vidimo v tabelah 2.1 in 2.2.

Lahko omenimo, da lahko v tropski matematiki računamo s polinomi in opazujemo krivulje. O tem si lahko preberemo v [7].

2.1 Lastnosti tropskega polkolobarja

Tropska matematika je matematika nad idempotentim ($a \oplus a = a$) tropskim polkolobarjem, v katerem sta definirani že opisani operaciji $\oplus$ in $\odot$. Ker je realnim številom potrebno dodati še $-\infty$, bomo za vsa taka števila $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ uporabili oznako $\overline{\mathbb{R}}$.

$\oplus$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	2	3	4	5	6	7
3	3	3	3	4	5	6	7
4	4	4	4	4	5	6	7
5	5	5	5	5	5	6	7
6	6	6	6	6	6	6	7
7	7	7	7	7	7	7	7

Tabela 2.1: Seštevanje števil v tropski matematiki

$\odot$	1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7	8
2	3	4	5	6	7	8	9
3	4	5	6	7	8	9	10
4	5	6	7	8	9	10	11
5	6	7	8	9	10	11	12
6	7	8	9	10	11	12	13
7	8	9	10	11	12	13	14

Tabela 2.2: Množenje števil v tropski matematiki

Če želimo raziskati lastnosti tropskega polkolobarja, se moramo vprašati, ali imata na novo definirani osnovni aritmetični operaciji enake lastnosti in pravila, kot seštevanje in množenje v linearni algebri. Poglejmo si primer komutativnosti, asociativnosti in distributivnosti ter pokažimo naslednje trditve.

Trditev 2.1 *Operaciji $\oplus$ in $\odot$ sta komutativni.*

Dokaz. Brez škode za splošnost privzemimo, da velja $a \leq b$. Pokazati moramo, da je

$$a \oplus b = b \oplus a$$

in

$$a \odot b = b \odot a$$

Tako lahko hitro ugotovimo, da ker je $a \leq b$, je

$$\max\{a, b\} = \max\{b, a\}$$

in zato

$$a \oplus b = b \oplus a$$

Podobno pokažemo tudi komutativnost množenja. Ker je

$$a + b = b + a,$$

sledi

$$a \odot b = b \odot a$$

$\square$

Trditev 2.2 *Operaciji $\oplus$ in $\odot$ sta distributivni.*

Dokaz. Pokazati moramo, da velja

$$a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot b),$$

kar je ekvivalentno pogoju

$$a + \max\{b, c\} = \max\{a + b, a + c\}$$

$\square$

Trditev 2.3 *Operaciji $\oplus$ in $\odot$ sta asociativni.*

Dokaz. Želimo pokazati asociativnost vsote, torej

$$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c).$$

Po definiciji lahko zapišemo

$$\max\{\max\{a, b\}, c\} = \max\{a, \max\{b, c\}\}.$$

Obe strani strani sta enaki največjemu številu a, b ali c. $\square$

Dokazali smo, da komutativnost, asociativnost in distributivnost vedno veljajo. Preverimo še obstoj nevtralnega in inverznega elementa. Za operaciji tropskega seštevanja in množenja obstajata nevtralna elementa, ki pa se razlikujeta od nevtralnih elementov v nam že poznani aritmetiki. Nevtralni element za seštevanje v tropski algebri je $-\infty$, saj je

$$x \oplus (-\infty) = \max\{x, -\infty\} = x,$$

medtem ko je nevtralni element za množenje enak 0, ker

$$x \odot 0 = x + 0 = x.$$

Zanimivo je to, da Pascalov trikotnik v tropski algebri izgleda tako:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & 0 & & 0 & & 0 & \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & & \ldots & & & \end{array}$$

Kaj pa inverzni element? Poljubnemu številu a poskusimo poiskati nasprotno število b, tako da bo $a \oplus b = -\infty$. Tako število ne obstaja, saj ne moremo zadostiti pogoju $\max\{a, b\} = -\infty$. Ugotovimo, da razen nevtralnega elementa, poljubno število nima aditivnega inverza in tako operacija odštevanja v tropski algebri ne obstaja.

2.2 Razširjeni tropski polkolobar in lastnosti

Sedaj bomo naš že obstoječi tropski polkolobar ustrezno razširili na *razširjeni tropski polkolobar* in zapisali njegove lastnosti. Več lahko o razširjenem tropskem polkolobarju izvemo v [4] in [5].

V grobem je osnovna ideja novega pristopa v posplošitvi $(\overline{\mathbb{R}}, \oplus, \odot)$ na strukturo polkolobarja z delno idempotentno vsoto, ki razlikuje med vsoto enakih elementov in vsoto različnih elementov. Teoretično je naš polkolobar sestavljen iz disjunktnih unij dveh kopij $\mathbb{R}$, označenih z $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^\nu$. Ti dve kopiji zlepimo skupaj z $-\infty$ in tako ustvarimo novo množico $\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \mathbb{R}^\nu$.

Ker smo z $\overline{\mathbb{R}}$ označili $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, bomo namesto $\mathbb{R}^\nu \cup \{-\infty\}$ uporabljali oznako $\overline{\mathbb{R}}^\nu$. Da pa bomo lahko na novo pridobljeni pristop uporabljali, moramo poznati pravila in lastnosti. Naj bodo $a, b \in \mathbb{R}$, $a^\nu, b^\nu \in \mathbb{R}^\nu$ in $x, y \in \mathbb{T}$.

Definicija 2.4 *Relacija $\prec$ na $\mathbb{T}$ je definirana kot:*

1. $-\infty \prec x, \forall x \in \mathbb{T} \backslash \{-\infty\}$;
2. *za realni števili* $a < b$, *velja* $a \prec b, a \prec b^\nu, a^\nu \prec b$ *in* $a^\nu \prec b^\nu$;
3. $a \prec a^\nu$ *za vse* $a \in \mathbb{R}$.

Naučeno utrdimo s primerom.

