Univerza v Ljubljani
Fakulteta za računalništvo in informatiko
Fakulteta za matematiko in fiziko

Rok Povšič

Uporaba metod Monte Carlo za vrednotenje opcij

DIPLOMSKO DELO

UNIVERZITETNI INTERDISCIPLINARNI ŠTUDIJSKI PROGRAM PRVE STOPNJE RAČUNALNIŠTVO IN MATEMATIKA

Mentor: prof. dr. Borut Robič

Ljubljana, 2013

Besedilo je oblikovano z urejevalnikom besedil LaTeX.

Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta *za računalništvo in informatiko*

Tržaška 25
1001 Ljubljana, Slovenija
telefon: 01 476 84 11
01 476 83 87
faks: 01 426 46 47
01 476 87 11
www.fri.uni-lj.si
e-mail: dekanat@fri.uni-lj.si

Št. naloge: 00025/2013
Datum: 10.04.2013

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za računalništvo in informatiko ter Fakulteta za matematiko in fiziko izdaja naslednjo nalogo:

Kandidat: **ROK POVŠIČ**

Naslov: **UPORABA METOD MONTE CARLO ZA VREDNOTENJE OPCIJ**
THE USE OF MONTE CARLO METHODS FOR OPTION PRICING

Vrsta naloge: Diplomsko delo univerzitetnega študija prve stopnje

Tematika naloge:

Opcije so pomemben del sodobnih finančnih trgov. Z njimi lahko na borzi zmanjšujemo tveganje, omogočajo pa tudi večji finančni vzvod za spekulacijo. Vrednotenje opcij pomeni določanje njihove pravilne cene. Metode Monte Carlo so eden od načinov vrednotenja opcij. V delu opišite metode Monte Carlo in njihovo uporabo v financah. Opišite osnovo finančno teorijo, ki je podlaga pri uporabi metod Monte Carlo. Razložite, kako modeliramo cene osnovnih finančnih inštrumentov in kako model uporabimo za izračun vrednosti opcij. Opišite matematično teorijo, ki je podlaga metodam Monte Carlo. Zapišite algoritme, ki se rabijo za vrednotenje opcij.

Mentor:

prof. dr. Borut Robič

Fakulteta za računalništvo in informatiko
UNIVERZA V LJUBLJANI
2

Dekan Fakultete za računalništvo in informatiko:

prof. dr. Nikolaj Zimic

Dekan Fakultete za matematiko in fiziko:

akad. prof. dr. Franc Forstnerič

UNIVERZA V LJUBLJANI
Fakulteta za matematiko in fiziko
1

Izjava o avtorstvu diplomskega dela

Spodaj podpisani Rok Povšič, z vpisno številko **63100349**, sem avtor diplomskega dela z naslovom:

Uporaba metod Monte Carlo za vrednotenje opcij

S svojim podpisom zagotavljam, da:

- sem diplomsko delo izdelal samostojno pod mentorstvom prof. dr. Boruta Robiča,
- so elektronska oblika diplomskega dela, naslov (slov., angl.), povzetek (slov., angl.) ter ključne besede (slov., angl.) identični s tiskano obliko diplomskega dela
- soglašam z javno objavo elektronske oblike diplomskega dela v zbirki "Dela FRI".

V Ljubljani, dne 12. septembra 2013 Podpis avtorja:

Zahvala

Zahvaljujem se mentorju prof. dr. Borutu Robiču za dosegljivost, ideje, nasvete in usmerjanje pri nastajanju diplomskega dela.

Za motivacijo in podporo med študijem bi se rad zahvalil staršema.

Še posebej se zahvaljujem mami, slavistki in učiteljici slovenščine, za lektoriranje diplomskega dela.

Hvala!

Kazalo

Povzetek

Opcija je pogodba, ki da lastniku (kupcu) opcije pravico, a ne dolžnosti, da kupi ali proda osnovni finančni instrument po vnaprej določeni ceni, na naprej določen dan ali množico dni. So del širšega razreda finančnih instrumentov, ki jih imenujemo izvedeni finančni instrumenti. Ker je opcija pogodba, ki daje njenemu lastniku le pravico in ne dolžnosti do nakupa/prodaje, je intuitivno pričakovati, da bo njihova cena večja od 0. To je tudi res, težje pa je ugotoviti točno, kolikšna naj bo ta cena. Zato so se v zadnjih 50 letih razvili razni algoritmi, ki pod nekimi predpostavkami določijo, kolikšna je pravilna cena opcije. Metode Monte Carlo so ene izmed teh algoritmov, ki za vrednotenje opcij uporabljajo verjetnostno teorijo in psevdonaključna števila.

Cilj diplomske naloge je predstaviti metode Monte Carlo in njihovo uporabo pri vrednotenju opcij. Opisali bomo finančne trge in lastnosti izvedenih finančnih instrumentov. Ogledali si bomo generiranje psevdonaključnih števil in kako te uporabljamo pri metodah Monte Carlo. Videli bomo teoretično plat metod Monte Carlo in ocenili njihovo natančnost. Algoritme bomo implementirali v programskem jeziku Matlab.

Ključne besede:
opcija, metode Monte Carlo, vrednotenje, finance

Abstract

An option is a contract which gives the owner (buyer) of the option the right, but not obligation, to buy or sell the underlying financial instrument at a predetermined price on a specified future date or multiple dates. They are part of a broader class of financial instruments known as derivatives. Because an option is a contract that gives the owner the right and not the obligation to buy/sell, it is intuitive that its price should be greater than 0. That is true; however, it is harder to determine exactly what the price should be. Therefore, in the last 50 years, multiple algorithms were developed, which, under certain assumptions, determine the correct option price. Monte Carlo methods are one of those algorithms, which use probability theory and pseudorandom numbers to valuate options.

The aim of this thesis is to present Monte Carlo methods and their use in the valuation of options. We will describe financial markets and characteristics of derivatives. We will look at how pseudorandom numbers are generated and how to use them with Monte Carlo methods. The theory behind Monte Carlo methods will be shown, together with the assessment of their accuracy. Algorithms will be implemented in Matlab programming language.

Key words:
option, Monte Carlo methods, valuation, finance

Poglavje 1

Uvod

Finančni trgi predstavljajo pomemben del sodobnega življenja. Poenostavljajo proces prenosa kapitala od tistih, ki ga imajo, do tistih, ki ga potrebujejo. Eden izmed finančnih trgov je borza (angl. stock exchange).

Finančni instrumenti so sredstva, s katerimi lahko na finančnih trgih trgujemo. Opcija je pogodba, ki njenemu lastniku da možnost nakupa oz. prodaje (odvisno od tipa opcije) nekega finančnega instrumenta po v naprej dogovorjeni ceni, v naprej določen dan oz. množico dni. S pravilno uporabo opcije lahko zmanjšamo tveganje, ki ga nosimo v portfelju (t.j. skupek finančnih instrumentov, ki jih imamo v lasti).

