

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA RAČUNALNIŠTVO IN INFORMATIKO
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Marko Černe

Ogrodja prostorskih parametričnih krivulj

DIPLOMSKO DELO
NA INTERDISCIPLINARNEM UNIVERZITETNEM ŠTUDIJU

Mentor: doc. dr. Emil Žagar

Ljubljana, 2013

Rezultati diplomskega dela so intelektualna lastnina avtorja in Fakultete za računalništvo in informatiko Univerze v Ljubljani. Za objavljanje ali izkoriščanje rezultatov diplomskega dela je potrebno pisno soglasje avtorja, Fakultete za računalništvo in informatiko ter mentorja.

Besedilo je oblikovano z urejevalnikom besedil $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$.



Št. naloge: 00043/2012

Datum: 06.11.2012

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za računalništvo in informatiko ter Fakulteta za matematiko in fiziko izdaja naslednjo nalogo:

Kandidat: **MARKO ČERNE**

Naslov: **OGRODJA PROSTORSKIH PARAMETRIČNIH KRIVULJ
FRAMES OF SPATIAL PARAMETRIC CURVES**

Vrsta naloge: Diplomsko delo univerzitetnega študija

Tematika naloge:

V diplomskem delu najprej obravnavajte osnovne pojme diferencialne geometrije prostorskih parametričnih krivulj. Posebej se posvetite ogrodjem. Nato raziščite pogoje, ki zagotavljajo racionalnost ogrodij polinomskih parametričnih krivulj. Izsledke podprite z numeričnimi zgledi.


Mentor:

doc. dr. Emil Žagar



Dekan Fakultete za računalništvo in informatiko:

prof. dr. Nikolaj Zimic


Dekan Fakultete za matematiko in fiziko:

akad. prof. dr. Franc Forstnerič



IZJAVA O AVTORSTVU

diplomskega dela

Spodaj podpisani Marko Černe,
z vpisno številko 63040271,

sem avtor diplomskega dela z naslovom:
Ogrodja prostorskih parametričnih krivulj.

S svojim podpisom zagotavljam, da:

- sem diplomsko delo izdelal samostojno pod mentorstvom doc. dr. Emila Žagarja,
- so elektronska oblika diplomskega dela, naslov (slov., angl.), povzetek (slov., angl.) ter ključne besede (slov., angl.) identični s tiskano obliko diplomskega dela,
- soglašam z javno objavo elektronske oblike diplomskega dela v zbirki "Dela FRI".

V Ljubljani, dne 15.02.2013

Podpis avtorja:

Zahvaljujem se mentorju doc. dr. Emilu Žagarju za strokovne nasvete in vodenje pri izdelavi diplomskega dela.

Hvala družini, še posebej staršem, ki sta mi omogočila študij in verjela vame.

Delo posvečam svoji ljubi Ani.

Kazalo

Seznam uporabljenih kratic in simbolov

Povzetek	1
Abstract	2
1 Uvod	3
2 Osnove diferencialne geometrije krivulj v \mathbb{R}^3	4
2.1 Prostorska krivulja	4
2.2 Lastnosti prostorskih krivulj	6
2.2.1 Dolžina loka	6
2.2.2 Fleksijska ukrivljenost	8
2.2.3 Torzijska ukrivljenost	9
2.2.3.1 Krivulje z dvema ukrivljenostima	9
2.3 Jean Frédéric Frenet	11
3 Frenetovo ogrodje	12
3.1 Pomanjkljivosti Frenetovega ogrodja	16
3.2 Racionalnost Frenetovega ogrodja	16
3.2.1 Prostorske krivulje s pitagorejskim hodografom	17
4 Rotacijsko minimizirajoča ogrodja	18
4.1 Prilagojena ogrodja	19
4.1.1 Eksaktno rotacijsko minimizirajoče ogrodje	19
4.2 Kvaternioni	21
4.2.1 Kvaternioni in prostorske rotacije	22
4.3 Racionalno rotacijsko minimizirajoče ogrodje	23
5 Metoda z dvema zrcaljenjema	24

6 Programiranje Frenetovega ogrodja	27
6.1 Hitrost in pospešek delca	27
6.2 Numerično odvajanje	28
6.3 Implementacija	30
6.3.1 Algoritem za izračun Frenetovega ogrodja	30
6.3.2 Algoritem za izračun rotacijsko minimizirajočega ogrodja	31
7 Sklepne ugotovitve	32
Literatura	33

Seznam uporabljenih kratic in simbolov

- AF** Adapted Frame, slovensko: prilagojeno ogrodje,
- CAD** Computer Aided Design, slovensko: računalniško podprto načrtovanje,
- DPH** Double Pythagorean-hodograph, slovensko: dvojno pitagorejski hodograf,
- FF** Frenet Frame, slovensko: Frenetovo ogrodje,
- PH** Pythagorean-hodograph, slovensko: pitagorejski hodograf,
- RMF** Rotation Minimizing Frame, slovensko: rotacijsko minimizirajoče ogrodje,
- RRMF** Rational Rotation Minimizing Frame, slovensko: racionalno rotacijsko minimizirajoče ogrodje.

Povzetek

V diplomskem delu so opisane prostorske parametrične krivulje in njihove lastnosti. Izmed lastnosti sta izpostavljeni torzijska ter fleksijska ukrivljenost, saj z njima popolnoma opišemo krivuljo do togega premika. Matematično področje, ki preučuje lastnosti krivulj v \mathbb{R}^3 , je v neprestanem razvoju saj veliko aplikacij v kinematiki, robotiki in animacijah zahteva konstrukcijo gladkega gibanja togega telesa v prostoru. Za opis gibanja je potrebno določiti težišče in orientacijo ob določenem času. Težišče je podano s točko na parametrični krivulji. Orientacija pa večinsko ni podana natančno, zato moramo algoritem zasnovati na način, da sam določi naravno različico orientacije na tiru krivulje. Osi togega telesa uravnotežimo z ortonormiranim ogrodjem, ki je definiramo v vsaki točki na krivulji. Danes je v uporabi veliko ogrodij, med katerimi je za preučevanje najprimernejše Frenetovo ogrodje. Sodobni CAD sistemi lahko predstavljajo krivulje samo v racionalni obliki, zato so v delu opisani tudi pogoji, ki zagotavljajo racionalnost ogrodij. V praksi je zaželeno rotacijsko minimizirajoče ogrodje, ki ima minimalno rotacijo. Izsledke sem podprl z implementacijo Frenetovega ogrodja ter rotacijsko minimizirajočega ogrodja. Slednje sem implementiral z uporabo metode z dvema zrcaljenjema, ki na sferičnih krivuljah konstruira eksaktno rotacijsko minimizirajoče ogrodje. Metoda dobro aproksimira tudi ogrodja na ostalih prostorskih krivuljah.

Ključne besede: parametrične prostorske krivulje, ogrodja prostorskih krivulj, metoda z dvema zrcaljenjema, Frenetovo ogrodje, rotacijsko minimizirajoče ogrodje.

Abstract

The diploma thesis describes parametric space curves and their properties. Among them torsion and curvature are of special concern because they entirely define the curve up to translation and rotation. That is why we call them invariant properties. Differential geometry is a mathematical discipline which studies the properties of space curves. Differential geometry is in continuous development since many applications in kinematics, robotics and animations use rational curves while designing a rigid body motion. To achieve the motion we need to specify its position and orientation at a given time. Position is given as a point on the parametrized curve. On the other side the orientation is not given precisely therefore an algorithm needs to be designed to determine a natural variation of orientation. Nowadays, there are various frames in use among which a Frenet frame is the most appropriate for analyzing. Modern computer aided design systems can present a space curve only in rational form. A Frenet frame is not as suitable for practical use as it is a rotation minimizing frame that ensures the frame's minimal rotation. Results are supported by implementations of a Frenet frame and a rational minimizing frame. The latter is produced using double reflection method which yields an exact rotation minimizing frame on spherical curves. Moreover, the method gives fruitful approximation as well for general space curves.

Keywords: parametric space curves, frames on space curves, double reflection method, Frenet frame, rotation minimizing frame.

Poglavje 1

Uvod

Geometrija je znanstvena disciplina matematike, ki preučuje lastnosti togih teles in njihove medsebojne odvisnosti. Zasnovana je na določenih privzetkih, ki jih z osnovnimi zakoni ne moremo dokazati. Že v času pred našim štetjem so ljudstva uporabljala nekaj osnovne geometrije za reševanje problemov geodetske narave.

Okrog leta 300 pred našim štetjem je v geometriji prišlo do pomembne prelomnice, ki jo je povzročil Evklid. Izhajal je iz majhnega števila dejstev (aksiomov), iz katerih je postopoma izpeljal vse bolj zapletene značilnosti.

Diferencialna geometrija krivulj je matematična veja geometrije, ki jo v kombinaciji z diferencialnim računom, integralskim računom ter linearno algebro uporabljamo pri reševanju problemov v geometriji. Njeni začetki segajo v 18. stoletje, ko so znanstveniki preučevali lastnosti krivulj.

Geometrijski pojmi so danes posplošeni na visok nivo abstrakcije. Matematično področje, ki preučuje lastnosti krivulj v prostoru \mathbb{R}^n , je v neprestanem razvoju, saj veliko aplikacij v kinematiki, robotiki in animacijah zahteva konstrukcijo gladkega gibanja togega telesa v prostoru. V diplomskem delu se osredotočam le na del obsežne tematike, ki zajema preučevanje znanih ogrodij prostorskih krivulj, ki določajo gibanje togih teles v prostoru \mathbb{R}^3 .