Primer 2.5 *Naj velja* $a < b < c$ *in* $a, b, c \in \mathbb{R}$, *potem*

$$-\infty \prec a \prec a^\nu \prec b \prec b^\nu \prec c \prec c^\nu$$

Definicija 2.6 *Operaciji $\oplus$ in $\odot$ nad razširjenim tropskim polkolobarjem definiramo s predpisi:*

1. $-\infty \oplus x = x \oplus -\infty$ *za vsak* $x \in \mathbb{T}$;
2. $x \oplus y = \max\{x, y\}$, *če* $x \neq y$;
3. $a \oplus a = a^\nu \oplus a^\nu = a^\nu$;
4. $-\infty \odot x = x \odot -\infty = -\infty$, *za vsak* $x \in \mathbb{T}$;
5. $a \odot b = a + b$ *za vse* $a, b \in \mathbb{R}$;
6. $a^\nu \odot b = a \odot b^\nu = a^\nu \odot b^\nu = (a+b)^\nu$.

S definicijo operacij $\oplus$ in $\odot$ lahko razširjeni tropski polkolobar označimo s trojico $(\mathbb{T}, \oplus, \odot)$.

Obravnavajmo še osnovne lastnosti, ki veljajo za razširjeni tropski polokolobar. Primere, ki vključujejo $-\infty$, bomo zaradi trivialnosti izpustili.

Trditev 2.7 *Operaciji $\oplus$ in $\odot$ sta komutativni.*

$$a \oplus b = b \oplus a$$

$$a \odot b = b \odot a$$

Dokaz. Dokaz sledi iz lastnosti 2.1 ter 2. in 3. točke iz definicije 2.6. □

Trditev 2.8 *Operaciji $\oplus$ in $\odot$ sta asociativni.*

Dokaz. Dokaz trditve je zgolj tehničen. V vseh primerih moramo zgolj obravnavati enakost pod istimi pogoji. Zaradi velikega števila možnih kombinacij, bomo enakost preverili le na primeru, ko velja $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$(a \oplus b) \oplus c = \begin{cases} a \oplus c, & b \prec a \\ a^{\nu} \oplus c, & a = b \\ b \oplus c, & a \prec b \end{cases}$$

Obravnavajmo še vsak delček posebej.

$$a \oplus c = \begin{cases} a, & c \prec a \\ a^{\nu}, & a = c \\ c, & a \prec c \end{cases}$$

$$a^{\nu} \oplus c = \begin{cases} a^{\nu}, & c \preceq a \\ c, & a \prec c \end{cases}$$

in

$$b \oplus c = \begin{cases} b, & c \prec b \\ b^{\nu}, & b = c \\ c, & b \prec c \end{cases}$$

Izpišimo vse možne rezultate pod danimi pogoji.

$$(a \oplus b) \oplus c = \begin{cases} a, & b, c \prec a \\ a^{\nu}, & b \preceq a, a = c \quad \mathit{ali} \quad a = b, c \preceq a \\ b, & a, c \prec b \\ b^{\nu}, & a \preceq b, b = c \\ c, & a, b \prec c \end{cases}$$

Ravno tako preverimo drugo stran enakosti in tako dobimo:

$$a \oplus (b \oplus c) = \begin{cases} a \oplus b, & c \prec b \\ a \oplus b^{\nu}, & b = c \\ a \oplus c, & b \prec c \end{cases}$$

S korakom globlje dobimo naslednje rezultate:

$$a \oplus b = \begin{cases} a, & b \prec a \\ a^{\nu}, & a = b \\ b, & a \prec b \end{cases}$$

$$a \oplus b^{\nu} = \begin{cases} a, & b \prec a \\ b^{\nu}, & a \preceq b \end{cases}$$

$$a \oplus c = \begin{cases} a, & c \prec a \\ a^{\nu}, & a = c \\ c, & a \prec c \end{cases}$$

Dobimo naslednje rezultate:

$$(a \oplus b) \oplus c = \begin{cases} a, & b, c \prec a \\ a^{\nu}, & b \preceq a, a = c \quad ali \quad a = b, c \preceq a \\ b, & a, c \prec b \\ b^{\nu}, & a \preceq b, b = c \\ c, & a, b \prec c \end{cases}$$

Opazimo lahko, da enakost velja, torej operacija $\oplus$ je asociativna. Podobno lahko asociativnost preverimo za množenje $\odot$. $\square$

Trditev 2.9 *Operaciji $\oplus$ in $\odot$ sta distributivni.*

Dokaz. Podobno kot smo dokazali trditev 2.8, dokažemo tudi distributivnost in se zaradi tehničnosti dokaza omejimo le za $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$a \odot (b \oplus c) = \begin{cases} a \odot b, & c \prec b \\ a \odot c, & b \prec c \\ a \odot b^{\nu}, & b = c \end{cases}$$

in

$$(a \odot b) \oplus (a \odot c) = \begin{cases} a \odot b, & c \prec b \\ a \odot c, & b \prec c \\ (a \odot b)^{\nu}, & b = c \end{cases}$$

Ker smo enakost velja, smo dokazali distributivnost. $\square$

Poglavje 3

Tropske matrike

Naj za vsako pozitivno število n, $M_n(\overline{\mathbb{R}})$ označuje množico $n \times n$ matrik z elementi iz $\overline{\mathbb{R}}$. Za tropski matriki $A, B \in M_n(\overline{\mathbb{R}})$ definirajmo seštevanje in množenje s predpisoma:

$$(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}$$

$$(A \odot B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{n} A_{ik} \odot B_{kj}.$$

Zaradi enostavnosti bomo v nadaljevanju za produkt dveh matrik $A \odot B$ uporabljali AB.

Operaciji $\oplus$ in $\odot$ inducirata strukturo polkolobarja na $M_n(\overline{\mathbb{R}})$, pri čemer sta identična matrika

$$I = \begin{bmatrix} 0 & -\infty & \cdots & -\infty \\ -\infty & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\infty \\ -\infty & \cdots & -\infty & 0 \end{bmatrix}$$

in ničelna matrika

$$Z = (-\infty)I = \begin{bmatrix} -\infty & \cdots & -\infty \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\infty & \cdots & -\infty \end{bmatrix}.$$

Definirajmo še transponirano matriko A^T matrike A. Če je $A = (a_{ij})$, potem je transponirana matrika enaka

$$A^T = (a_{ji})$$

in velja

$$(AB)^T = B^T A^T,$$

tako, kot že poznamo iz linearne algebre.

Vidimo, da so pravila računanja s tropskimi matrikami enaka tistim iz linearne algebre. Ista pravila veljajo tudi za matrike nad razširjenim tropskim polkolobarjem $\mathbb{T}$.