Opcije lahko uporabimo tudi kot finančni vzvod pri spekulaciji. Ravno zaradi njihovih zlorab zaradi želja po hitrih zaslužkih so v zadnjih letih dobile nekoliko negativen sloves. Vendar pa so opcije zelo pomemben del sodobnih finančnih trgov. Primerna je analogija opcije z nožem - čeprav nož omogoča nemoralna in kazniva dejanja, človeštvu na splošno prinaša veliko več prednosti kot slabosti in bi bili brez njegove iznajdbe na slabšem. Podobno je z opcijami.

Lastništvo opcije daje le pravico do nečesa (nakupa, prodaje osnovnega finančnega premoženja) in ne vsebuje nobene dolžnosti. Zato je cena opcije vedno pozitivna.

Recimo, da se postavimo v pozicijo finančne institucije, ki izda (proda) opcijo. Zanima nas po točno kolikšni ceni, naj jo prodamo. Ena od preprostih rešitev bi bila, da pogledamo na trg. Borza nam da podatek, kakšna je v tem trenutku cena neke opcije, oblikovana po ponudbi in povpraševanju. Vendar se lahko zgodi, da take opcije, kot jo želimo izdati, na borzi ni. Kaj storimo tedaj? Kaj če nas zanima, ali je cena neke opcije na borzi res "pravična", ali morda ni podcenjena ali precenjena. Kaj sploh pomeni, da je cena opcije pravična? Želimo določiti ceno opcije, ki bi bila "pravična" za to, kar ponuja, glede na neke predpostavke.

V zadnjih par desetletjih so se razvili modeli, ki omogočajo določanje pravične cene opcije (vrednotenje opcije). Nekateri izmed teh modelov so Black-Scholesov model, binomski model in metode Monte Carlo. V tej diplomski nalogi se osredotočamo predvsem na zadnje. Ogledali si bomo, kaj potrebujemo za delovanje tega nedeterminističnega algoritma, kakšna matematična teorija leži za njim in v programskem jeziku Matlab zapisali algoritem za vrednotenje nekaterih tipov opcij.

Poglavje 2

Finančni instrumenti

Z besedno zvezo *finančni instrument* poimenujemo kakršnokoli premoženje, s katerim lahko trgujemo, se pravi, ga kupujemo in prodajamo na trgu. To zajema denar, delnice, obveznice, blago, izvedene finančne instrumente itd. Včasih uporabljamo sámo besedo *premoženje* kot oznako za finančne instrumente.

2.1 Trgovanje s finančnimi instrumenti

S finančnimi instrumenti lahko trgujemo na borzi (angl. stock exchange market) ali na izvenborznem trgu oziroma trgu preko okenc (angl. over the counter market) [1].

Delnica predstavlja delež podjetja. Kdor je lastnik delnice, je dejansko tudi delni lastnik podjetja in lahko sodeluje pri poslovnem odločanju. Moč tega odločanja je odvisna od velikosti deleža v lasti. Lastnike, ki posedujejo majhen delež podjetja, ponavadi predstavlja oseba, ki se imenuje predstavnik malih delničarjev. Ta predstavlja njihove interese in o poslovnih odločitvah glasuje v njihovem imenu.

Podjetje je na začetku svoje poti v lasti zasebnikov, t.j. prvotnih lastnikov. Ti morda pridobijo kapital od zunanjih investitorjev, ki imajo z lastniki neposreden kontakt. V kolikor podjetje postane relativno veliko in potrebuje nov kapital, se lahko lastniki odločijo za t.i. *prvo javno ponudbo* (angl. initial public offering, IPO). Takrat gre podjetje na borzo in vanj lahko investira oziroma kupi delnice kdorkoli. Pri prvi javni ponudbi investitor kupi delnico oz. delež podjetja neposredno od prvotnih lastnikov samih.

V nadaljnjih trgovanjih, v kolikor podjetje ne izda novih delnic, bo zunanji investitor delnico tipično kupil od nekega drugega investitorja in ne od prvotnih lastnikov. Trg, kjer investitorji finančne instrumente kupujejo drug od drugega, imenujemo *sekundarni trg*. Sámo ceno delnice določata ponudba in povpraševanje. Povpraševanje ceno delnice sili navzgor, ponudba navzdol.

Investitor lahko z lastništvom delnice profitira na dva načina. Prvi je, da se vrednost delnice poveča. Drugi način pa so dividende. Podjetje lahko enkrat na leto delničarjem izplača dividende, ki so delež prihodka podjetja. Ali investitor preferira povečanje vrednosti delnice ali izplačilo dividende, je odvisno od njegovih preferenc in od tega, kako se obračunavajo davki. V Sloveniji so vse dividende obdavčene po davčni stopnji 20%, davčna stopnja pri kapitalskih dobičkih, t.j. razlika med vrednostjo kapitala pri nakupu in vrednostjo pri prodaji, pa na vsakih pet let imetništva pada po 5 odstotnih točk z 20% na 0% [2].

Ko imamo delnico v lasti, pravimo tudi, da imamo na delnici *dolgo pozicijo* (angl. long position). Upamo, da bo vrednost delnice narasla, saj jo bomo lahko prodali za več, kot smo jo kupili. Nasprotje temu je *kratka pozicija* (angl. short position), kjer si delnico sposodimo od borznega posrednika in jo na trgu prodamo. Sčasoma moramo delnico vrniti oz. jo kupiti nazaj. Upamo, da bo vrednost delnice padla, saj jo bomo tako na začetku prodali za več kot na koncu kupili.

Skupek več dolgih in kratkih pozicij delnic, ki jih imamo v lasti, imenujemo *portfelj*.

2.2 Izvedeni finančni instrumenti

Izvedeni finančni instrumenti so finančni instrumenti, katerih vrednost je odvisna od nekega drugega ali več drugih finančnih instrumentov. Te druge imenujemo *osnovni finančni instrumenti* [1].

2.3 Terminske pogodbe

Primer izvedenega finančnega instrumenta je *terminska pogodba* (angl. future). To je pogodba, pri kateri se izdajatelj in kupec terminske pogodbe zavežeta, da bo kupec kupil, prodajalec pa prodal osnovni finančni instrument v določenem trenutku T po v naprej določeni ceni K [3].

S terminskimi pogodbami je mogoče zmanjšati tveganje. Recimo, da kmet spomladi ni prepričan ali bo cena pšenice do jeseni zrasla ali padla. Če sklene terminsko pogodbo s mlinarjem, si v vsakem primeru za neko vnaprej dogovorjeno količino zagotovi vnaprej dogovorjeno ceno. Mlinar na drugi strani prav tako. Ko pride jesen, je kmet seveda bolj zadovoljen, če je dogovorjena cena pšenice višja od cene na trgu, mlinar pa ravno obratno.

Vrednost pogodbe V_T za kupca je v času T

$$V_T = S_T - K, \tag{2.1}$$

kjer je S_T vrednost osnovnega finančnega instrumenta oz. blaga na trgu v času T.