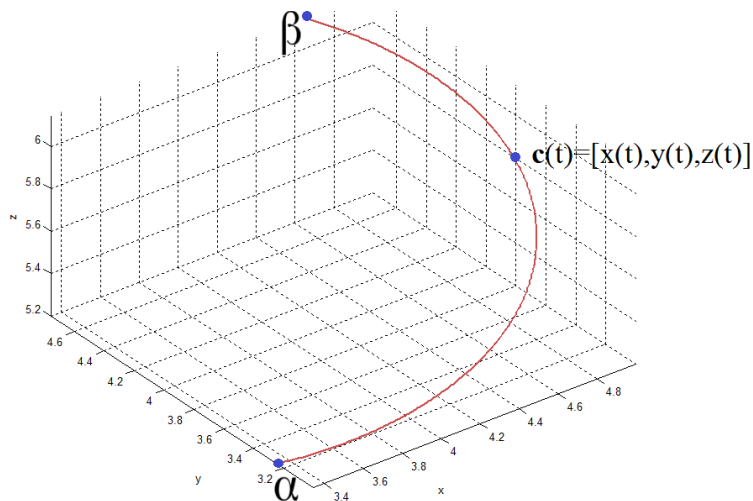
Struktura diplomske naloge je razdeljena na sedem poglavij. V začetku so opisane prostorske krivulje in njihove lastnosti. Nadalje je predstavljena biografija izumitelja Frenet-Serretovih enačb, na katerih je osnovano Frenetovo ogrodje. Tretje poglavje zajema definicijo in opis Frenetovega ogrodja. Slednje je za preučevanje najprimernejše, zato sem ga v sklopu dela tudi implementiral v programskem jeziku Matlab. Četrto poglavje opisuje ogrodje, ki nudi boljše rezultate pri simulaciji gibanja togega telesa v prostoru. Zadnji del pa obsega opis numeričnih metod ter dveh algoritmov, ki sem jih uporabil pri programiranju aplikacije. Naloga se zaključuje s sklepnimi ugotovitvami.

Poglavje 2

Osnove diferencialne geometrije krivulj v \mathbb{R}^3

2.1 Prostorska krivulja

Fizikalno si prostorsko krivuljo \mathbf{c} predstavljamo kot gibanje delca v \mathbb{R}^3 , analitično pa kot preslikavo $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$; $I = [\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$. Pri tem je interval I lahko zaprtega, odprtega ali polodprtega tipa. Pogosto je v 3-dimenzionalnem prostoru krivulja predstavljena kot slika vektorske funkcije z realnim parametrom. Parametrov je lahko tudi več, vendar potem slika ni več krivulja. Zaloga vrednosti krivulje \mathbf{c} je množica vrednosti $\mathbf{c}(t)$.



Slika 2.1: Krivulja $\mathbf{c}(t) = [\cos(t) + 4, \sin(t) + 4, 4 + 0.3t] : [4, \pi + 4] \rightarrow \mathbb{R}^3$.

V praksi pogosto srečujemo ravninske ter prostorske krivulje. Ravninske krivulje so na primer premice, stožnice, lemniskate, spirale, odvojne krivulje, 3., 4., 5., 6. reda, ipd. Definirane so lahko kot množica točk $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | f(x, y) = k\}$, kjer je k konstanta in $x, y \in \mathbb{R}$.

Primeri prostorske krivulje v trirazsežnem evklidskem prostoru so: konhospirala, vijačnica, Seiffertova spirala, Slinkyjeva spirala, Vivianijeva krivulja, ipd. Najenostavnejše krivulje, ki so aplikativno zanimive, so kubične parametrične krivulje $\mathbf{c} : [\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{c}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$, kjer so x , y in z kubični polinomi.

Ista krivulja ima lahko več različnih parametrizacij, saj imata različni krivulji lahko enak tir, npr. $\mathbf{c}_1(t) = (2 \cos(t), 4 \sin^2(t), 2 \sin(t))$ ter $\mathbf{c}_2(t) = (2 \sin(t), 4 \cos^2(t), 2 \cos(t))$. Vsako krivuljo gledamo na drugem intervalu parametra.

Prostorsko krivuljo \mathbf{c} lahko v \mathbb{R}^3 podamo v treh oblikah.

1. *V implicitni obliki:*

- (a) kot presek dveh implicitno podanih površin (slika 2.2),
- (b) kot presek parametrično podane površine ter površine v implicitni obliki,
- (c) kot presek dveh parametrično podanih površin.

2. *V parametrični obliki:*

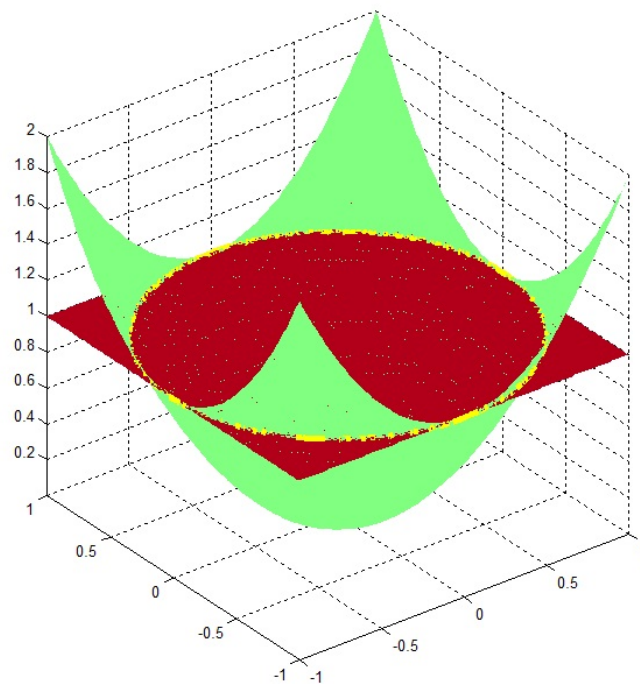
$$x = x(t), y = y(t), z = z(t),$$

(slika 2.1).

3. *V eksplicitni obliki:*

$$x = x, y = f(x), z = g(x),$$

v kateri si krivuljo \mathbf{c} predstavljamo kot poseben primer parametrične in implicitne oblike. Eksplicitno obliko dobimo tako, da za dve spremenljivki rešimo enačbi $f(x, y, z) = 0$ in $g(x, y, z) = 0$ glede na tretjo spremenljivko. Lokalna rešitev za eno izmed spremenljivk vedno obstaja.



Slika 2.2: Presek površin $z = x^2 + y^2$ in $z = 1$ definira krivuljo $\mathbf{c}(t) = (\cos(t), \sin(t), 1)$ v rumeni barvi.

Parametrična predstavitev je denimo dobra za računanje točk na krivulji (samo vstavimo t), ni pa primerna za ugotavljanje, ali točka $\mathbf{T}(x_0, y_0, z_0)$ leži na krivulji (za to je primernejša implicitna oblika $g(x, y, z) = 0$) [12].

2.2 Lastnosti prostorskih krivulj

2.2.1 Dolžina loka

V splošnem dolžino parametrične zvezno odvedljive krivulje $\mathbf{c} = [x, y, z]$ izračunamo z uporabo Pitagorovega izreka na neskončno majhnih segmentih. Dolžino posameznega segmenta ds izračunamo kot

$$\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

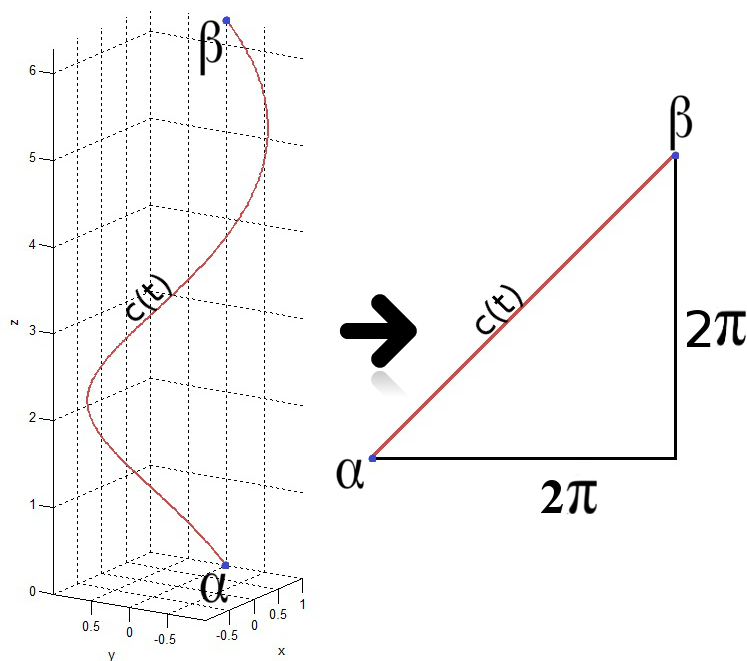
Ko dolžine segmentov seštejemo, je dolžina loka krivulje L definirana kot

$$L(t) = \int_0^t \|\mathbf{c}'(\tau)\| d\tau, \quad (2.1)$$

kjer je $\|\cdot\|$ evklidska norma, \mathbf{c}' pa parametrična hitrost oz. tangenti vektor.

Pri prostorskih krivuljah je včasih zaželeno, da definiramo pozicijo na krivulji kot funkcijo L , ki enolično določi dolžino načrtovane poti. Tir krivulje \mathbf{c} je določen, ko parameter (čas) t zavzame vse vrednosti v območju intervala $I = [\alpha, \beta]$. S tem je določena tudi dolžina krivulje, ki je enaka dolžini intervala I . Pravimo, da je krivulja parametrizirana v naravnem parametru.