3.1 Tropska determinanta

Definirajmo determinanto tropske matrike in spoznajmo metodo za računanje le-te. Najprej pa se spomnimo kaj je permutacija. Permutacija je bijektivna preslikava $\sigma : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}$. Množico vseh permutacij n elementov označimo s S_n. Pri definiciji determinante iz realne linearne algebre smo potrebovali še predznak permutacije, ki nam pove ali je permutacija soda ali liha. Predznak permutacije nam pove ali naj pripadajoče elemente v matriki seštejemo ali odštejemo. Predznaka v tropski algebri sicer ne bomo potrebovali, saj smo že omenili, da operacija odštevanja tukaj ne obstaja. Kljub temu je definicija tropske determinante podobna definiciji determinante iz realne linearne algebre:

$$\det A = |A| = \bigoplus_{\sigma \in S_n} (a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}),$$

kjer je S_n množica vseh permutacij na {1,...,n}.

Opazimo, da lahko det A izračunamo tudi kot vsoto členov po sodih permutacijah in po lihih permutacijah, medtem ko se lihe permutacijev realni algebri odštejejo.

$$|A| = \bigoplus_{\sigma \in A_n} (a_{1\sigma(1)} ... a_{n\sigma(n)}) \oplus \bigoplus_{\sigma \in S_n \setminus A_n} (a_{1\sigma(1)} ... a_{n\sigma(n)}).$$

Ekvivalentno lahko tropsko determinanto izračunamo s pomočjo minorjev ali z razvojem determinante. Minor je poddeterminanta determinante, ki jo dobimo tako, da izpustimo enako število vrstic in stolpcev. Označimo ga z A_{ij}, kjer izpustimo i-to vrstico in j-ti stolpec. Determinanta A je potem enaka

$$|A| = \bigoplus_{j} a_{ij} |A_{ij}|,$$

za vsak fiksni i.

Tropska determinanta matrike A je lahko drugačna od determinante matrike A nad razširjenim tropskim polkolobarjem. Osredotočimo se na izračun determinante z določanjem permutacij in si poglejmo naslednji primer:

Primer 3.1 *Izračunajmo determinanto matrike nad tropskim in razširjenim tropskim polkolobarjem.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 6 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Vse permutacije treh elementov:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vsaka permutacija določi element v vsaki vrstici. Te elemente zmnožimo in tako dobimo vmesne rezultate:

1. *permutacija:* $1 \odot 0 \odot 3 = 4$
2. *permutacija:* $1 \odot 6 \odot 1 = 8$
3. *permutacija:* $4 \odot 1 \odot 3 = 8$
4. *permutacija:* $4 \odot 6 \odot -4 = 6$
5. *permutacija:* $-1 \odot 1 \odot 1 = 1$
6. *permutacija:* $-1 \odot 0 \odot -4 = -5$

Na koncu vmesne rezultate seštejemo: $4 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 6 \oplus 1 \oplus -5$. *V idempotentnem tropskem polkolobarju je* $|A| = 8$*, medtem ko je v razširjenem tropskem polkolobarju* $|A| = 8^\nu$.

Primerjamo determinanto iz linearne algebre in tropske algebre. Opazimo lahko naslednje lastnosti tropskih determinant.

Trditev 3.2 1. *Determinanti matrike in njene transponiranke sta enaki.*

$$|A| = |A^T|.$$

Dokaz.

$$\begin{aligned} |A| &= \bigoplus_{\sigma \in S_n} (a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)}) \\ &= \bigoplus_{\tau \in S_n} (a_{\tau(1)1} \ldots a_{\tau(n)n}) \\ &= |A^T| \end{aligned}$$

□

2. *Če vrstico ali stolpec v matriki pomnožimo s skalarjem* $\alpha \in \mathbb{R}$*, se determinanta pomnoži s skalarjem* α.

Dokaz.

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha a_{i1} & \cdots & \alpha a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \bigoplus_{\sigma\in S_n}(a_{1\sigma(1)}...\alpha a_{i\sigma(i)}...a_{n\sigma(n)})$$
$$= \alpha|A|$$

Zgornji dokaz velja za množenje vrstice s skalarjem. Podobno lahko dokažemo za množenje stolpca, pomagamo pa si z 1. tako da uporabimo, A^T. □

3. *Če v matriki zamenjamo dve vrstici ali dva stolpca, se njena determinanta ne spremeni.*

Dokaz.

$$\begin{aligned} |A| &= \bigoplus_{\sigma\in S_n}(a_{1\sigma(1)}...a_{i\sigma(i)}...a_{j\sigma(j)}...a_{n\sigma(n)}) \\ &= \bigoplus_{\sigma\in S_n}(a_{1\sigma(1)}...a_{j\sigma(j)}...a_{i\sigma(i)}...a_{n\sigma(n)}) \\ &= |A| \end{aligned}$$

Zamenjamo lahko zaradi komutativnosti množenja na $\overline{\mathbb{R}}$. *Enak dokaz velja za zamenjavo stolpcev, s tem da matriko* A *najprej transponiramo po točki 1.* □

1. in 2. točka iz trditve 3.2 veljata tudi za determinante iz realne linearne algebre, medtem ko 3. točka velja le za determinante iz tropske algebre. Spomnimo se, da če matriki iz realne algebre zamenjamo dve vrstici ali dva stolpca, se njena determinanta pomnoži z (-1).

S pomočjo determinante lahko določimo rang matrike nad tropskim in razširjenim tropskim polkolobarjem. Ker pa vemo, da rang matrike lahko določimo tudi z določanjem odvisnosti vrstic ali stolpcev, definirajmo še tropsko odvisnost.

3.2 Tropska odvisnost vektorjev in tropska singularnost matrike

Pri linearni algebri smo se naučili, da lahko rang matrike lažje in hitreje določimo, če najdemo neko odvisnost med vrsticami oziroma stolpci matrike. Zato poskusimo ugotoviti kaj pomeni tropska odvisnost v tropski matriki in kako jo določimo.

Definicija 3.3 *Vektorji $v_1, ...v_m$ nad $\overline{\mathbb{R}}$ so tropsko odvisni natanko tedaj, ko obstaja množica $U \subseteq \{1, ..., m\}$ in velja*

$$\bigoplus_{i \in U} \alpha_i v_i = \bigoplus_{j \in \{1,...,m\} \setminus U} \alpha_j v_j.$$

$\alpha_1, ..., \alpha_m$ ne smejo biti vsi enaki $-\infty$. Sicer so tropsko neodvisni.