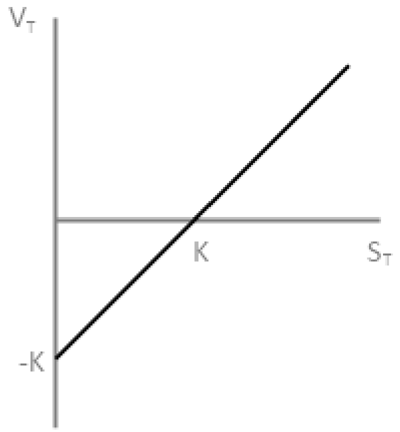
Za prodajalca je vrednost pogodbe v času T ravno obratna, torej

$$V_T = -(S_T - K) = K - S_T. \tag{2.2}$$

2.4 Opcije

Opcija je izvedeni finančni instrument, kjer ima kupec opcije pravico, in ne dolžnost, da opcijo izvrši. Ločimo *nakupno* in *prodajno* opcijo. Nakupna

[1]Obstajajo tudi izvedeni finančni instrumenti, ki so odvisni od nekih drugih izvedenih finančnih instrumentov.

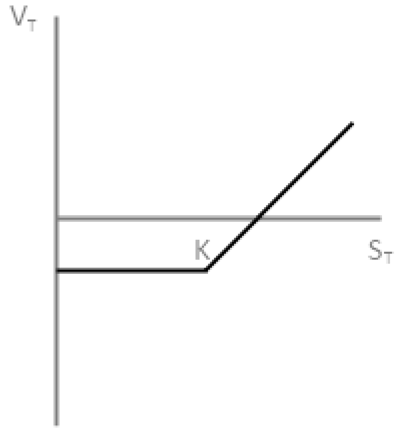


Slika 2.1: Graf izplačila terminske pogodbe za kupca

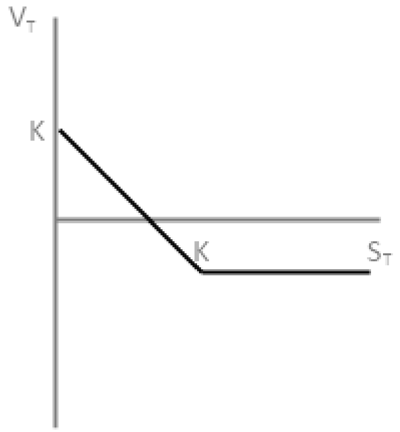
opcija omogoča kupcu opcije nakup osnovnega finančnega instrumenta po v naprej določeni ceni K, podobno tudi prodajna opcija, le da omogoča prodajo.

Nato opcije delimo še na t.i. *evropske*, *ameriške* in *eksotične*. Pri evropskih opcijah lahko kupec opcije opcijo izvrši le ob v naprej določenem trenutku T. Pri ameriških opcijah pa lahko to naredi od nakupa opcije t do v naprej določenega trenutka T $(t < T)$. Ker ameriška opcija daje kupcu, ob enakih ostalih lastnostih, več pravic kot evropska, je zanjo kupec pripravljen plačati več kot za evropsko. Eksotične opcije so vse opcije, ki niso evropske ali ameriške. Najbolj pogoste eksotične opcije so *azijske*, ki jih bomo opisali v nadaljevanju. Ceno, katero kupec opcije plača, imenujemo *premija*.

Kupec nakupne opcije bo opcijo izvršil (kupil osnovni finančni instrument) po ceni K le, če je ta manjša od vrednosti osnovnega premožena na trgu v trenutku izvršitve. Vrednost nakupne opcije V_T v trenutku T je torej $V_T = max\{S_T - K, 0\}$, kjer je S_T vrednost osnovnega premoženja v trenutku T. Prodajno opcijo pa bo kupec izvršil le, če lahko osnovni finančni instrument proda po višji ceni, kot je na trgu. Vrednost prodajne opcije V_T za kupca v trenutku T je torej $V_T = max\{K - S_T, 0\}$.



Slika 2.2: Graf izplačila nakupne opcije z upoštevanjem premije



Slika 2.3: Graf izplačila prodajne opcije z upoštevanjem premije

2.4.1 Azijske opcije

Poleg evropskih in ameriških opcij poznamo tudi t.i. eksotične opcije. Najbolj pogoste od teh so azijske opcije. Pri njih izplačilo ni odvisno od vrednosti osnovnega finančnega instrumenta natanko ob zapadlosti opcije, ampak od povprečne vrednosti instrumenta v nekem obdobju pred zapadlostjo.

Povprečje je lahko definirano na več načinov, npr. aritmetično ali geometrično. Podatki so lahko zvezni in tako izračunamo tudi povprečje - z uporabo integrala. Bolj pogosto pa, zaradi praktičnih in pravnih razlogov, izračunamo povprečje po cenah v diskretnih časovnih trenutkih. Povprečje izračunamo npr. tako, da vzamemo cene instrumenta vsak petek od začetka do konca časa povprečenja in le z njimi izračunamo povprečje.

V nadaljevanju bomo videli, da so metode Monte Carlo še predvsem primerne za vrednotenje azijskih opcij.

2.5 Principi vrednotenja opcij

Da razumemo na kakšen način vrednotimo opcije in tudi druge finančne instrumente, moram poznati nekaj ključnih idej. Poglejmo si principe, ki so ključni za uporabo metod Monte Carlo.

Prva je ideja, da če lahko izvedenemu finančnemu instrumentu naredimo popoln dvojnik, ki je sestavljen le iz drugih finančnih instrumentov in se obnaša identično kot ta izvedeni finančni instrument, je cena izvedenega finančnega instrumenta enaka vsoti posameznih cen drugih finančnih instrumentov.

To je osnovna ideja finančne matematike. Zaradi te ideje lahko finančni posredniki npr. prodajajo opcije svojim strankam in s trgovanjem z drugimi finančnimi instrumenti izničijo tveganje. Za opcijo morajo zaračunati vsaj toliko, kot stane izdelava portfelja z ostalimi finančnimi instrumenti. Konkurenca poskrbi za to, da ne morejo zaračunati veliko več kot to. Njihove stranke bi lahko tudi same skonstruirale tak portfelj in se izognile dodatnim stroškom, ki jih naloži finančni posrednik za svoje usluge kreiranja opcije.

Vendar so finančni posredniki bolje opremljeni za to in lahko to naredijo z manj stroški. Portfelj, ki popolnoma replicira opcijo, vendar je sestavljen z drugih finančnih instrumentov, se imenuje *sintetična opcija*.

Druga ideja je, da je cena finančnega instrumenta sedanja vrednost matematičnega upanja prihodnjih denarnih tokov glede na do tveganja nevtralno verjetnost. Do tveganja nevtralna verjetnost je nekoliko neintuitiven koncept in ga bomo razložili v poglavju 6. Ta ideja nam da bližnjico za določanje cen. Le s prvo idejo bi npr. vrednotenje opcije potekalo tako, da bi našli portfelj finančnih instrumentov, ki opcijo replicira in izračunali ceno tega portfelja. Druga ideja pa poveže cene z matematičnim upanjem. Matematično upanje in integrale na splošno lahko ocenjujemo z metodami Monte Carlo ter ostalimi numeričnimi metodami.