Kot primer izračunajmo dolžino loka vijačnice (slika 2.3).



Slika 2.3: Krivulja $\mathbf{c} = [\cos(t), \sin(t), t] : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Po enačbi (2.1) je dolžina loka $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + 1} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\pi\sqrt{2}$. O pravilnosti (2.1) se prepričamo, če tir vijačnice raztegemo na način, da dobimo trikotnik z osnovnico 2π (obseg krožnice z radijem 1) in višino 2π ($z(t)$ pri $t = 2\pi$). Dolžina vijačnice je potemtakem hipotenuza trikotnika $\sqrt{(2\pi)^2 + (2\pi)^2} = 2\pi\sqrt{2}$ [9].

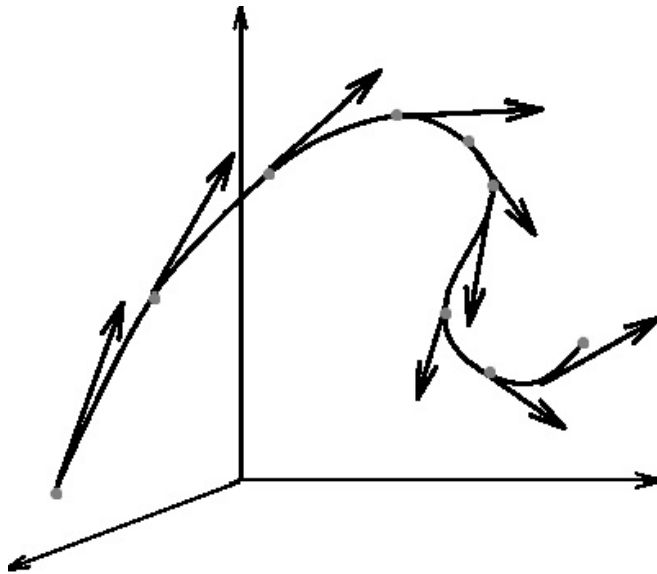
2.2.2 Fleksijska ukrivljenost

V poglavju (3) bomo podrobneje opisali sistem treh vektorjev $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$, ki je definiran natanko takrat, ko sta definirani dve lastnosti krivulje, ki jima pravimo fleksijska ter torzijska ukrivljenost.

Na sliki (2.4) vidimo krivuljo \mathbf{c} s pripadajočimi enotskimi tangentnimi vektorji oblike $\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|}$. Ko krivulji sledimo, lahko vidimo, da tangentni vektorji hitro spreminjajo smer v točkah, ko se krivulja krivi. Geometrijska relacija med upognjenostjo krivulje in stopnjo spremembe smeri tangentnih vektorjev glede na dolžino loka nas privede do definicije ukrivljenosti krivulje \mathbf{c} v določeni točki na krivulji. Ukrivljenost κ je podana kot

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\|}{\|\mathbf{c}'\|^3}.$$

Krivinski polmer ρ je enak κ^{-1} . Če je ukrivljenost majhna, je krivinski polmer velik in obratno [9].



Slika 2.4: Spreminjanje tangentnega vektorja glede na dolžino loka.

2.2.3 Torzijska ukrivljenost

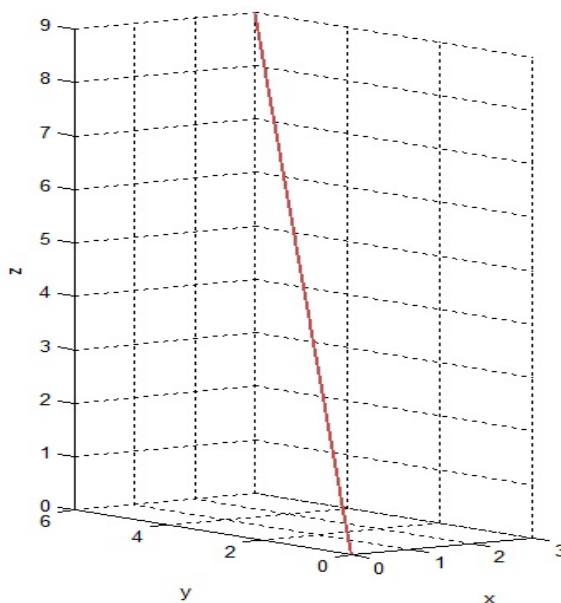
Torzijski ukrivljenosti prostorske krivulje pogosto rečemo tudi druga ukrivljenost. Je stopnja hitrosti spremembe pritisnjene ravnine oz. ravnine, na kateri ležita vektorja normale in tangente. Torzijska ukrivljenost τ je pozitivna za desnosučne krivulje, sicer pa negativna. Analitično lahko torzijo definiramo kot

$$\tau = \frac{(\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'') \cdot \mathbf{c}'''}{\|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\|^2}.$$

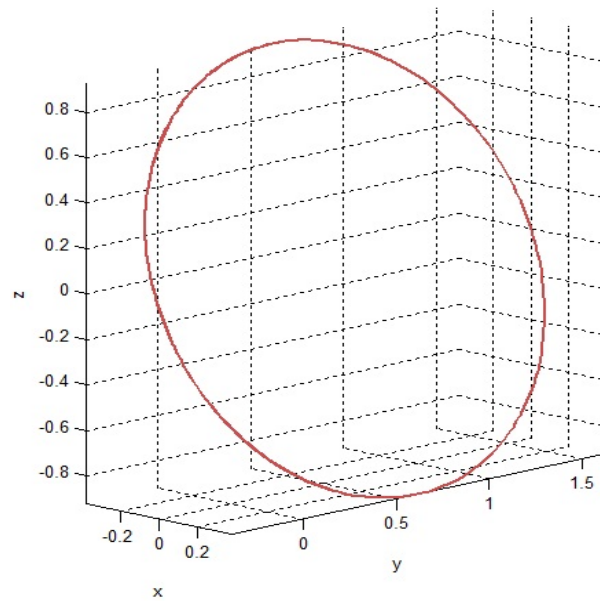
2.2.3.1 Krivulje z dvema ukrivljenostima

Osnovni izrek diferencialne geometrije krivulj pravi, da ukrivljenosti κ ter τ enolično definirata prostorsko krivuljo \mathbf{c} do togega premika [11]. Pravimo jima invariantni lastnosti krivulje in sta neodvisni od parametrizacije [13]. Z njima lahko kategoriziramo več tipov krivulj:

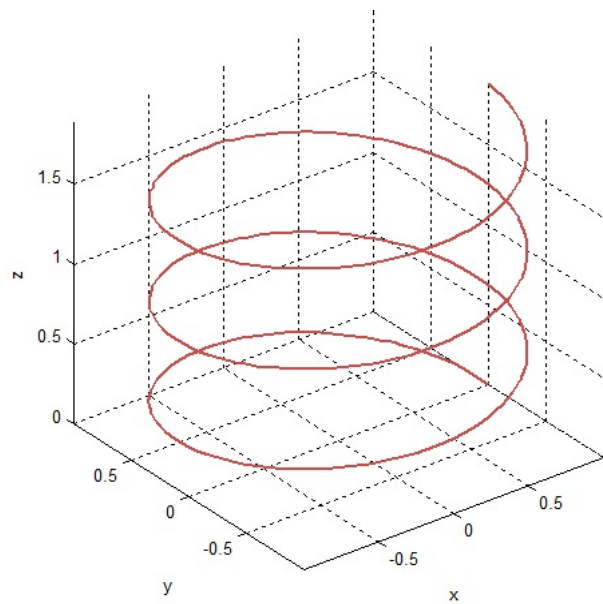
- $\kappa \equiv 0 \Leftrightarrow \mathbf{c}$ je premica (slika 2.5),
- $\kappa \neq 0$ in $\tau \equiv 0 \Leftrightarrow \mathbf{c}$ je ravninska krivulja,
- $\kappa = \textit{konstanta} > 0$ in $\tau \equiv 0 \Leftrightarrow \mathbf{c}$ je krožnica (slika 2.6),
- $\frac{\kappa}{\tau} = \textit{konstanta} \Leftrightarrow \mathbf{c}$ je vijačnica,
- $\kappa = \textit{konstanta} > 0$ in $\tau = \textit{konstanta} \neq 0 \Leftrightarrow \mathbf{c}$ je krožna vijačnica (slika 2.7).



Slika 2.5: Graf krivulje $\mathbf{c}(t) = [t, 2t, 3t] : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}^3$.



Slika 2.6: Graf krivulje $\mathbf{c}(t) = [(5/13) \cos(t), (8/13) - \sin(t), (-12/13) \cos(t)] : [0, 10] \rightarrow \mathbb{R}^3$.



Slika 2.7: Graf krivulje $\mathbf{c}(t) = [\cos(t), \sin(t), 0.1t] : [0, 6\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$.

2.3 Jean Frédéric Frenet

Jean Frédéric Frenet je bil francoski matematik, astronom in meteorolog. Rodil se je 7. februarja leta 1816 v mestu Périgueux. Poznan je po odkritju šestih od skupno devetih Frenet–Serretovih enačb, ki pričajo o avtorjevi erudiciji. Enačbe so pomembne v teoriji prostorskih krivulj. V sklopu doktorske disertacije je enačbe predstavil javnosti leta 1847. Kot profesor je poučeval na univerzi v Toulouseu in Lyonu, kjer je bil tudi direktor astronomskega observatorija. Leta 1852 so bile enačbe objavljene v reviji ”*Journal de mathématiques pures et appliquées*”² [2].

SUR LES COURBES A DOUBLE COURBURE;

PAR M. F. FRENET,

Professeur à la Faculté des Sciences à Lyon.