Primer 3.4 *Naj bodo $v_1 = (0, 1)^T$, $v_2 = (1, 2)^T$ in $v_3 = (2, 0)^T$ vektorji nad tropskim polkolobarjem. Poiščimo tropsko odvisne vektorje.*
Takoj lahko opazimo enakost v_1 in v_2, če

$$1v_1 = 1 \odot (0, 1) = (1, 2) = v_2.$$

Vektorja v_1 in v_2 sta tropsko odvisna. Preverimo še za vektorja v_1 in v_3. Predpostavimo, da sta vektorja tropsko odvisna. Veljati mora naslednje:

$$\alpha_1(0, 1) = \alpha_3(2, 0).$$

Zmnožimo po komponentah in dobimo:

$$(\alpha_1, \alpha_1 + 1) = (\alpha_2 + 2, \alpha_2).$$

Rešitev dobimo, če rešimo sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama:

$$\alpha_1 = \alpha_2 + 2$$

$$\alpha_1 + 1 = \alpha_2$$

Sistem enačb lahko rešimo tako, da v drugo enačbo za α_1 *vstavimo kar prvo enačbo in tako dobimo:*

$$\alpha_2 + 3 = \alpha_2.$$

Rešitev je mogoča samo za $\alpha_2 = -\infty$. *Vstavimo še v prvo enačbo in tako tudi* $\alpha_1 = -\infty$. *Ker sta* α_1 *in* α_2 *enaki* $-\infty$, *sta vektorja* v_1 *in* v_3 *tropsko neodvisna.*

Definicija 3.5 *Vektorji* $v_1, ...v_m$ *nad* $\overline{\mathbb{R}}^\nu$ *so tropsko odvisni, če obstajajo takšni*

$$\alpha_1, ..., \alpha_m \in \overline{\mathbb{R}},$$

da velja

$$\alpha_1 v_1 \oplus ... \oplus \alpha_m v_m \in \overline{\mathbb{R}}^\nu$$

in $\alpha_1, ..., \alpha_m$ *niso vsi* $-\infty$. *Če vektorji niso tropsko odvisni so tropsko neodvisni.*

Opomba 3.6 *Vektor, ki ima vse vrednosti v* $\overline{\mathbb{R}}^\nu$, *vedno leži v tropsko odvisni množici.*

Definicijo preiskusimo na primeru in poiščimo tropsko odvisnost.

Primer 3.7 *Naj bodo* $v_1 = (0,1)^T$, $v_2 = (1,2)^T$, $v_3 = (2,0)^T$, $v_4 = (2^\nu, 0^\nu)^T$ *vektorji v razširjenem tropskem polkolobarju. Preverimo tropsko odvisnost. Poglejmo najprej vektorja* v_1 *in* v_2. *Takoj opazimo, da če vsaki komponenti vektorja* v_1 *prištejemo 1, dobimo* v_2. *Torej lahko zapišemo*

$$\begin{aligned} 1v_1 \oplus v_2 &= 1 \odot (0,1) \oplus (1,2) \\ &= (1,2) \oplus (1,2) \\ &= (1,2)^\nu \in \overline{\mathbb{R}}^\nu \end{aligned}$$

in sta tropsko odvisna. Vektorja v_1 *in* v_3 *sta tropsko neodvisna, saj ne obstajata taki števili* α_1 *in* α_3, *da je*

$$\alpha_1 v_1 \oplus \alpha_3 v_3 \in \overline{\mathbb{R}}^\nu.$$

Preveriti moramo, da nobena kombinacija $\alpha_1 v_1 \oplus \alpha_2 v_2$ *ni element* $\overline{\mathbb{R}}^{\nu}$ *za nobena* $\alpha_1, \alpha_2 \in \overline{\mathbb{R}}$. *Denimo, da to velja za neka* α_1 *in* α_2. *Potem mora biti vektor*

$$(\alpha_1 \oplus (\alpha_2 + 2), (\alpha_1 + 1) \oplus \alpha_2) \in \overline{\mathbb{R}}^{\nu}.$$

Ker sta α_1, $\alpha_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, *mora biti*

$$\alpha_1 = \alpha_2 + 2$$

in

$$\alpha_1 + 1 = \alpha_2.$$

Sistem lahko rešimo le, če sta $\alpha_1 = \alpha_2 = -\infty$.

Nazadnje si poglejmo še prvi in četrti vektor. Vektorja v_1 *in* v_4 *sta tropsko odvisna, kar lahko preverimo tako*

$$\begin{aligned} (-\infty)v_1 \oplus v_2 &= (-\infty) \odot (0,1) \oplus (2^{\nu}, 0^{\nu}) \\ &= (2^{\nu}, 0^{\nu}) \in \overline{\mathbb{R}}^{\nu}. \end{aligned}$$

Definirajmo še tropsko singularnost matrike A.

Definicija 3.8 *Matrika* $A \in M_n(\mathbb{T})$ *je tropsko singularna, če je* $|A| \in \overline{\mathbb{R}}^{\nu}$. *Drugače je* A *tropsko regularna.*

Sedaj pa povežimo tropsko odvisnost vektorjev s tropsko singularnostjo matrike. Singularnost matrike A v realni linearni algebri pomeni, da je determinanta A enaka 0. Determinanta matrike A je 0 natanko tedaj, ko so vse vrstice oziroma stolpci med seboj odvisni. Rang take matrike je takrat enak 1. Ali lahko to isto lastnost posplošimo tudi v tropski algebri? Poglejmo si na primeru.

Primer 3.9 *Naj bo dana tropska matrika*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Takoj opazimo, da so vrstice matrike med seboj tropsko odvisne, saj

$$2v_1 \oplus 1v_2 \oplus v_3 = (3,4,5) \oplus (3,4,5) \oplus (3,4,5) \in \overline{\mathbb{R}}^{\nu}.$$

Izračunajmo še njeno determinanto.

Sode permutacije. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

Lihe permutacije. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

Pri linearni algebri bi determinanto izračunali tako, da bi sešteli skupaj vse sode permutacije in nato odšteli seštevek lihih permutacij. V tropski algebri tega ne moremo storiti, saj vemo, da odštevanje tu ne obstaja. Poglejmo kaj dobimo, ko izračunamo produkte elementov, pripadajoče posameznim permutacijam in jih združimo glede na sodost in lihost permutacije:

$$|A| = (9 \oplus 9 \oplus 9) \oplus (9 \oplus 9 \oplus 9) = 9^{\nu}.$$

Opazimo, da je v primeru 3.9 vrednost sodih permutacij enaka vrednosti lihih permutacij. Če ne bi bili v tropski algebri in bi lahko odštevali, bi se sode in lihe permutacije med sabo odštele in determinanta bi bila enaka 0, kar pa bi pomenilo singularnost matrike.