Tretja ideja je, da če je trg *poln*, lahko kakršnokoli izplačilo v prihodnosti kreiramo z ustreznim portfeljem. Recimo, da v prihodnosti pričakujemo 3 različna stanja trga (v resnici jih je seveda veliko več) in za vsako stanje določimo, koliko denarja bi radi takrat dobili. Če je trg poln, lahko za vsako tako vrsto izplačila določimo portfelj, ki nam bo omogočal točno tisto izplačilo, ki smo ga želeli. To pomeni, da lahko izvedene finančne instrumente popolnoma zavarujemo. Na trgu, ki ni poln, cene izvedenega finančnega instrumenta ne morem natanko določiti glede na ostale finančne instrumente.

Ta ideja nam da pogoje, ki jih potrebujemo, da lahko za vrednotenje izvedenih finančnih instrumentov uporabimo prvo in drugo idejo - to je, da je trg poln. Če trg ni poln, lahko cene izvedenih finančnih instrumentov še vedno določimo do neke mere, vendar moramo upoštevati tudi mero naklonjenosti investitorja do tveganja. V tem primeru potrebujemo več informacij, zato se uporabnost različnih metod za vrednotenje izvedenih finančnih instrumentov zmanjša.

Ko na polni trg vpeljemo izvedeni finančni instrument, se investicijske možnosti investitorja ne povečajo. Sam bi lahko skonstruiral portfelj premoženja, ki bi mu v prihodnosti ponujal ista izplačila, če zanemarimo stroške. Cena izvedenega finančnega instrumenta je tako odvisna od ostalih finančnih instrumentov. Finančne institucije, preden izdajo opcijo, določijo bolj likviden portfelj, s katerim bodo izdano opcijo zavarovali.

Poglavje 3

Časovna vrednost denarja

Eden od najbolj pomembnih konceptov v financah je časovna vrednost denarja (angl. time value of money). Denar skozi čas zaradi inflacije izgublja vrednost, kar pomeni, da bomo za 1€ čez eno leto dobili manj dobrin kot za 1€ danes. Pri tem predpostavljamo, da je inflacija pozitivna. V praksi se lahko zgodi, da je inflacija negativna - takrat jo poimenujemo *deflacija*, vendar finančni modeli največkrat predpostavljajo pozitivno inflacijo.

V nadaljevanju bomo tako predpostavili, da lahko na bančni račun položimo denar denar, ki nam prinaša letne obresti r in te so enake stopnji inflacije. Če na ta račun položimo 1€, bomo čez leto dni lahko dvignili $(1 + r)$€. Bančni račun je netvegan, torej vedno dobimo obljubljeni denar. Denar lahko dvignemo tudi preden leto dni poteče, vendar pa je odvisno od načina obrestovanja, kolikšen delež obresti bomo dobili. Poglejmo si sedaj več različnih načinov obrestovanja.

3.1 Načini obrestovanja

Da izračunamo količino denarja, ki ga bomo lahko dvignili iz banke po enem letu, uporabimo formulo

$$P(1) = P(0)(1 + r), \tag{3.1}$$

kjer je r letna obrestna mera, $P(0)$ količina denarja na začetku in $P(1)$ količina denarja po enem letu.

Če držimo denar na banki n let, dobimo končno količino denarja s formulo

$$P(n) = P(0)\underbrace{(1+r)...(1+r)}_{\text{n-krat}} = P(0)(1+r)^n. \tag{3.2}$$

Pri tem smo predpostavili, da je obrestna mera oz. inflacija vsako leto enaka ter da vse obresti obdržimo na računu in se obrestujejo naprej.

V faktorju $(1+r)^n$ implicitno predpostavimo letno obrestovanje. To pomeni, da dobimo obresti izplačate šele ob koncu leta. Ob koncu prvega leta dobimo r€, ob koncu drugega $(1+r)r$€, ob koncu tretjega $(1+r)^2r$€ itd.

Če nam obresti pripišejo polletno, torej dobimo obresti izplačane vsake pol leta, uporabimo faktor $(1+r/2)^{2n}$, kjer n še vedno predstavlja število let. Posplošena formula, za k obdobij v letu, se glasi

$$P(n) = P(0)(1+\frac{r}{k})^{kn}. \tag{3.3}$$

Izračunajmo limito zgornjega faktorja, ko $k \to \infty$.

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}(1+\frac{r}{k})^{kn} &= \lim_{k\to\infty}((1+\frac{r}{k})^k)^n \\ &= e^{rn}\end{aligned} \tag{3.4}$$

Tako obrestovanje je poimenovano *zvezno obrestovanje*.

Sedaj lahko denar z bančnega računa vzamemo kadarkoli in bomo dobili izplačane vse obresti. Zato je namesto n bolj pogosta oznaka t. Imamo torej enačbo

$$P(t) = P(0)e^{rt}. \tag{3.5}$$

Recimo, da bomo v času t dobili $P(t)$ denarnih enot. Koliko je vreden ta denar danes? Oz. drugače, koliko bi morali danes naložiti na bančni račun, ki uporablja zvezno obrestovanje z obrestno mero r, da bi v času t želeli imeti $P(t)$? Odgovor je

$$P(0) = P(t)e^{-rt}. \tag{3.6}$$

Enačbi 3.5 in njena obrnjena različica 3.6 nam povesta, da denarja v različnih časovnih obdobjih ne smemo primerjati samega po sebi. Če je obrestna mera r dovolj velika, se lahko zgodi, da za 2€ čez pet let dobimo manj dobrin kot za 1€ danes (to se zgodi v primeru, ko je r večji od $0,139$ oz. $13,9\%$).

Denar lahko zaradi tega med seboj primerjamo le, ko je prilagojen na isti časovni trenutek. Kateri ta trenutek je, je nepomembno, vendar mora biti isti. Pri prejšnjem primeru bi lahko 1€ pomnožili s faktorjem e^{5r}, da bi dobili *prihodnjo vrednost denarja*, kar lahko primerjamo z 2€ in vidimo, kaj je več.

Lahko tudi gremo v obratno smer in 2€ pomnožimo s faktorjem e^{-5r}, da dobimo *sedanjo vrednost denarja*. To se imenuje tudi *diskontiranje*.

Poglavje 4

Metode Monte Carlo

Recimo, da želimo izračunati naslednji določeni integral:

$$\int_{-1}^{4} (x^2 + 4)\,\mathrm{d}x \tag{4.1}$$

Lahko ga izračunamo analitično:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{4} (x^2 + 4)\,\mathrm{d}x &= (\frac{x^3}{3} + 4x)\Big|_{-1}^{4} \\
&= (\frac{4^3}{3} + 4 * 4) - (\frac{(-1)^3}{3} + 4 * (-1)) \\
&= \frac{125}{3} \approx 41,67
\end{aligned}$$

Pri zgornjem primeru je rešitev enostavna, vendar pa obstaja veliko integralov, ki jih je težko ali celo teoretično nemogoče izračunati na analitičen način. Približke za take integrale lahko izračunamo numerično z numeričnim integriranjem. Vendar če želimo integrirati po več dimezijah, standardno numerično integriranje hitro postane počasno. Na prvi pogled ni intuitivno, vendar lahko za integriranje uporabimo tudi teorijo verjetnosti [4].