(Extrait d'une Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Toulouse, le 10 juillet 1847.)

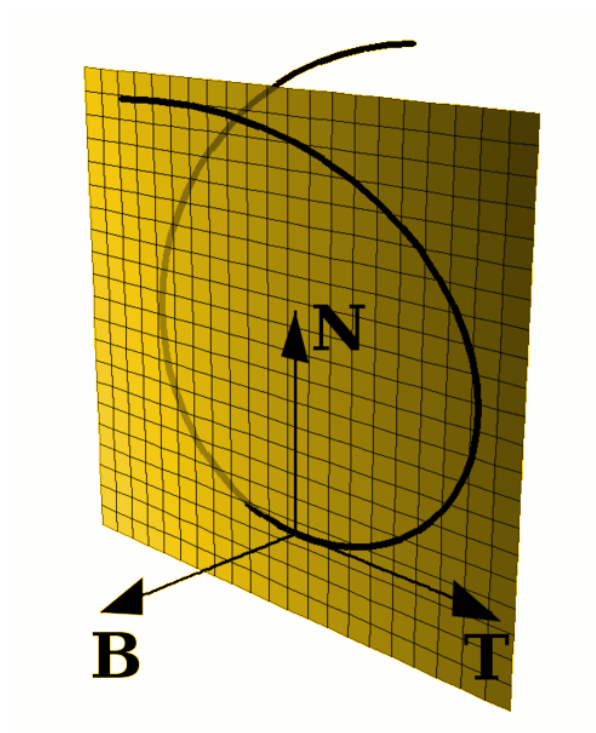
Slika 2.8: Naslovnica Frenetovega dela ”Krivulje z dvema ukrivljenostima”.

²<http://goo.gl/UAAAdv>

Poglavje 3

Frenetovo ogrodje

Ortonormiran okvir (trojica enotskih vektorjev, ki so paroma pravokotni), ki je najpogosteje v tesni povezavi s prostorskimi krivuljami, se imenuje Frenetovo ogrodje (FF).



Slika 3.1: Frenetovo ogrodje.

FF ni neodvisno od parametrizacije krivulje \mathbf{c} . Točko, v kateri je vektor hitrosti neničelen, imenujemo regularna točka parametrizacije. V primeru, ko so vse točke na \mathbf{c} regularne, pravimo, da je parametrizacija regularna. Za preučevanje krivulj ponavadi privzamemo, da je krivulja regularna.

Za regularno parametrizirano prostorsko krivuljo \mathbf{c} , katere fleksijska ukrivljenost $\kappa \neq 0$, lahko v vsaki točki določimo tri vektorje v \mathbb{R}^3 , ki sestavljajo ortogonalno bazo. Posebnemu desnosučnemu ogrodju ortogonalnih osi pravimo Frenetovo ogrodje. FF nudi naravno perspektivo na lokalno geometrijo krivulj [4].

Frenetovo ogrodje sestavljajo vektorji $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$.

Definiramo jih kot

- **enotski tangenti vektor (tangenta)**

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|}.$$

Tangenta nam ponazarja smer krivulje v določeni točki $\mathbf{c}(t)$;

- **enotski normalni vektor (normala)**

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)}{\|\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)\|}.$$

Je vektor hitrosti spreminjanja tangente in kaže v smer spreminjanja. Ko je vektor negativen, se ogrodje vrta v smeri urinega kazalca;

- **binormala**

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{N}(t) \times \mathbf{T}(t).$$

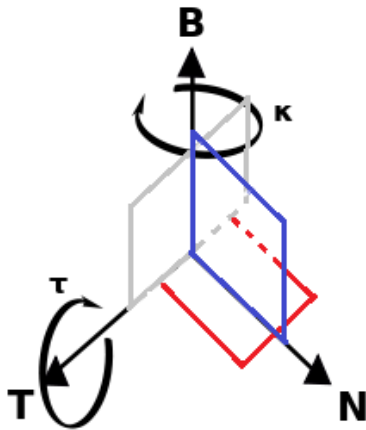
Je enotski vektor pospeška, ki je vedno ortogonalen na $\mathbf{T}(t)$ in $\mathbf{N}(t)$. Zveze med vektorji so:

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{N}(t) \times \mathbf{B}(t),$$

$$\mathbf{N}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{B}(t),$$

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{N}(t) \times \mathbf{T}(t).$$

Na sliki (3.2) vidimo, da imamo glede na FF tri medsebojno pravokotne ravnine. Normalno ravnino, ki je pravokotna na \mathbf{T} in pravokotno seka krivuljo v vsaki točki, pritisnjeno ravnino pravokotno na \mathbf{B} ter rektifikacijsko ravnino, ki je pravokotna na \mathbf{N} .



Slika 3.2: Torzijska ukrivljenost τ , fleksijska ukrivljenost κ , normalna ravnina (modro), rektifikacijska ravnina (sivo), pritisnjena ravnina (rdeče).

Za krivuljo, katere evklidska norma odvoda je ravno 1 pravimo, da je parametrizirana z naravnim parametrom.

Komponente Frenetovega ogrodja se v tem primeru poenostavijo v

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{c}'(t), \quad \mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{c}''(t)}{\|\mathbf{c}''(t)\|}, \quad \mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t).$$

Odvodi treh vektorjev sestavljajo Frenet-Serretove enačbe, ki podajo zvezo med odvodi vektorjev in vektorji samimi. Zapišemo jih kot

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}.$$

V splošnem velja, da ima regularna krivulja v prostoru \mathbb{R}^n natanko $(n - 1)$ ukrivljenosti. Od tega je prvih $(n - 2)$ pozitivnih fleksijskih ukrivljenosti κ_i . Zadnjo ukrivljenost imenujemo torzijska ukrivljenost.

Potemtakem lahko Frenet-Serretove enačbe posplošimo za n -razsežni prostor:

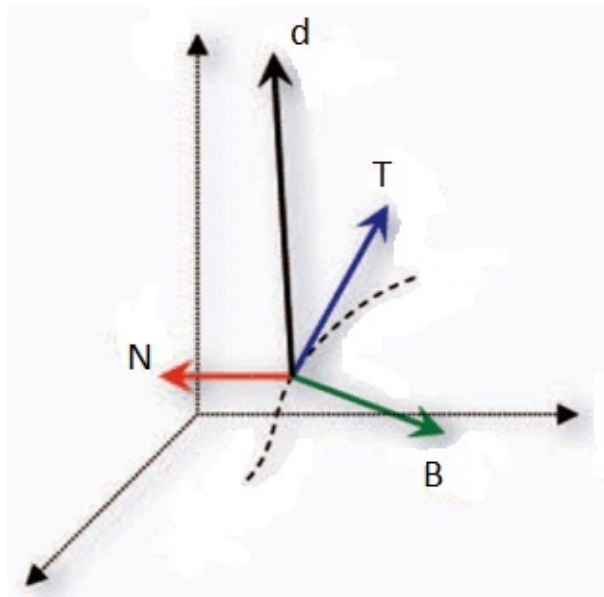
$$\mathbf{e}' = \|\mathbf{c}'\| \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & \dots & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -\kappa_{n-2} & 0 & \kappa_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & -\kappa_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{e},$$

kjer je $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ Frenetovo ogrodje v prostoru \mathbb{R}^n . Enačbe za izračun ukrivljenosti so v delu [6].

Francoski matematik Jean Gaston Darboux je različico Frenetovega ogrodja definiral s pomočjo vektorja kotne hitrosti, ki ga imenujemo Darbouxov vektor $\mathbf{d} = \kappa\mathbf{B} + \tau\mathbf{T}$ (slika 3.3). Vektor \mathbf{d} leži v rektifikacijski ravnini regularne prostorske krivulje \mathbf{c} in opisuje stopnjo rotacije FF [4]. Z njim lahko Frenetove enačbe zapišemo v elegantnejši obliki:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}' &= \mathbf{d} \times \mathbf{T}, \\ \mathbf{N}' &= \mathbf{d} \times \mathbf{N}, \\ \mathbf{B}' &= \mathbf{d} \times \mathbf{B}. \end{aligned}$$

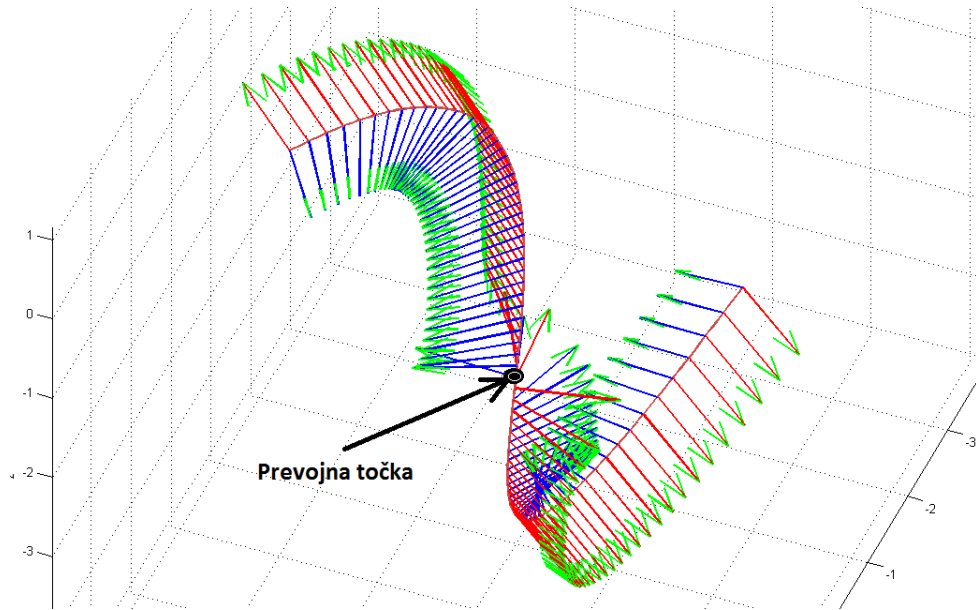
Enačbe definirajo različico Frenetovega ogrodja kot rotacijo okrog vektorja \mathbf{d} .