V nadaljevanju bomo dokazali naslednji izrek, ki povezuje tropsko singularnost in tropsko odvisnost.

Izrek 3.10 *Vrstice $n \times n$ matrike A so tropsko odvisne, natanko tedaj ko je A tropsko singularna.*

V želji, da izrek tudi dokažemo, moramo definirati še nekaj pojmov in pomožnih lem. Najprej bomo tropsko matriko predstavili z uteženim usmerjenim grafom $G = G_A$ $n \times n$ matrike $A = [a_{ij}]$. Utežen usmerjen graf je definiran z množico vozlišč $V = \{v_1, ..., v_n\}$, povezav $E = \{e_{(i,j)|i,j}\}$, ki povezuje dve vozlišči s težo a_{ij}, ki pa ni enaka $-\infty$. S pomočjo teže povezav lahko izračunamo težo poti P, ki je kar vsota tež povezav, ki jih pot P zajema.

Z $d_{out}(v)$ vozlišča v označimo število vseh povezav, ki izhajajo iz vozlišča v in z $d_{in}(v)$ pa število povezav, ki se stekajo v v. Poti, kjer je $d_{out}(v) = d_{in}(v) = 1$ za vsako vozlišče v poti, rečemo *enostaven cikel*. Enostaven cikel dolžine 1 je zanka. S *k-multiciklom* C v usmerjenem grafu definiramo unijo disjunktnih enostavnih ciklov, kjer je vsota njihovih dolžin enaka k. Permutacijo σ zapišimo kot produkt $\mu_1...\mu_t$ disjunktnih cikličnih permutacij, kjer vsaka permutacija σ ustreza n-multiciklu iz G_A. Največja teža poti v grafu je enaka največji vrednosti danih permutacij, kar pa vemo, da je determinanta matrike A.

Vsako vozlišče v usmerjenem grafu ima zanko in zato lahko zapišemo:

Opomba 3.11 *Dan je graf G, kjer je $d_{in}(v) \geq 1$ oziroma $d_{out}(v) \geq 1$, za vsako vozlišče $v \in V$. Potem se vsako vozlišče iz grafa G nahaja v enostavnem ciklu.*

Vpeljimo oznako $A \preceq 0^\nu$, ki označuje take tropske matrike, kjer je za vsak element a_{ij} matrike A velja $a_{ij} \preceq 0^\nu$. Predpostavimo še, da $|A| \neq -\infty$. Lahko zapišemo sledečo lemo:

Lema 3.12 *Če vsak stolpec (oziroma vrstica) $n \times n$ matrike $A \preceq 0^\nu$ vsebuje element enak 0^ν ali dva elementa, ki sta enaka 0, potem je matrika A singularna.*

Dokaz. Izberemo si neko permutacijo, kjer je dosežena determinanta. Brez škode za splošnost si lahko izberemo identično permutacijo in predpostavimo da ne vsebuje elementov 0 ali 0^ν. Z G'_A označimo zmanjšan graf matrike A, ki ga dobimo tako, da grafu G_A odstranimo vse povezave s težo $\prec 0$. Za tak graf G'_A vemo, da nima zank in da je za vsako vozlišče

$v_i \in V$, $d_{out} \geq 1$. Po grafu G'_A se sprehajamo po povezavah s težo 0 in tako iščemo novo permutacijo, ki bo k determinanti prispevala sumand 0. Ampak graf G'_A ima po opombi 3.11 enostaven cikel $C = (v_{i_1,i_2}, ..., v_{i_{k-1},i_k}, v_{i_k,i_1})$ s težo 0 ali 0^ν in cikel na njih nam skupaj z zankami določajo novo permutacijo, ki pa ima v matriki same 0. Člen determinante je na teh mestih zato enak 0. To pa je v nasprotju z največjo vrednostjo determinante A dokler $w(v_{i_1,i_2}, ..., v_{i_{k-1},i_k}, v_{i_k,i_1}) \succ w(v_{i_1,i_1}, ..., v_{i_k,i_k})$. □

Tako smo pripravili vse za dokaz naslednjega izreka.

Izrek 3.13 *Če je A $n \times n$ tropska matrika katere vrstice so tropsko odvisne, potem je A tropsko singularna.*

Dokaz. Z r_i označimo i-to vrstico matrike A. Vrstice so tropsko odvisne, če za take vrednosti $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \overline{\mathbb{R}}$, ne vse enake $-\infty$, velja $\alpha_1 r_1 \oplus ... \oplus \alpha_n r_n \in \overline{R}^\nu$.

Določimo $\alpha_n = -\infty$. Tako nam ostane prvih $(n-1)$ vrstic, ki so tropsko odvisne. Z indukcijo navzdol lahko pokažemo, da je vsaka poddetereminanta $A_{n,j}$ singularna.

Sedaj upoštevajmo, da so vsi $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Vsako vrstico r_i matrike A pomnožimo z α_i in tako dobimo $\bigoplus_i r_i \in \overline{\mathbb{R}}^\nu$. Z β_i označimo maksimalno vrednost za vsak stolpec j. Če $\beta_i = b_i^\nu$, namesto β_i raje vzamemo b_i. Če je $\beta_j = -\infty$ za nek j, ga zamenjamo s poljubnim realnim številom. Matrika A' je torej pridobljena tako, da vsak stolpec j matrike A z β_j zadošča pogojem iz leme 3.12. Ker te operacije ne vplivajo na singularnost, je A singularna. □

Dokaz izreka 3.10 bo sledil iz izreka 3.13 in leme 3.14.

Lema 3.14 *Vrstice vsake singularne $n \times n$ matrike so tropsko odvisne. Ko je $|A| \neq -\infty$, so koeficienti odvisnosti α_i definirani kot $\alpha_i = \pi(|A_{ij}|)$, za nek fiksen $j \in 1, ..., n$, kjer je π predpis, ki*

$$\pi : (\Pi, \oplus, \odot) \to (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, max, +)$$

in za katerega velja $\pi : a^\nu \mapsto a$, $\pi : a \mapsto a$ *in* $\pi : -\infty \mapsto -\infty$.