Širok razred algoritmov, ki za računanje približkov določenih integralov uporabljajo verjetnost in naključna števila, označimo z besedno zvezo *metode Monte Carlo*. V najenostavnejšem primeru to pomeni, da vzamemo n naključnih vzorcev (oz. psevdonaključnih, kot bomo videli kasneje) iz celotne množice možnih dogodkov in delež tistih, ki padejo v željeno množico, vzamemo kot cenilko za dejansko vrednost integrala [5].

4.1 Enostaven primer metode Monte Carlo

Poglejmo si, kako bi integral 4.1 izračunali s pomočjo metod Monte Carlo v programskem jeziku Matlab.

```
1 function result = MonteCarloIntegral(n)
2 r = -1 + 5 .* rand(1, n);
3 z = r.^2 + 4;
4 result = 5 * sum(z) / n;
```

V vrstici 2 kreiramo vektor naključnih števil med -1 in 4. To je območje, nad katerim računamo določeni integral. V vrstici 3 izračunamo vektor funkcijskih vrednosti funkcije $x^2 + 4$. Nato v vrstici 4 izračunamo povprečno vrednost vektorja funkcijskih vrednosti in množimo z območjem, nad katerim integriramo.

Poženimo zgornjo funkcijo trikrat z argumentom 10 in trikrat z argumentom 1000.

n = 10	n = 1000
35.0775	41.9780
47.5860	42.4844
32.3491	41.7659

Število n, ki je argument metode, določa število vzorcev, ki jih izračunamo. Večji je n, bolj natančen rezultat bomo dobili. V zgornjem primeru vidimo, da je pri $n = 10$ rezultat manj natančen in stabilen, kot pri $n = 1000$. Kako natančen rezultat lahko pričakujemo, si bomo ogledali v poglavju 7.

4.2 Pristranskost in napaka

Metode Monte Carlo imajo prednost predvsem pri večdimenzionalnih integralih, saj čas računanja ni odvisen od dimenzije integrala. Vseeno, osnovne koncepte je lažje razločiti na enostavnih primerih.

Zakon velikih števil nam zagotavlja, da bo cenilka konvergirala proti pravi vrednosti, ko večamo število vzorcev. Centralni limitni izrek pa nam da informacijo o velikosti napake cenilke pri končnem številu vzorcev [11].

Formalizirajmo prejšnje besede z enačbami. Recimo, da želimo izračunati naslednji integral:

$$a = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \tag{4.2}$$

Predpostavimo, da imamo mehanizem za določanje naključnih (oz. psevdonaključnih) števil. Generirajmo n vrednosti iz enakomerne porazdelitve na intervalu $I = [0, 1]$ in jih označimo z $U_i, i = 1, ..., n$. Če izračunamo vrednost funkcije $f(x)$ na teh n točkah in izračunamo povprečje, dobimo približek Monte Carlo:

$$\hat{a}_n = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} f(U_i). \tag{4.3}$$

Če je funkcija f integrabilna na intervalu [0, 1], potem nam strogi zakon velikih števil zagotavlja, da

$$\hat{a}_n \to a \text{ z verjetnostjo 1, če } n \to \infty.$$

Če je f kvadratno integrabilna, in nastavimo

$$\sigma_f^2 = \int_0^1 (f(x) - a)^2\,\mathrm{d}x, \tag{4.4}$$

ki je napaka razlike $\hat{a}_n - a$ porazdeljena normalno z aritmetično sredino 0 in standardnim odklonom $\sigma_f/\sqrt{n}$.

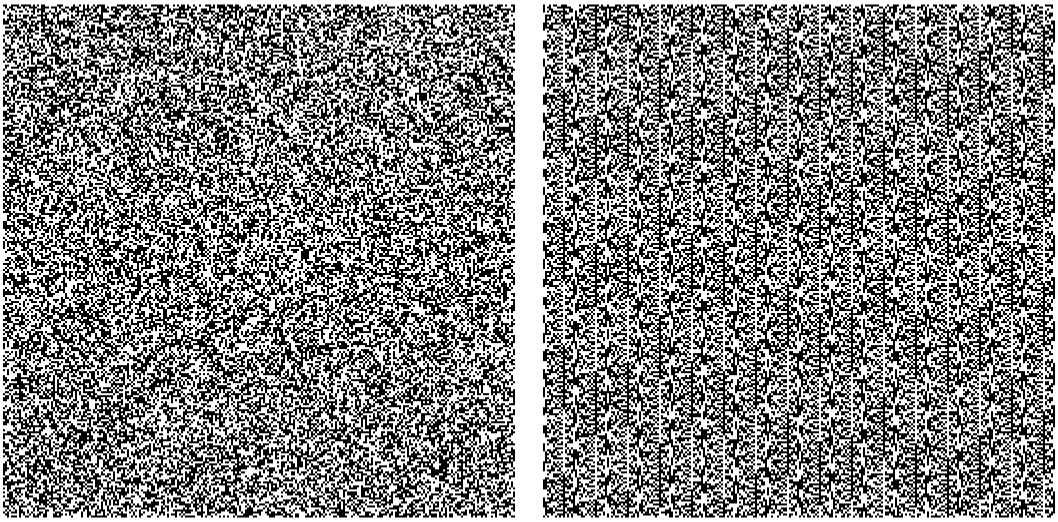
Poglavje 5

Generiranje psevdonaključnih števil

Pri uporabi metod Monte Carlo moramo biti pozorni na to, kakšna je funkcija generiranja psevdnonaključnih števil. S pomočjo računalnika samega popolnoma naključnih števil ne moremo generirati. Računalnik je namreč deterministični stroj in sam po sebi nima nobene lastnosti, ki bi bila naključna.

Na spletni strani `http://www.random.org` lahko pridobivamo naključna števila, katerih podlaga je amosferski šum [6]. Tu generator dobiva naključnost izven računalnika in ta naključnost je lahko "boljša"od računalnika samega. Kako dobra je naključnost, se določi s tem, koliko in kakšne statistične lastnosti ima funkcija generiranja psevdonaključnih števil. Več kot ima statističnih lastnosti, ki veljajo za prava naključna števila, boljša je.

Na sliki 5.1 je prikazana vizualizacija naključnih števil s pomočjo spletne strani `http://www.random.org` ter `rand()` funkcije v jeziku PHP. Že na prvi pogled vidimo, da je leva slika bolj naključna od desne.



Slika 5.1: Vizualizacija naključnih števil s spletne strani `http://www.random.org` (na levi), `rand()` funkcija v jeziku PHP na operacijskem sistemu Microsoft Windows (na desni)

5.1 Psevdonaključna števila

Bi lahko vseeno kako generirali naključna števila le s pomočjo računalnika? Čisto naključna števila ne. Lahko pa generiramo t.i. *psevdonaključna števila.* Pri tem moramo biti pozorni na to, da imajo generirana števila čim več statističnih značnilnosti, ki veljajo za naključna števila.