Slika 3.3: Darbouxov vektor \mathbf{d} .

3.1 Pomanjkljivosti Frenetovega ogrodja

Frenetovo ogrodje je nepogrešljivo za študij diferencialne geometrije krivulj v 3-dimenzionalnem evklidskem prostoru, saj določa gibanje togih teles. Ima pa nekatere pomanjkljivosti. Ogrodje ima nezaželeno veliko rotacijo okrog tangentnega vektorja. Poleg tega sta v prevojnih točkah (v katerih je fleksijska ukrivljenost ničelna) vektorja \mathbf{N} in \mathbf{B} nedefinirana (slika 3.4).



Slika 3.4: Prevoj.

Za regularne krivulje vemo, da je fleksijska ukrivljenost ničelna v primerih, ko je $\mathbf{c}'' = 0$ ali, ko sta vektorja \mathbf{c}' in \mathbf{c}'' vzporedna. V obeh primerih se bo zgodilo, da se bosta vektorja \mathbf{N} in \mathbf{B} obrnila.

Zaradi pomanjkljivosti Frenetovega ogrodja, je smiselna uporaba drugih ogrodij.

3.2 Racionalnost Frenetovega ogrodja

Racionalne oblike so v računalniškem podprtem načrtovanju (CAD) vedno zaželene, saj so združljive s shemo večine CAD sistemov in omogočajo učinkovite izračune [3]. Ogrodja morajo biti racionalne funkcije parametra, da lahko konstruiramo racionalne oblike, kot so stožci ipd. Frenetovo ogrodje v splošnem ni racionalno. Oglejmo si krivulje, katere imajo racionalno FF.

3.2.1 Prostorske krivulje s pitagorejskim hodografom

Krivulja s pitagorejskim hodografom (PH krivulja) je polinomska krivulja $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$, katere komponente hodografa (njenege odvoda) zadoščajo zvezi

$$c_1'(t)^2 + c_2'(t)^2 + c_3'(t)^2 = \sigma^2(t),$$

kjer je σ polinom.

PH krivuljo \mathbf{c} izpeljemo z integracijo hodografa, ki je polinom sode stopnje.

V smislu štirih polinomov w , x , y in z lahko hodograf opišemo kot

$$\begin{aligned} c_1' &= w^2(t) + x^2(t) - y^2(t) - z^2(t), \\ c_2' &= 2[w(t)z(t) + x(t)y(t)], \\ c_3' &= 2[x(t)z(t) - w(t)y(t)], \end{aligned} \tag{3.1}$$

kjer je parametrična hitrost krivulje $\sigma(t) = w^2(t) + x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)$.

Hodograf iz enačbe (3.1) lahko na zelo kompakten način opišemo tudi s kvaternioni (poglavje 4.2).

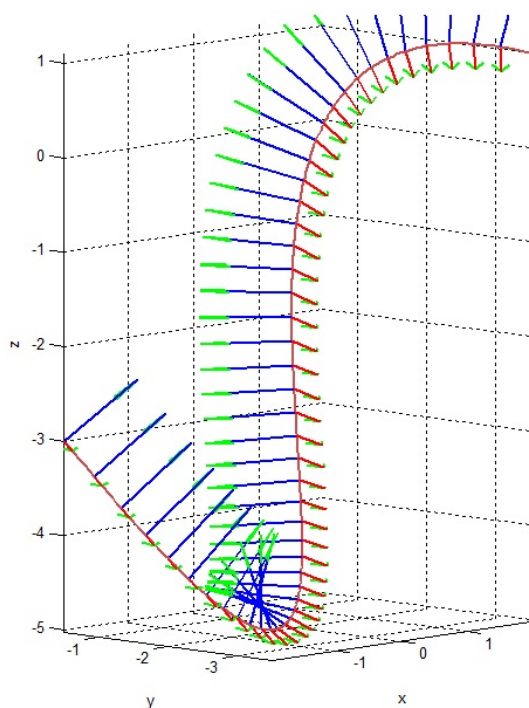
Pri Frenetovem ogrodju je tangentni vektor racionalno odvisen od parametra t , kar v splošnem ne velja za normalo in binormalo. Da dosežemo racionalno odvisnost parametra t tudi pri normalni in binormalni, je nujno vgraditi pitagorejsko strukturo tako v prvi hodograf \mathbf{c}' , kot tudi v drugi hodograf $\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''$.

Krivuljam, ki imajo lastnost, da sta $\|\mathbf{c}'\|$ ter $\|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\|$ polinoma, pravimo krivulje z dvojnim pitagorejskim hodografom (DPH krivulje). Vse DPH krivulje imajo racionalno Frenetovo ogrodje. Primer takšnih krivulj so vijačnice, ki so podmnožica DPH krivulj [5].

Poglavje 4

Rotacijsko minimizirajoča ogrodja

V aplikacijah je pomembno, da izberemo ogrodje, ki ima minimalno rotacijo med gibanjem po krivulji. Ogradje, ki minimalno rotira v normalni ravnini, imenujemo rotacijsko minimizirajoče ogrodje (RMF).



Slika 4.1: Krivulja $\mathbf{c}(t) = [0.25t^3 - 0.015625t, -0.25t^3 + 0.25t - 2, -0.5t^3 + 0.5t^2 + 3t - 3] : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ s pripadajočim rotacijsko minimizirajočim ogrodjem.

4.1 Prilagojena ogrodja

Ogrodja za katera velja, da je prvi vektor ravno enotska tangenta \mathbf{T} , ki skupaj z vektorjema \mathbf{V}_1 in \mathbf{V}_2 tvori ortonormirano bazo, imenujemo prilagojena ogrodja (AF). V splošni obliki lahko AF zapišemo kot

$$\begin{aligned}\mathbf{T}' &= \mathbf{w} \times \mathbf{T}, \\ \mathbf{V}'_1 &= \mathbf{w} \times \mathbf{V}_1, \\ \mathbf{V}'_2 &= \mathbf{w} \times \mathbf{V}_2,\end{aligned}$$

kjer je $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{T} + \beta\mathbf{V}_1 + \gamma\mathbf{V}_2$ vektor kotne hitrosti s komponentami $\alpha = \mathbf{V}'_1 \cdot \mathbf{V}_2$, $\beta = \mathbf{V}'_2 \cdot \mathbf{T}$, $\gamma = \mathbf{T}' \cdot \mathbf{V}_1$.

Frenetovo ogrodje in rotacijsko minimizirajoče ogrodje sta le primer AF [4].

FF lahko sedaj zapišemo v AF-notaciji kot

$$\mathbf{N} = \mathbf{V}_1, \quad \mathbf{B} = \mathbf{V}_2, \quad (\alpha, \beta, \gamma) = (\tau, 0, \kappa).$$

4.1.1 Eksaktno rotacijsko minimizirajoče ogrodje

Za vsa prilagojena ogrodja oblike $(\mathbf{T}, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)$ velja, da komponenta vektorja kotne hitrosti $\alpha\mathbf{T}$ opiše trenutni rotaciji vektorjev \mathbf{V}_1 in \mathbf{V}_2 v normalni ravnini krivulje \mathbf{c} .

Kljub temu lahko komponento $\alpha\mathbf{T}$ postavimo na nič, saj ni bistvenega pomena pri definiciji AF. Ogrodju, ki nima komponente vektorja kotne hitrosti $\alpha\mathbf{T}$, pravimo rotacijsko minimizirajoče ogrodje (RMF). Za RMF je vektor kotne hitrosti \mathbf{w} definiran kot

$$\mathbf{w} = \beta\mathbf{V}_1 + \gamma\mathbf{V}_2,$$

$$\beta = \mathbf{V}'_2 \cdot \mathbf{T} \text{ in } \gamma = \mathbf{T}' \cdot \mathbf{V}_1.$$

Vektor \mathbf{w} si lahko pri RMF-ju predstavljamo kot rotacijo vektorja \mathbf{T}' za kot $\frac{\pi}{2}$ v normalni ravnini. Iz tega lahko sklepamo, da FF ni RMF, saj je pri FF vektor normale izbran natanko tako, da vedno kaže v smeri \mathbf{T}' in potemtakem komponenta vektorja kotne hitrosti $\alpha\mathbf{T}$ v nobenem primeru ni ničelna.

RMF lahko definiramo tudi z uporabo funkcije θ , ki definira vektorja \mathbf{U} in \mathbf{V} v smislu vektorjev \mathbf{V}_1 in \mathbf{V}_2 .

Vektorja \mathbf{U} in \mathbf{V} lahko na takšen način pridobimo z rotacijo vektorjev \mathbf{V}_1 in \mathbf{V}_2 v

normalni ravnini. Definirajmo sistem enačb

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{pmatrix},$$

kjer funkcija

$$\theta(t) = \theta_0 - \int_0^t \tau \|\mathbf{c}'(t)\| dt \quad (4.1)$$

izniči nezaželeno rotacijo Frenetovega ogrodja[1].

Klok [10] je dokazal, da morata vektorja \mathbf{U} in \mathbf{V} zadoščati enačbam

$$\mathbf{U}'(t) = -\frac{\mathbf{c}''(t) \cdot \mathbf{U}(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|^2} \mathbf{c}'(t), \quad \mathbf{V}'(t) = -\frac{\mathbf{c}''(t) \cdot \mathbf{V}(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|^2} \mathbf{c}'(t),$$

da lahko ogrodje $(\mathbf{T}, \mathbf{U}, \mathbf{V})$ imenujemo RMF.