Preden dokažemo lemo, definirajmo še:

Definicija 3.15 *Množica vrstic* $r_1, ..., r_m$ *ima napako ranga* k*, če obstaja* k *stolpcev* $c_{j_1}, ..., c_{j_k}$*, da je* $a_{ij_u} = -\infty$*, za vse* $1 \leq k \leq n$ *in* $1 \leq u \leq k$.

Izberimo si matriko in določimo napako ranga.

Primer 3.16

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -\infty & 2 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & 2 \\ 1 & -\infty & -\infty & -\infty \end{bmatrix}$$

Opazimo, da ima le drugi stolpec vse elemente enake $-\infty$*, zato je napaka ranga enak 1.*

Trditev 3.17 *Dana je* $n \times n$ *matrika* A. $|A| = -\infty$ *natanko tedaj, ko ima za nek* $1 \leq k \leq n$*, matrika* A k *vrstic z napako ranga* $n + 1 - k$.

S pomočjo napake ranga, dokažimo lemo 3.14.

Dokaz. [Lema 3.14] Naj velja naslednja hipoteza

$$(|A|)^\nu = (a_{11}...a_{nn})^\nu,$$

na katero ne vpliva množenje vrstic ali stolpcev z danim realnim številom α. V nadaljevanju se osredotičimo na vrstice, ki jih označimo z $r_1, ..., r_n$ dane matrike A. Za popoln dokaz leme bi morali upoštevati matrike, katere determinanta $|A| \neq -\infty$ in matrike z determinanto $|A| = -\infty$. Zaradi obsežnosti dokaza, se osredotočimo le na matrike z $|A| = -\infty$.
Determinanta matrike A je lahko enaka $-\infty$ le v primeru, ko so vsi koeficienti odvisnosti v prvem stolpcu matrike A, $\alpha_i = |A_{i1}|$, enaki $-\infty$. Poiščemo največjo $m \times m$ podmatriko A', ki ima detrminanto različno od $-\infty$ in največjo ν-vrednost. Z indukcijsko predpostavko privzamemo, da je $m =$

$n-1$, saj za n že vemo, da je $|A| = -\infty$. Poleg tega, je dovolj najti odvisnost med k vrsticami. Po predlogu 3.17 in z indukcijo, ugotovimo, da je $k = n$. Vsi vpisi v prvem stolpcu so zato $-\infty$.
Lema je v celoti dokazana v [4]. □

Izrek 3.10 sedaj sledi iz izreka 3.13 in leme 3.14.

S pomočjo tropske determinante in tropske odvisnosti lahko določimo rang tropske matrike.

Poglavje 4

Rangi tropskih matrik

V literaturi, ki sem jo prebrala, sem zasledila veliko različnih, med seboj ekvivalentnih, definicij rangov in jih lahko poiščemo v [1], [2], [3] in [6]. Posebnost tropskega sveta pa je ravno v tem, da nam različne definicije rangov, ki v realnem svetu sovpadajo, lahko predstavijo različne rezultate. Torej med sabo niso več ekvivalentne. V nadaljevanju je predstavljena vsota dveh različnih matrik, enkrat obravnavana v tropskem, drugič v razširjenem tropskem polkolobarju. Želim pokazati, da se rezultati v tropskem polkolobarju razlikujejo od rezultatov v razširjenem tropskem polkolobarju. Najprej pa še nekaj definicij.

V prejšnjem poglavju smo definirali tropsko determinanto, tropsko odvisnost in singularnost. Te definicije bomo pridno uporabili pri računanju tropskega ranga. Tropski rang bomo definirali na tri različne načine, predstavljeni pa so spodaj.

4.1 Tropski rang

Osredotočimo se najprej samo na tropski polkolobar. Najprej bomo za izračun ranga tropske matrike A uporabili njeno determinanto. Zopet lahko izhajamo iz linearne algebre: rang matrike A je velikost največje podmatrike

matrike A z neničelno determinanto. Podobno lahko zapišemo tudi definicijo tropskega ranga.

Definicija 4.1 *Tropski rang matrike $A \in \overline{\mathbb{R}}^{n \times m}$ je enak največjemu takemu številu r, da ima matrika A tropsko regularno $r \times r$ podmatriko.*

Primer 4.2 *Izberimo si neko neničelno matriko A in izračunajmo realni in tropski rang te matrike.*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Vrstici matrike sta nad $\mathbb{R}$ neodvisni in zato mora biti determinanta matrike A različna od 0.

$$|A| = 18 - 20 = -2$$

Rang matrike A je zato enak 2.
Na drugi strani, pa opazujemo to isto matriko A nad $\overline{\mathbb{R}}$. Opazimo, da je matrika A tropsko singularna, saj je vrednost sodih permutacij enaka vrednosti lihih permutacij:

$$3 \odot 6 = 9 = 5 \odot 4.$$

Preveriti moramo še morebitno singularnost podmatrike matrike A. Podmatrika je regularna, zato je število r, ki ga iščemo enak 1.

Rang matrike lahko določimo tudi s pomočjo ugotavljanja odvisnosti vrstic oziroma stolpcev. Za matriko A definirajmo še vrstični rang $rk_R(A)$ in stolpični rang $rk_C(A)$.

Definicija 4.3 *Vrstični rang matrike A je maksimalno število tropsko neodvisnih vrstic te matrike.*

Definicija 4.4 *Stolpični rang matrike A je maksimalno število tropsko neodvisnih stolpcev te matrike.*

Primer 4.5 *Zopet si oglejmo zgornjo matriko iz primera 4.2 in izračunajmo vrstični in stolpični rang.*
Opazimo, da sta vrstici tropsko odvisni in velja

$$1 \odot (3,5) = (4,6).$$

Ker ni tropsko odvisnih vrstic in $rk_R(A) = 1$.
Enako velja za stolpce. Tudi stolpca sta tropsko odvisna, tako da lahko zapišemo

$$2 \odot (3,4) = (5,6)$$

in $rk_C(A) = 1$.

Ker pa vemo, da se lahko vrstični in stolpični rang razlikujeta, poiščimo še tak primer matrike, s katero se o tem lahko prepričamo.