Če generirana psevdonaključna števila nimajo dovolj dobrih statističnih značilnosti, se lahko zgodi, da nam bo rezultat metod Monte Carlo odražal napake psevdonaključnih števil. To v preveliki meri naredi rezultat neuporaben.

V nadaljevanju bomo uporabljali tudi izraz naključna števila, čeprav pri tem v resnici mislimo psevdonaključna števila.

Če imamo dober generator enakomerno porazdeljenih naključnih števil na intervalu $[0, 1]$, lahko s pomočjo raznih metod dobimo naključna števila, ki so porazdeljena s ciljno distribucijo. V primeru metod Monte Carlo bomo želeli dobiti naključna števila, ki so porazdeljena *standardno normalno*, to pomeni, da so porazdeljena normalno s povprečno vrednostjo 0 in varianco 1. Postopek generiranja teh je tak, da najprej generiramo enakomerno porazdeljena naključna števila in jih pretvorimo v standardno normalno porazdeljena naključna števila.

5.2 Generiranje enakomerno porazdeljenih naključnih števil

Eden od načinov generiranja enakomerno porazdeljenih naključnih števil na intervalu $[0,1]$ bazira na linearnih kongruentnih generatorjih (angl. linear congruential generator, LCG) [5]. LCG generira zaporedje nenegativnih števil z naslednjim predpisom: če imamo Z_{i-1}, generiraj naslednje število v zaporedju tako:

$$Z_i = (aZ_i + c) \mod m, \tag{5.1}$$

kjer so a, c in m so ustrezno izbrane konstante. Ker želimo dobiti število na intervalu $[0,1]$, je naše psevdonaključno število Z_i/m.

Zapišimo metodo LCG v algoritmični obliki.

```
function [Z] = LCG(a, c, m, seed, n)
prev = seed;
Z = [];
for i = 1 : n
    next = mod(a*prev+c, m);
    Z = [Z; next / m];
    prev = next;
end
```

Če zaženemo algoritem z naslednjimi vhodnimi parametri: $a = 5$, $c = 3$, $m = 16$, $seed = 7$ in $n = 20$ dobimo naslednji razultat:

```
0.3750
0.0625
```

```
    0.5000
    0.6875
    0.6250
    0.3125
    0.7500
    0.9375
    0.8750
    0.5625
         0
    0.1875
    0.1250
    0.8125
    0.2500
    0.4375
    0.3750
    0.0625
    0.5000
    0.6875
```

S prvim pogledom na številke bi morda pomislili, da so naključne, vendar v njih ni nič naključnega. Generira jih popolnoma deterministični algoritem, ki je definiran z vhodnimi parametri. Opazimo tudi, da se pri 17. generirani številki število 0,3750 ponovi in se vsa števila za njo začnejo ponavljati kot na začetku zaporedja.

S pravilno izbiro dovolj velikih a, c in m lahko dobimo zadovoljivo dober generator naključnih števil. Metoda LCG je lahko dovolj dobra, odvisno od naših potreb. Uporabljal jo je še Matlab 4. Vendar pa ima metoda LCG resne pomankljivosti in je bolje, da je ne uporabljamo. Obstajajo boljše metode.

Novejše različice programa Matlab uporabljajo metodo vektorjev stanj (angl. state vector). Generator ima 35 komponent in z ukazom `rnd(seme)`, kjer je `seme` nenegativno celo število (angl. non-negative integer), določimo začetno stanje generatorja.

Z vsakim stanjem so generirana števila točno določena in lahko ta "naključna"števila reproduciramo, če to želimo. V primeru, da začetnega stanja ne želimo kontrolirati, za stanje uporabimo niz `'shuffle'`. V starejših različicah Matlaba je v takih primerih uradna dokumentacija priporočala seme, generirano z ukazom `sum(100*clock)`.

5.3 Box-Mullerjeva metoda izračuna standardno normalnih slučajnih spremenljivk

Recimo, da imamo dovolj dober generator enakomerno porazdeljenih naključnih števil na intervalu $[0, 1]$. Za potrebe metod Monte Carlo potrebujemo generator standardno normalno porazdeljenih naključnih števil oz. normalno porazdeljenih naključnih števil na intervalu $[-\infty, \infty]$ s povprečjem 0 in varianco 1 ($N(0, 1)$).

Eden od algoritmov za izračun standardno normalno porazdeljenih slučajnih spremenljivk iz enakomerno porazdeljenih slučajnih spremenljivk je *Box-Mullerjeva metoda*. Metoda generira dve standardno normalno porazdeljeni spremenljivki, kot vhod pa vzame dve enakomerno porazdeljeni spremenljivki na intervalu $[0, 1]$. Vhodni števili morata biti neodvisni, metoda pa nam tako vrne neodvisni števili [12].

Bazira na dveh lastnostih bivariatnih normalnih spremenljivk: če $Z_1, Z_2 \sim N(0, 1)$, potem je

i. $R = Z_1^2 + Z_2^2$ porazdeljena eksponentno s srednjo vrednostjo 2:

$$P(R \leq x) = 1 - e^{-x/2} \tag{5.2}$$

ii. točka (Z_1, Z_2) enakomerno porazdeljena na krogu, ki se nahaja na izhodišču in ima polmer $\sqrt{R}$.

Poglejmo si ta algoritem zapisan v programskem jeziku Matlab.

```
function [Z1, Z2] = BoxMuller(U1, U2)
R = sqrt(-2*log(U1));
V = 2*pi*U2;
Z1 = R*cos(V);
Z2 = R*sin(V);
```

Izpišimo rezultate metode, kjer kot argumente `U1` in `U2` podamo Matlabovo funkcijo `rand()`.

U1; U2	Z1; Z2
0,4565; 0,2361	0,1091; 1,2475
0,4507; 0,6653	-0,6408; -1,0878
0,1648; 0,1222	1,3663; 1,3188
0,4877; 0,7766	0,1993; -1,1816
0,4324; 0,1837	0,5243; 1,1840

Poglavje 6

Geometrično Brownovo gibanje

Kako si lahko sedaj z generiranimi naključnimi števili pomagamo? Oblikovati jih moramo v obliko, kjer jih lahko uporabimo. V tem poglavju bomo generirana naključna števila oblikovali tako, da bodo primerna za vrednotenje opcij. Ideja je naslednja: simulirali bomo pot osnovnega finančnega instrumenta, od katerega je opcija odvisna in izračunali, koliko bi opcija pri tej poti cene izplačala. Nato bomo generirali več takih poti, vsako s svojo množico naključnih števil.

6.1 Wienerjev proces oz. Brownovo gibanje

Ideja, ki jo bomo tu opisali, je bolj natačno definirana z izrazom *Wienerjev proces* kot z izrazom *Brownovo gibanje*. Slednje je navidezno naključno gibanje delcev v prostoru s hitro premikajočimi atomi ali molekulami, ki ga je opazil škotski botanist Robert Brown in kasneje razložil Albert Einstein [7]. Vseeno se za Wienerjev proces pogosto uporablja besedna zveza Brownovo gibanje kot sinonim in jo bomo uporabljali tudi v tej diplomski nalogi.