Torzija PH krivulj je vedno racionalna funkcija parameta t . Rešitev integrala (4.1) po temtalem vedno obstaja (števec je konstanta, imenovalec pa kvadrat).

V integralu racionalne funkcije se pojavijo racionalne ter transcendentne (denimo logaritemske) komponente. Zato v splošnem ne velja, da je integral racionalne funkcije racionalen.

V CAD sistemih so ponavadi zaželeno racionalne oblike, zato so danes v uporabi racionalne aproksimacije RMF-ja.

Krivuljo lahko aproksimiramo z nizom segmentov, ki definirajo RMF [7]. Te zvezno združimo v ogrodje na celi aproksimacijski krivulji. V poglavju (5) bom implementiral metodo iz dela [15].

Še prej si oglejmo, kako lahko RMF predstavimo s pomočjo kvaternionov.

4.2 Kvaternioni

Kvaternioni so posebna algebrska struktura. Definiramo jih lahko kot četverice $(a, a_x, a_y, a_z) \in \mathbb{R}^4$ oblike:

$$\mathbf{q} = a + a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$$

in veljo naslednje zveze:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1.$$

Če si komponente $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ predstavljamo kot enotske bazne vektorje kartezijskega koordinatnega sistema, lahko kvaternion zapišemo v notaciji $\mathbf{q} = (a, \mathbf{v})$ (kombinacija skalarja a in vektorja $\mathbf{v} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$) [4].

Algebraične lastnosti kvaternionov so:

- seštevanje in množenje kvaternionov:

$$\mathbf{q}_1 = (a, \mathbf{v}_1),$$

$$\mathbf{q}_2 = (b, \mathbf{v}_2),$$

$$\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = (a + b, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2),$$

$$\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 = (ab - \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2, a\mathbf{v}_2 + b\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2).$$

V splošnem produkt baznih vektorjev $(1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ ni komutativen. Zato v splošnem ne velja $\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_2 \mathbf{q}_1$,

- konjugirana vrednost kvaterniona \mathbf{q} :

$$\mathbf{q}^* = (a, -\mathbf{v}),$$

$$(\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2)^* = \mathbf{q}_2^* \mathbf{q}_1^*,$$

- dolžina kvaterniona \mathbf{q} :

$$\|\mathbf{q}\| = \sqrt{a^2 + \|\mathbf{v}\|^2},$$

- inverz kvaterniona \mathbf{q} :

$$\mathbf{q}^{-1} = \frac{\mathbf{q}^*}{\|\mathbf{q}\|}.$$

4.2.1 Kvaternioni in prostorske rotacije

Kvaternioni so pomembni pri prostorskih rotacijah. Posebno zanimivi so enotski kvaternioni dolžine 1, ki opisujejo rotacije vektorjev okrog poljubne osi v \mathbb{R}^3 [14].

Enotski kvaternion \mathcal{A} lahko zapišemo kot

$$\mathcal{A} = \left(\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{n} \right),$$

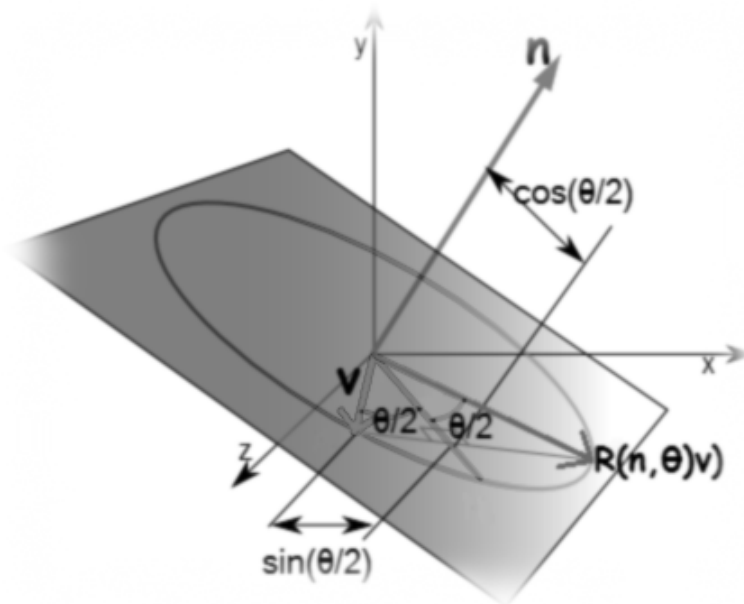
kjer je enotski vektor $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ os rotacije.

Vektor \mathbf{v} , katerega želimo rotirati okrog osi \mathbf{n} , lahko opišemo s kvaternionom $\mathcal{V} = (0, \mathbf{v})$.

Znano je, da kvaternionski produkt

$$\mathcal{A}\mathcal{V}\mathcal{A}^*,$$

definira rotacijo $\mathcal{R}(\mathbf{n}, \theta)\mathbf{v}$ vektorja \mathbf{v} (za kot θ) okrog osi \mathbf{n} [4].



Slika 4.2: Rotacija vektorja \mathbf{v} v kvaternionskem prostoru.

4.3 Racionalno rotacijsko minimizirajoče ogrodje

Ker so racionalna ogrodja v CAD sistemih primernejša, se v praksi uporablja racionalno rotacijsko minimizirajoče ogrodje (RRMF) (Farouki in Han, 2003; Mäurer in Jüttler, 1999). Za RRMF ni dovolj, da je krivulja \mathbf{c} PH krivulja.

RRMF krivulje so podmnožica prostorskih PH krivulj z določeno algebraino omenitvijo za koeficiente kvaterniona. Torzija PH krivulj je racionalna krivulja in omogoča natančen izračun RMF-ja, vendar RMF običajno nima racionalne odvisnosti od parametra t . Racionalno rotacijsko minimizirajoče ogrodje imajo samo RRMF krivulje [9].

Hodograf $\mathbf{c}' = \mathbf{q} \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{q}^*$, definira RRMF krivuljo natanko takrat, ko obstajata polinoma Q_1 ter Q_2 in velja:

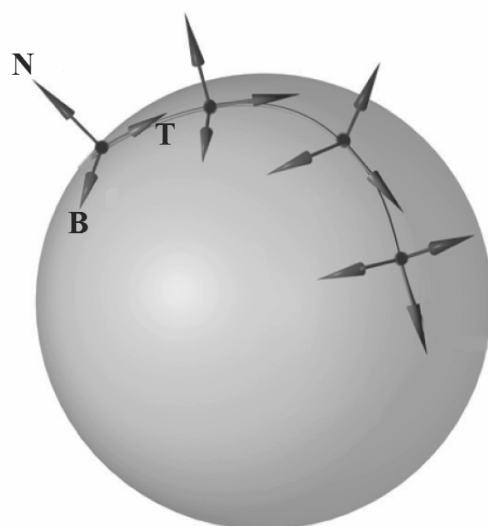
$$\frac{a a'_x - a' a_x - a_y a'_z + a'_y a_z}{a^2 + a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \frac{Q_1 Q'_2 - Q'_1 Q_2}{Q_1^2 + Q_2^2},$$

kjer so (a, a_x, a_y, a_z) četverice kvaterniona $\mathbf{q} = a + a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$.

Poglavje 5

Metoda z dvema zrcaljenjema

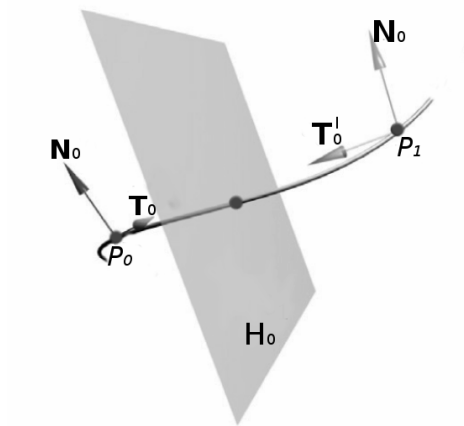
Metoda z dvema zrcaljenjema konstruira eksaktno rotacijsko minimizirajoče ogrodje na sferičnih krivuljah. Za sferične krivulje velja, da v celoti ležijo na površini sfere (njihova torzija je konstantna).



Slika 5.1: RRMF na sferični krivulji.

Podane imamo točke P_0, P_1, \dots, P_{n-1} , pripadajoče enotske tangentne vektorje T_0, T_1, \dots, T_n ter desnosučno referenčno ogrodje $U_0 = (T_0, N_0, B_0)$ v točki P_0 npr. Frenetovo ogrodje (v uporabi je še veliko ogrodij, katera so opisana v viru [8]).

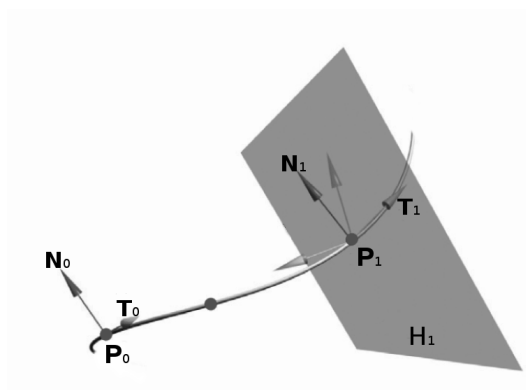
Brez škode za splošnost si lahko pogledamo samo konstrukcijo na segmentu P_0 in P_1 krivulje c . Vektorja T_0 in N_0 lahko s Householderjevim zrcaljenjem prezrcalimo preko bisekcijske ravnine H_0 , katere normala kaže v smeri $P_0 - P_1$.