Primer 4.6 *Naj bo dana matrika*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\infty & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\infty & -\infty \\ -\infty & 0 & 0 & -\infty \end{bmatrix}$$

Določimo range matrike.
Tropski rang $rk_D = 3$, *saj lahko najdemo* 3×3 *regularno podmatriko, kot je na primer*

$$\det \begin{bmatrix} 0 & -\infty & 0 \\ 0 & 0 & -\infty \\ -\infty & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vrstični rang rk_R *določimo tako, da preverimo morebitno odvisnost vrstic.*
Za trojico vektorjev moramo poiskati take konstante α, β *in* γ, *da bo veljala vsaj ena od enakosti:*

$$\alpha \odot (0,-\infty,0,0) \oplus \beta \odot (0,0,-\infty,-\infty) = \gamma \odot (-\infty,0,0,-\infty),$$

$$\alpha \odot (0,-\infty,0,0) \oplus \gamma \odot (-\infty,0,0,-\infty) = \beta \odot (0,0,-\infty,-\infty),$$

in

$$\beta \odot (0,0,-\infty,-\infty) \oplus \gamma \odot (-\infty,0,0,-\infty) = \alpha \odot (0,-\infty,0,0)$$

Ugotovimo, da v vsakem od sistemov enakosti veljajo le, ko $\alpha = \beta = \gamma = -\infty$. *Vrstice so neodvisne in vrstični rang* $rk_R = 3$.

Stolpični rang določimo podobno, le da ugotavljamo odvisnost stolpcev. Za konstante α, β, γ *in* δ, *mora veljati vsaj ena od enakosti:*

$$\alpha \odot (0,0,-\infty) \oplus \beta \odot (-\infty,0,0) \oplus \gamma \odot (0,-\infty,0) = \delta \odot (0,-\infty,-\infty),$$

$$\alpha \odot (0,0,-\infty) \oplus \beta \odot (-\infty,0,0) \oplus \delta \odot (0,-\infty,-\infty) = \gamma \odot (0,-\infty,0),$$

$$\alpha \odot (0,0,-\infty) \oplus \gamma \odot (0,-\infty,0) \oplus \delta \odot (0,-\infty,-\infty) = \beta \odot (-\infty,0,0),$$

$$\beta \odot (-\infty,0,0) \oplus \gamma \odot (0,-\infty,0) \oplus \delta \odot (0,-\infty,-\infty) = \alpha \odot (0,0,-\infty),$$

$$\alpha \odot (0,0,-\infty) \oplus \beta \odot (-\infty,0,0) = \gamma \odot (0,-\infty,0) \oplus \delta \odot (0,-\infty,-\infty),$$

$$\alpha \odot (0,0,-\infty) \oplus \gamma \odot (0,-\infty,0) = \beta \odot (-\infty,0,0) \oplus \delta \odot (0,-\infty,-\infty),$$

$$\alpha \odot (0,0,-\infty) \oplus \delta \odot (0,-\infty,-\infty) = \beta \odot (-\infty,0,0) \oplus \gamma \odot (0,-\infty,0).$$

Zopet rešimo vse sisteme treh enačb s štirimi neznankami in ugotovimo, da so vsi sistemi rešljiv, če velja $\alpha = \beta = \gamma = \delta = -\infty$. *Stolpci so neodvisni in zato je stolpični rang* $rk_C = 4$.

4.2 Razširjeni tropski rang

Definicije zgoraj opisanih rangov so enake tudi v razširjenem tropskem prostoru. Drugačno je le preverjanje tropske singularnosti, saj je matrika A singularna, če

$$|A| \in \overline{\mathbb{R}}^{\nu}$$

in tropske odvisnosti, kjer mora biti rezultat

$$\alpha_1 v_1 \oplus ... \oplus \alpha_m v_m \in \overline{\mathbb{R}}^{\nu}.$$

Posebnost, ki jo najdemo v razširjenem tropskem polkolobarju in je ni v tropskem polkolobarju, je naslednji izrek:

Izrek 4.7 *Tropski rang je vedno enak vrstičnemu rangu in ta je vedno enak stolpičnemu rangu. ([4], Theorem 3.4)*

Prav tako razširjeni tropski rang iz primera 4.2 predstavi enake rezultate, zato se raje posvetimo primeru, s katerim bomo ilustrirali zgornji izrek.

4.3 Primerjava tropskega in razširjenega tropskega ranga

Izberimo si neko matriko A, za katero bomo določili tropski, vrstični in stolpični rang nad tropskim in razširjenim tropskim polkolobarjem.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Najprej določimo vse tri range za matriko A nad tropskim polkolobarjem. Zaradi idempotentnosti tropskega polkolobarja velja

$$A \oplus A = A.$$

1. Tropski rang: S pomočjo sodih in lihih permutacij bomo določali singularnost podmatrik. Matrika A je singularna, saj je vrednost sodih permutacij enaka vrednosti lihih permutacij $(6 \oplus 4 \oplus 3)$. Nato moramo preveriti vseh devet 2×2 poddeterminant in se prepričati o singularnosti vseh. Takoj lahko opazimo regularnost podmatrike (spodaj desno)

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

   Zato je tropski rang matrike A (rk_D) enak 2.

2. Vrstični rang: Poiskati moramo take konstante α, β in γ, da

$$\alpha \odot (0,1,2) \oplus \beta \odot (0,1,3) = \gamma \odot (0,1,5),$$

$$\alpha \odot (0,1,2) \oplus \gamma \odot (0,1,5) = \beta \odot (0,1,3)$$

in

$$\beta \odot (0,1,3) \oplus \gamma \odot (0,1,5) = \alpha \odot (0,1,2).$$

Vse tri sistem enačb lahko rešimo le, če $\alpha = \beta = \gamma = -\infty$. Vrstice so neodvisne in vrstični rang (rk_R) je zato enak 3.

3. Stolpični rang: Poiskati moramo konstante α, β in γ, da bo veljala vsaj ena od enakosti:

$$\alpha \odot (0,0,0) \oplus \beta \odot (1,1,1) = \gamma \odot (2,3,5),$$

$$\alpha \odot (0,0,0) \oplus \gamma \odot (2,3,5) = \beta \odot (1,1,1),$$

in

$$\beta \odot (1,1,1) \oplus \gamma \odot (2,3,5) = \alpha \odot (0,0,0).$$

Druga enakost bo veljala, če je $\alpha = 5$, $\beta = 4$ in $\gamma = 0$. Stolpci so tropsko odvisni, zato je $rk_C < 3$.
Preverimo še za pare vektorjev. Poiskati moramo konstante α, β in γ, da bo veljala vsaj ena od enakosti:

$$\alpha \odot (0,0,0) = \beta \odot (1,1,1),$$

$$\alpha \odot (0,0,0) = \gamma \odot (2,3,5)$$

in

$$\beta \odot (1,1,1) = \gamma \odot (2,3,5).$$

Za $\alpha = 1$ in $\beta = 0$ velja prva enakost in stolpca sta odvisna. Tako ostanejo samo še posamezni vektorji, ki pa so neodvisni in zato je $rk_C = 1$.