Wienerjev proces oz. *Brownovo gibanje* na intervalu $[0, T]$ je stohastični proces $W(t), 0 \leq t \leq T$ z naslednjimi lastnostmi:

i. $W(0) = 0$

ii. preslikava $t \to W(t)$ je, z verjetnostjo 1, zvezna funkcija na intervalu $[0, T]$

iii. prirastki $\{W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), ..., W(t_k) - W(t_{k-1}\}$ so neodvisni za vse k in vse $0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_k \leq T$

iv. $W(t) - W(s) \sim N(0, t - s)$ za vse $0 \leq s < t \leq T$

Iz teh lastnosti sledi

$$W(t) \sim N(0, t), \tag{6.1}$$

za vse $0 < t \leq T$.

6.2 Geometrično Brownovo gibanje

V finančni matematiki se za model predvidevanja prihodnjih cen finančnih instrumentov pogosto uporablja geometrično Brownovo gibanje. Enačba, ki opisuje model, je

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW(t). \tag{6.2}$$

W je Wienerjev proces oz. Brownovo gibanje, ki je slučajna spremenljivka. Parameter μ je povprečni donos in σ volatilnost cene delnice [8].

Sprogramirajmo geometrično Brownovo gibanje z uporabo Matlaba.

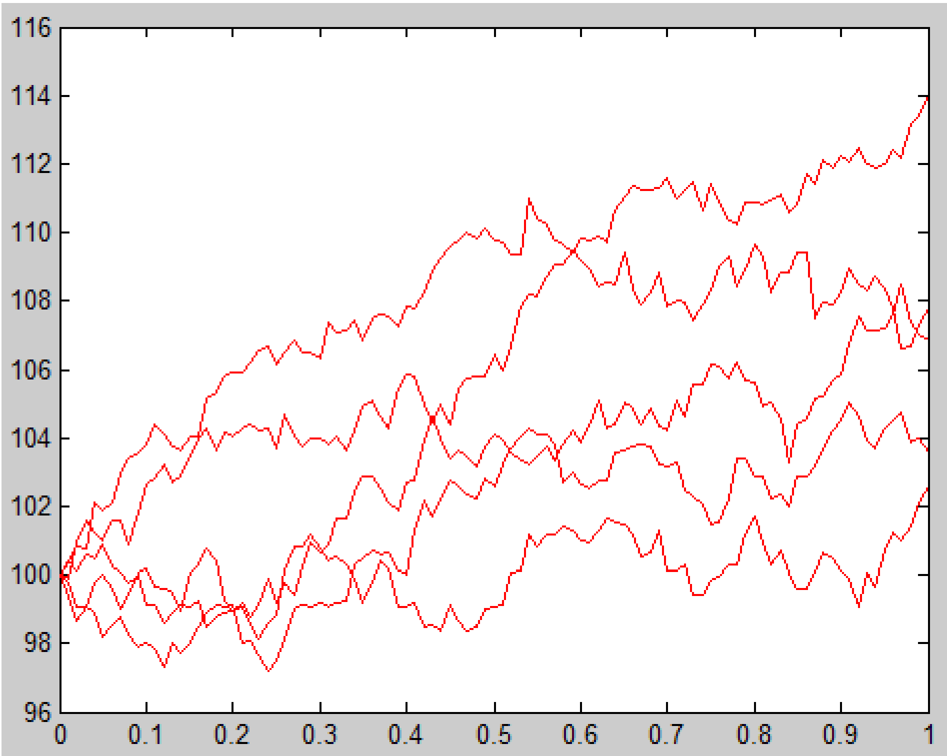
```
mu = 0.05;
sigma = 0.005;
T = 1;
dt = 0.01;
S_0 = 100;

S = [S_0];
S_i = S_0;
for i = 1 : T / dt
    S_i = S_i + mu*dt*S_i + sigma*randn()*S_i;
    S = [S S_i];
```

```
end
plot(0:dt:T, S, 'r')

hold on;
```

V enačbi geometričnega Brownovega gibanja smo uporabili parametra $\mu = 0,05$, $\sigma = 0.005$. Začetna cena instrumenta je $S(0) = 100$, računamo pa pot cene do časa $T = 1$. Na računalniku za korak ne moremo uporabiti neskončno majhnega števila, zato izberemo končno majhen, vendar še vedno dovolj majhen korak $dt = 0,01$.



Slika 6.1: 5 poti geometričnega Brownovega gibanja

Vizualni rezultat programa, če ga poženemo 5x, vidimo na sliki 6.1.

V zgornjem primeru smo simulirali celotno pot finančnega instrumenta od časa 0 do časa T. V nekaterih primerih nas zanima le končna cena simulirane poti (v času T) - po kateri poti se je cena gibala je nepomembno. V teh primerih ni potrebno izračunati celotne poti in lahko z uporabo stohastičnih diferencialnih enačb iz začetne cene $S(0)$ direktno izračunamo končno ceno $S(T)$.

Rešitev stohastične diferencialne enačbe (6.2) je

$$S(T) = S(0)e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W(T)}. \tag{6.3}$$

Namesto izračuna 5 poti, kot smo to naredili na sliki 6.1, bi sedaj izračunali le 5 končnih cen. Na sliki bi se te točke nahajale na skrajnem desnem robu grafa. Tako izračunane točke se po vsej verjetnosti ne bi skladale z izračunanimi robnimi točkami, ko smo računali celotno pot. Razlog je ta, da izračuni temeljijo na naključnosti. Tudi prvih n izračunanih točk se po vsej verjetnosti ne sklada z izračunanimi naslednjimi n točkami, po katerikoli metodi. Vendar ko se število teh izračunov veča, njihova povprečna vrednost konvergira proti neki vrednosti, ki je za obe metodi enaka.

6.3 Do tveganja nevtralna verjetnost

Eden od manj intuitivnih vendar zelo pomembnih konceptov v finančni matematiki je teorija z imenom *do tveganja nevtralna verjetnost* (tudi *ekvivalentna martingalska verjetnost*). Ime je prevedeno iz angleške besedbe zveze *risk-neutral probability* in morda bi bila za to idejo boljša oznaka *do tveganja neobčutljiva verjetnost* ali *tveganju prilagojena verjenost*.

Kakor koli že, mi bomo uporabljali ustaljeno oznako. Do tveganja nevtralna verjetnost je taka verjetnost, da je sedanja vrednost pričakovane vrednosti premoženja v bodočnosti enaka trenutni vrednosti premoženja [9].

Zapišimo prejšnji stavek z enačbo

$$S_0 = E_Q(S_T), \tag{6.4}$$

kjer je S_0 trenutna vrednost premoženja, S_T prihodnja vrednost premoženja, E_Q pa matematično upanje, ki za verjetnost uporabi do tveganja nevtralno verjetnost (ne prave verjetnosti).