Slika 5.2: Prvo zrcaljenje.

Pridobili smo ogrodje $U_0^l = (\mathbf{T}_0^l, \mathbf{N}_0, \mathbf{T}_0^l \times \mathbf{N}_0)$ (slika 5.2).

V nadaljevanju preko ravnine H_1 , katere normala je v smeri vektorja $(\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_0^l)$, prezrcalimo \mathbf{T}_0^l in \mathbf{N}_0 , ki se preslikata v \mathbf{T}_1 in \mathbf{N}_1 .



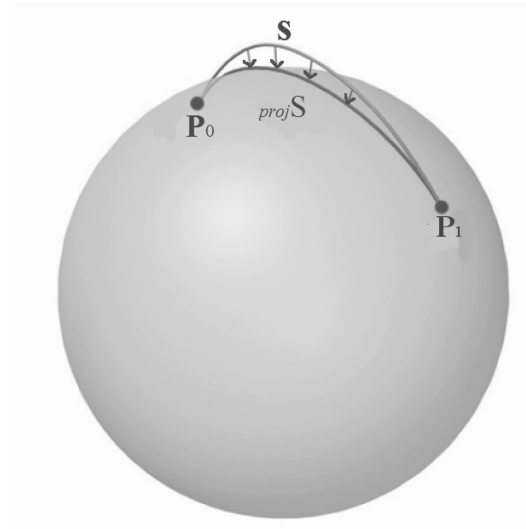
Slika 5.3: Drugo zrcaljenje.

Konstruirali smo novo ogrodje $U_1 = (\mathbf{T}_1, \mathbf{N}_1, \mathbf{T}_1 \times \mathbf{N}_1)$ (slika 5.3). Postopek ponovimo za vse točke \mathbf{P}_i .

Vsako prostorsko krivuljo lahko dobro aproksimiramo z zaporedjem sferičnih krivulj, zato metoda z dvema zrcaljenjema dobro aproksimira RRMF. To lahko dokažemo tako, da se

ponovno osredotočimo na segment krivulje c .

Predpostavimo, da točki P_0 in P_1 ležita na sferi. Vektorja T_0 in T_1 sta tangenti na sfero. Segment lahko projeciramo na sfero in aproksimiramo novo ogrodje nad istimi vhodnimi podatki (slika 5.4).



Slika 5.4: Aproksimacija.

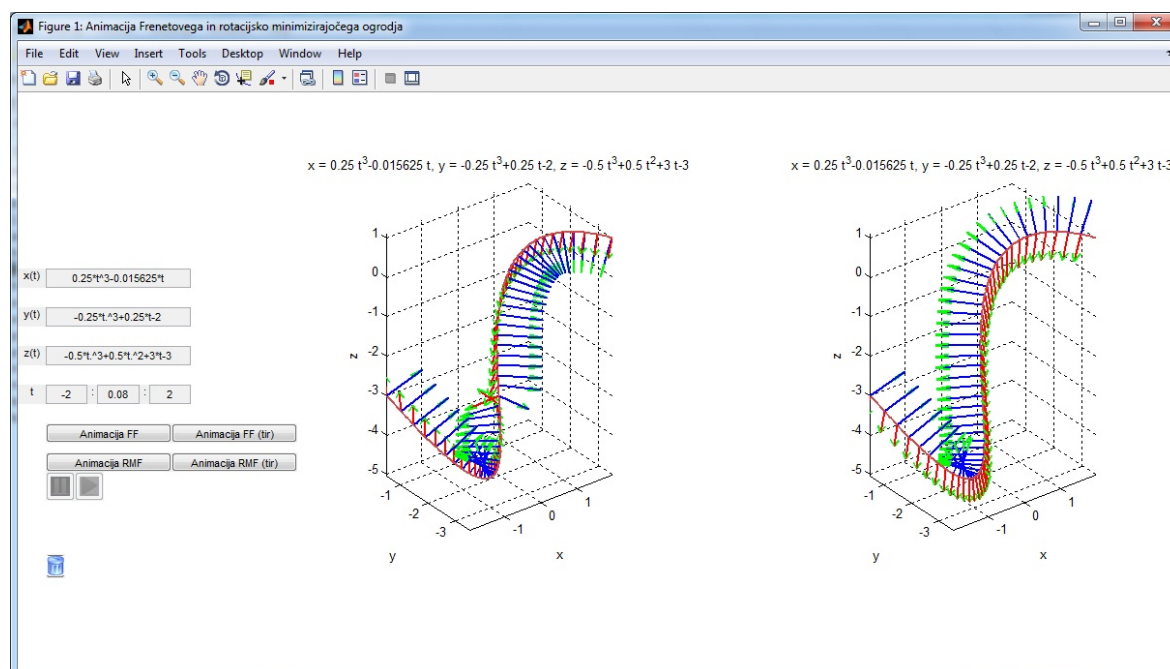
Metoda je robustna v večinskih primerih. Obstajajo pa tudi situacije, ko ravnin H_0 ali H_1 ne moremo določiti. Ravnina H_0 je nedefinirana v primeru, ko je daljica $P_1 - P_0 = \mathbf{0}$. Podobno velja tudi za ravnino H_0 in daljico (T_1, T_0^l) . V primeru, ko sta tangenta vektorja T_0 in T_1 simetrična glede na ravnino H_0 , postane ravnina H_1 nedefinirana[15]. Degeneracijam se izognemo, če preverimo naslednje pogoje:

$$\begin{aligned} P_1 - P_0 &\neq \mathbf{0}, \\ (P_1 - P_0) \cdot (T_1 + T_0) &\neq 0, \\ (P_1 - P_0) \times (T_1 + T_0) &\neq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Iz teorije aproksimacij sledi, da projecirana krivulja na sferi aproksimira prvotno krivuljo z redom 4. Od tod sledi, da bo tudi aproksimacija ogrodij dobra.

Poglavje 6

Programiranje Frenetovega ogrodja



Slika 6.1: Aplikacija za simulacijo Frenetovega in rotacijsko minimizirajočega ogrodja.

6.1 Hitrost in pospešek delca

Točka $\mathbf{c}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$ predstavlja pozicijo delca ob času t . Iz nje določimo hitrost $\mathbf{v} = [x'(t), y'(t), z'(t)]$ in pospešek $\mathbf{a} = [x''(t), y''(t), z''(t)]$.

V vsaki točki $\mathbf{c}(t)$ na krivulji \mathbf{c} , kjer je $\mathbf{c}'(t) \neq \mathbf{0}$, določajo FF trije ortonormirani vektorji. Tangentni vektor nam pove, v kolikšni meri se krivulja \mathbf{c} suče in obrača v prostoru.

6.2 Numerično odvajanje

Odvod parametrične krivulje $\mathbf{c}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$, ki je vsaj enkrat zvezno odvedljiva, je enak limiti diferenčnega kvocienta, kar zapišemo kot

$$\mathbf{c}'(t) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\mathbf{c}(t + \Delta t) - \mathbf{c}(t)}{\Delta t} = \lim_{n \rightarrow 0} \left(\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t}, \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \right)$$

V aplikacijah ponavadi ne računamo vrednosti odvodov analitično, ampak z uporabo numeričnih metod.

- Odvajanje interpolacijskega polinoma

(i) Direktna diferenca:

$$\mathbf{c}'(t) = \frac{\mathbf{c}(t + \Delta t) - \mathbf{c}(t)}{\Delta t} - \frac{\mathbf{c}''(\xi)}{2} \Delta t,$$

kjer je ξ med t in $t + \Delta t$,

(ii) obratna diferenca:

$$\mathbf{c}'(t) = \frac{\mathbf{c}(t) - \mathbf{c}(t - \Delta t)}{\Delta t} - \frac{\mathbf{c}''(\eta)}{2} \Delta t,$$

kjer je η med $t - \Delta t$ in t .

- Metoda nedoločenih koeficientov:

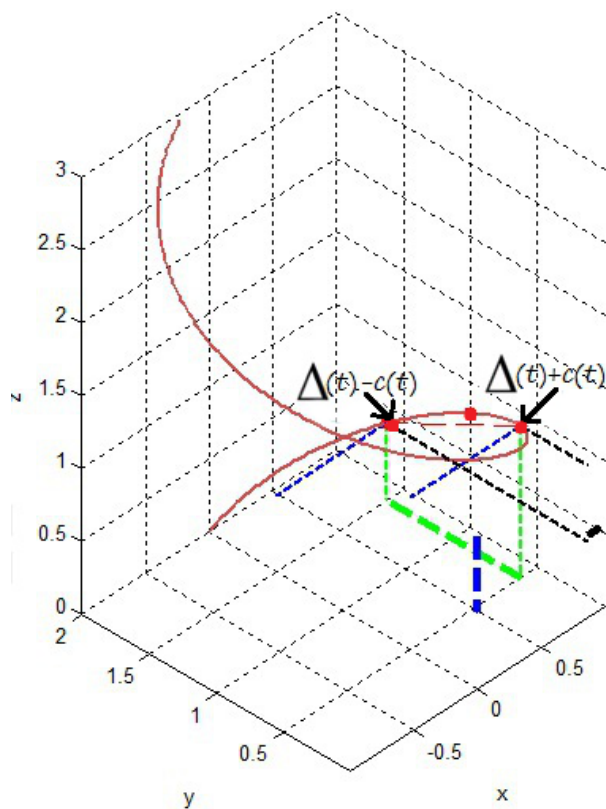
(i) sredinska metoda: Odvod krivulje aproksimiramo kot linearno kombinacijo njenih vrednosti v sosednjih točkah, torej

$$\mathbf{c}'(t) = \frac{\mathbf{c}(t + \Delta t) - \mathbf{c}(t - \Delta t)}{2\Delta t} - \frac{\mathbf{c}^{(3)}(\zeta)}{6} (\Delta t)^2.$$

Podobno lahko drugi odvod izračunamo kot

$$\mathbf{c}''(t) = \frac{\mathbf{c}(t - \Delta t) - 2\mathbf{c}(t) + \mathbf{c}(t + \Delta t)}{\Delta t^2} - \frac{\mathbf{c}^{(4)}(\zeta)}{12} (\Delta t)^2,$$

kjer je ζ med $t + \Delta t$ in $t - \Delta t$.