Poglejmo si še rezultate, ki jih dobimo za matriko $A \oplus A$ nad razširjenim tropskim polkolobarjem.

$$A \oplus A = \begin{bmatrix} 0^\nu & 1^\nu & 2^\nu \\ 0^\nu & 1^\nu & 3^\nu \\ 0^\nu & 1^\nu & 5^\nu \end{bmatrix}$$

1. Tropski rang: Ker so vsi elementi matrike $A \oplus A$ iz $\overline{\mathbb{R}}^\nu$, lahko takoj opazimo, da so vse poddeterminante prav tako iz $\overline{\mathbb{R}}^\nu$ in so zato vse podmatrike singularne. Tropski rang je potem $rk_D = 0$.

2. Vrstični rang: Preverjamo tropsko odvisnost vrstic. Iščemo konstante α, β in γ, da bo:

   $$\alpha \odot (0^\nu, 1^\nu, 2^\nu) \oplus \beta \odot (0^\nu, 1^\nu, 3^\nu) \oplus \gamma \odot (0^\nu, 1^\nu, 5^\nu) \in \overline{\mathbb{R}}^\nu.$$

   To je vedno res, saj so že vsi elementi matrike A iz $\overline{\mathbb{R}}^\nu$ in zato so vrstice tropsko odvisne. Vrstični rang rk_R je zato enak 0.

3. Stolpični rang: Preverimo še tropsko odvisnost stolpcev. Zaradi enakih razlogov kot pri vrstičnem rangu, lahko zapišemo, da so stolpci tropsko odvisni in zato je stolpični rang rk_C enak 0.

Poglavje 5

Zaključek

V matematičnem svetu so polkolobarji vse okoli nas. Pravzaprav je matematična struktura, množica naravnih števil, s katero se srečujemo vsak dan, polkolobar. Zato ni nič čudnega, da je veliko literature posvečene raziskavi polkolobarjev.

Tropska matematika poteka nad tropskim polkolobarjem $(\mathbb{R}\cup\{-\infty\}, \max, +)$, s spremenjenima operacijama seštevanja in množenja. Pri tropskem seštevanju vzamemo maksimalni element, pri tropskem množenju pa števila enostavno seštejemo. Pravzaprav je tako računanje lažje in hitrejše, in je bolj uporabna pri optimizaciji. Takoj pa se pojavi vprašanje; ali se zaradi drugačnega načina računanja, spremenijo osnovne lastnosti seštevanja in množenja? Pokazali smo, da lastnosti, kot so komutativnost, asociativnost in distributivnost, še vedno veljajo, tako v tropskem kot tudi v razširjenem tropskem polkolobarju. Razširjeni tropski polkolobar, vsebuje dve kopiji realnih števil $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^{\nu}$ in zlepljeni skupaj tvorita novo množico $\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \mathbb{R}^{\nu}$.
Tudi računanje z matrikami nam ne prestavlja težav. Postopek seštevanja kot tudi množenja tropskih matrik je popolnoma enak kot pri linearni algebri, seveda z redefiniranima operacijama seštevanja $\oplus$ in množenja $\odot$. Ker pa v tropski matematiki ne obstaja operacija odštevanja, problem nastopi pri izračunu determinante. Definicija tropske determinante se ujema z de-

finicijo permanente iz linearne algebre, vendar pa je tropska determinanta lahko povsem drugačna kot determinanta v linearni algebri. Pravzaprav se lahko determinanti razlikujeta že v tropskem in razširjenem tropskem polkolobarju.

Kot nam je že poznano iz linearne algebre, lahko s pomočjo determinante določimo rang matrike. To lahko storimo tako v tropskem, kot tudi v razširjenem tropskem polkolobarju. Rang matrike lahko določimo tudi tako, da opazujemo odvisnost vrstic ali stolpcev matrike. Ker pa so osnovne računske operacije definirane drugače, moramo paziti, kdaj so si vrstice oziroma stolpci odvisni.

Iz linearne algebre vemo, da ne glede na katerega izmed zgornjih načinov, s katerim lahko določimo rang matrike, je ta vedno isti. Zanimivo pa je, da za range matrik nad tropskim polkolobarjem to ni nujno res. Prav hitro lahko najdemo matriko, katere je rang, ki ga izračunamo s pomočjo determinante, lahko drugačen kot vrstični oziroma stolpični rang. Ker nas to lahko zavede, bi se temu radu izognili. Zato tropski polkolobar ustrezno razširimo na razširjeni tropski polkolobar, kjer se lastnosti determinant matrik bolj približajo lastnostim realnih matrik.

Literatura

[1] L. B. Beasley, A. E. Guterman, "Rank Inequalities over Semirings" *J. Korean Math Society*, št. 2, str. 223-241, 2005.

[2] M. S. Borman, "The Ranks of a Tropical Matrix", *A Thesis Presented to The Division of Mathematics and Natural Sciences Reed College* (2007). Dostopno na: http://people.reed.edu/ davidp/homepage/students/borman.pdf.

[3] M. Develin, F. Santos, B. Sturmfels, "On the Rank of a Tropical Matrix", *Combinatorial and Computational Geometry, Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, Cambridge Univ., 52, str. 213-242, 2005.

[4] Z. Izhakian, L. Rowen, "The Tropical Rank of a Tropical Matrix", *Communications in Algebra*, št. 37, zv. 11, str. 3912-3927, 2009.

[5] Z. Izhakian, "Tropical Arithmetic and Tropical Matrix Algebra" (2008). Dostopno na:
arXiv:math/0505458v3.

[6] K. H. Kim, F. W. Roush, "Kapranov Rank vs. Tropical Rank", *Proceedings of the American Mathematical Society*, 134, št. 9, str. 2487-2494, 2006.

[7] D. Speyer, B. Sturmfels, "Tropical Mathematics" (2004). Dostopno na: arXiv:math/0408099v1.