Slika 6.2: Sredinska metoda.

Napake v funkcijskih vrednostih lahko močno zmanjšajo uporabnost formul za numerično odvajanje. Napake pri posamezni metodi so v rdeči barvi.

Če so funkcijske vrednosti podane natančno, je napaka poljubno majhna takrat, ko $\Delta t \rightarrow 0$.

6.3.2 Algoritem za izračun rotacijsko minimizirajočega ogrodja

Pri konstrukciji rotacijskega minimizirajočega ogrodja sem uporabil metodo z dvema zrcaljenjema. Metoda temelji na tem, da lahko vsako enostavno rotacijo pridobimo z dvema zrcaljenjema. Zrcaljenja lahko v \mathbb{R}^n opišemo kot zrcaljenje čez podprostor. V \mathbb{R}^2 je podprostor premica, ravnina v \mathbb{R}^3 , ipd. Metoda je ena izmed boljših pri aproksimaciji RRMF-ja. Dve zrcaljenji sta optimalni, saj je RRMF neodvisen od oblike krivulje znotraj segmentov.

Algoritem 2 Izračun RRMF ogrodji na krivulji \mathbf{c}

Vhod:

Vrednosti parametrov: t_0, t_1, \dots, t_{n-1} ,

vrednosti pozicij: $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_{n-1}$,

množica enotskih tangentskih vektorjev T , ki so podani kot stolpci,

referenčna vektorja $\mathbf{N}_0, \mathbf{B}_0$.

Izhod:

Seznam U RRMF ogrodij oblike $U_i = (\mathbf{T}_i, \mathbf{N}_i, \mathbf{B}_i)$ za $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

```

1: for  $i = 0 \rightarrow n - 1$  do
2:    $\mathbf{v}_1 = \mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i;$                                 % vektor ortogonalen na bisekcijsko
                                                                ravnino  $H_0$ 
3:    $H_0 = I - 2 \frac{(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1^\top)}{\mathbf{v}_1^\top \cdot \mathbf{v}_1};$           % Householderjevo zrcaljenje  $H_0$  je
                                                                matrika ( $H_0 = H_0^\top$  in  $H_0^2 = I$ ).
4:    $m = \frac{2}{2\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^\top};$ 
5:    $\mathbf{T}_i^l = \mathbf{T}_i - \frac{1}{m} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^\top \mathbf{T}_i;$           % prezrcaljeni tangentski vektor
6:    $\mathbf{v}_2 = \mathbf{T}_i - \mathbf{T}_i^l;$                                 % vektor ortogonalen na ravnino  $H_1$ 
7:    $H_1 = I - 2 \frac{(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2^\top)}{\mathbf{v}_2^\top \cdot \mathbf{v}_2};$           % Householderjevo zrcaljenje
8:    $\mathbf{N}_{i+1} = H_0 H_1 \mathbf{N}_i;$                             % novi vektor normale
9:    $\mathbf{B}_{i+1} = \mathbf{N}_{i+1} \times \mathbf{T}_{i+1};$                 % novi vektor binormale
10:   $U_{i+1} = \left( \frac{\mathbf{T}_{i+1}}{\|\mathbf{T}_{i+1}\|}, \frac{\mathbf{N}_{i+1}}{\|\mathbf{N}_{i+1}\|}, \frac{\mathbf{B}_{i+1}}{\|\mathbf{B}_{i+1}\|} \right)$  % shranimo novo ogrodje
11: end for
```

Poglavje 7

Sklepne ugotovitve

Gibanje togih teles v prostoru je v vsaki točki krivulje sestavljeno iz gibanja težišča in orientacije. Konstrukcijo gibanja težišča izvedemo s standardnimi metodami za interpolacijo podatkov s polinomskimi ali racionalnimi krivuljami. Primer takšne metode je Hermitova interpolacijska shema. Osrednji del moje raziskave je orientacija togega telesa, ki jo v vsaki točki določajo ogrodja prostorskih krivulj. Predstavil sem pregled različnih možnih ogrodij. Med njimi sem podrobno opisal Frenetovo ogrodje in rotacijsko minimizirajoče ogrodje, ki zagotavlja minimalno rotacijo v normalni ravnini. Če želimo orientacije hitro izračunati, morajo biti ogrodja predstavljena v racionalni obliki. Spoznali smo primer diskretne aproksimacije za izračun RRMF-ja na prostorskih parametričnih krivuljah. Implementiral sem metodo z dvema zrcaljenjema, ki konstruira novo ogrodje. Metoda je enostavna, hitra in zelo natančna v primerjavi z ostalimi diskretnimi metodami kot sta npr. projekcijska ter rotacijska metoda, ki sta sicer v praksi zelo razširjeni. Metoda z dvema zrcaljenjema je boljša tudi v primerjavi z metodo Runge-Kutta 4 (aproksimacija z numerično integracijo), četudi imata metodi enako aproksimacijsko napako, je metoda z dvema zrcaljenjema enostavnejša in hitrejša.

Opisane metode so aplikativne na številnih področjih. V praksi bi lahko implementirani metodi uporabili za določitev gibanja objektov, ki jim lahko predefiniramo težišče gibanja. Ti objekti so na primer satelit, kamera, CNC stružnica, ipd. Pri aproksimaciji RRMF-ja, je optimalen red napake h^4 z vhodnimi podatki, ki sem jih navedel v algoritmu. Ena od možnosti nadaljnjega raziskovanja so t.i. P krivulje. To so krivulje, kjer prvi vektor ogrodja ne kaže v smeri tangente na krivuljo, ampak v smeri zveznice med izhodiščem koordinatnega sistema ter točke na krivulji. Take krivulje so na primer pomembne pri krmiljenju gibanja kamere, s katero snemamo mirujoči objekt v izhodišču.

Literatura

- [1] Luc Biard, R. T. Farouki, Nicolas Szafran, “Construction of Rational Surface Patches Bounded by Lines of Curvature,” *Comput. Aided Geom. Design*, št. 27, zv. 5, str. 359–371, 2010.
- [2] Sooyoung Chang, *Academic Genealogy of Mathematicians*, World Scientific Publisher 2010, str. 103.
- [3] R. T. Farouki, C. Giannelli, C. Manni, and A. Sestini, “Quintic Space Curves With Rational Rotation–Minimizing Frames,” *Comput. Aided Geom. Design*, št. 26, zv. 5, str. 580–592, 2009.
- [4] R. T. Farouki, *Pythagorean-Hodograph Curves: Algebra and Geometry Inseparable*, Berlin: Springer-Verlag, 2008.
- [5] R. T. Farouki, Carlotta Giannelli, Alessandra Sestini, “Helical Polynomial Curves and Double Pythagorean Hodographs I. Quaternion and Hopf map Representations,” *J. Symb. Comput.*, št. 44, zv. 2, str. 161–179, 2009.
- [6] Eugene Gutkin, “Curvatures, volumes and norms of derivatives for curves in Riemannian manifolds,” *J. Geom. Phys.*, št. 61, zv. 11, str. 2147–2161, 2011.
- [7] C. Y. Han, “Nonexistence of Rational Rotation-Minimizing Frames on Cubic Curves,” *Comput. Aided Geom. Design*, št. 25, zv. 4–5, str. 298–304, 2008.
- [8] A.J. Hanson, “Constrained Optimal Framings of Curves and Surfaces using Quaternion Gauss Maps,” v zborniku *In Proceedings of Visualization '98*, str. 375–382, 1998.
- [9] Dale Hoffman, “Arc Length and Curvature of Space Curves,” *Contemporary Calculus*, št. 12.3. Dostopno na:
[http : //scidiv.bellevuecollege.edu/dh/Calculus_all/Calculus_all.html](http://scidiv.bellevuecollege.edu/dh/Calculus_all/Calculus_all.html).

-
- [10] F. Klok, “Two moving coordinate frames for sweeping along a 3D trajectory,” *Comput. Aided Geom. Design*, št. 3, zv. 3, str. 217–229, 1986.
- [11] Richard S. Millman, George D. Parker, *Elements of differential geometry*, New Jersey: Prentice-Hall, 1977.
- [12] Nicholas M. Patrikalakis, Takashi Maekawa, *Shape Interrogation for Computer Aided Design and Manufacturing*, Berlin: Springer-Verlag 2002, pogl. 1.
- [13] Andrew Pressley, “How Much does a Curve Curve?,” v *Elementary Differential Geometry*, London: Springer-Verlag 2001, pogl. 2.
- [14] Takis Sakkalis, R. T. Farouki, “Pythagorean-Hodograph Curves in Euclidean Spaces of Dimension greater than 3,” *J. Comput. Appl. Math.*, št. 236, zv. 17, str. 4375-4382, 2012.
- [15] Wenping Wang, Bert Jüttler, Dayue Zheng, Yang Liu, “Computation of rotation minimizing frames,” *ACM TOG*, št. 27, zv. 1, 2008.