Do tveganja nevtralna verjetnost v splošnem ni enaka pravi verjetnosti v realnem svetu.

Poglejmo si primer. Recimo, da je naša delnica v tem trenutku vredna 100€, v prihodnje pa vemo, da bo vredna ali 101€ ali 99€. Zanima nas, kakšna je do tveganja nevtralna verjetnost. Podatke vstavimo v prejšnjo enačbo

$$100€ = q_1 * 101€ + q_2 * 99€.$$

q_1 in q_2 sta verjetnosti, da se bo zgodila ali cena 101€ ali 99€. Vsaka verjetnost ima lastnost, da je vsota vseh verjetnosti enaka 1, torej $q_1 + q_2 = 1$. Rešitev zgornje enačbe je $q_1 = q_2 = 0.5$.

Dejanska realna verjetnost bi lahko bila taka, da v je v 60% primerov prihodnja cena 101€ in v 40% primerov pa 99€. Ampak zakaj nas prava verjetnost tukaj ne zanima? Recimo, da izdamo (prodamo) evropsko nakupno opcijo. Na trgu, kjer arbitraža ne obstaja in je trg poln, lahko s pravilnim oblikovanjem portfelja (imenujemo ga arbitražni portfelj) popolnoma zavarujemo izdano opcijo. To pomeni, da ni pomembno, kakšna bo cena osnovnih instrumentov v prihodnosti, v vsakem primeru bomo izdano opcijo lahko poplačali. Da na trgu ni arbitraže, pomeni, da s takim portfeljem ne moremo zaslužiti nič. Drugače povedano, netvegan dobiček ne obstaja - če želimo zaslužiti, moramo tvegati.

Če nam je vseeno, kaj se dogaja s temi cenami, nas tveganje, ali cena zraste ali pade, ne zanima in smo do tveganja nevtralni.

Uporaba do tveganja nevtralne verjetnosti je smiselna le v primeru, ko lahko z arbitražnim portfeljem izničimo celotno tveganje. Če tako zavarovanje ni možno, je uporaba do tveganja nevtralne verjetnosti brez pomena.

6.3.1 Do tveganja nevtralno geometrično Brownovo gibanje

Do tveganja nevtralno geometrično Brownovo gibanje je tako geometrično Brownovo gibanje, kjer namesto povprečnega donosa delnice μ vzamemo netvegano obrestno mero r (r je manjši od μ). To je umetno zgrajeno geometrično Brownovo gibanje, ki z dejansko potjo cene finančnega instrumenta nima povezave, razen s tem, da je volatilnost σ pri obeh enaka. Model zapišemo z enačbo

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = rdt + \sigma dW(t). \tag{6.5}$$

Podlaga tega Brownovega gibanja je do tveganja nevtralna verjetnost.

Razlog za uporabo modela s povprečnim donosom r in ne μ je, da če pravilno oblikujemo svoj portfelj, lahko zavarujemo opcijo in nam je vseeno ali se cena osnovne delnice premakne navzgor ali navzdol. Zavarovanje odstrani odvisnost vrednosti opcije od vrednosti delnice. Ker nas sedaj ne zanima ali gre cena delnice navzgor ali navzdol, so za nas tudi prave verjetnosti za premik cene delnice navzgor in navzdol nepomembne.

V podpoglavju 7.5 si bomo ogledali pričakovano vrednost opcije, ko svoje pozicije ne moremo zavarovati.

Poglavje 7

Uporaba metod Monte Carlo za vrednotenje opcij

Sedaj bomo združili vse koncepte, ki smo jih vpeljali do sedaj in s pomočjo metod Monte Carlo vrednotili opcije. Pot po kateri se giblje cena osnovnega finančnega instrumenta bomo simulirali z do tveganja nevtralnim geomeričnim Brownovim gibanjem. Predpostavljali bomo, da osnovni finančni instrument ne izplača nobenih dividend (vrednotenje bi bilo sicer nekoliko bolj zapleteno).

7.1 Vrednotenje navadnih opcij

V poglavju 6 smo opisali do tveganja nevtralno geometrično Brownovo gibanje

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = rdt + \sigma dW(t). \tag{7.1}$$

To je enačba, ki bo modelirala gibanje delnice, za katero računamo opcijo.

Cena delnice v času $S(T)$ je porazdeljena lognormalno oz. njen logaritem je porazdeljen normalno.

Slučajna spremenljivka $W(T)$ je porazdeljena normalno, kjer je aritmetična sredina 0 in standardna deviacija T. Ista parametra ima tudi porazdelitev

$\sqrt{T}Z$, kjer je Z slučajna spremenljivka, ki je porazdeljena standardno normalno. Zato lahko ceno delnice v času T zapišemo tudi kot

$$S(T) = S(0)e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z} \tag{7.2}$$

Recimo, da želimo izračunati sedanjo vrednost evropske nakupne opcije, ki ima čas zapadlosti T in izvršilno ceno K. Trenutna cena osnovnega instrumenta je $S(0)$, na voljo imamo tudi volatilnost cene σ in netvegano obrestno mero r.

Sedanja vrednost te opcije je $C := E[e^{-rT}max\{S(T) - K, 0\}]$. Vrednost lahko ocenimo z naslednjim algoritmom.

```
sims = zeros(n, 1);
for i = 1:n
    Z = randn(1);
    S = S_0 * exp( (r - 0.5*sigma^2)*T + sigma * sqrt(T) * ...
        Z );
    c = exp(-r*T) * S;
    sims(i) = c;
end
povprecen_c = mean(c)
```

Vrednost spremenljivke `povprecen_c` je cenilka sedanje vrednosti opcije. Poimenujmo jo $\hat{C}$. Je *nepristranska*, saj velja

$$E[\hat{C}] = C = E[e^{-rT}max\{S(T) - K, 0\}]. \tag{7.3}$$

Je tudi *dosledna*, kar pomeni da $\hat{C} \to C$ ko $n \to \infty$.

Ocenimo interval zaupanja za nek odstotek (verjetnost, da se C nahaja na tem intervalu, je enaka temu odstotku). To lahko naredimo za končne in vsaj srednje velike n. Naj bo

$$s_C = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(C_i - \hat{C}_n)^2} \tag{7.4}$$

ocena standardnega odklona vzorca in naj bo z_δ $1-\delta$ kvantil standardne normalne porazdelitve ($\Phi(z_\delta) = 1-\delta$). Potem je

$$\hat{C}_n \pm z_{\delta/2}\frac{s_C}{\sqrt{n}} \tag{7.5}$$

interval zaupanja. Ker standardni odklon ni znan v naprej in je ocenjen, lahko namesto $z_{\delta/2}$ uporabimo ustrezni kvantil iz Studenteve porazdelitve z $n-1$ prostostnimi stopnjami, kar nam da nekoliko večji interval. V obeh primerih, verjetnost, da interval pokriva C, se bliža $1-\delta$ ko $n \to \infty$.

Metodo Monte Carlo lahko uporabimo že s pomočjo komercialnih ali brezplačnih preglednic (npr. Microsoft Excel, Open Office Calc) [10].

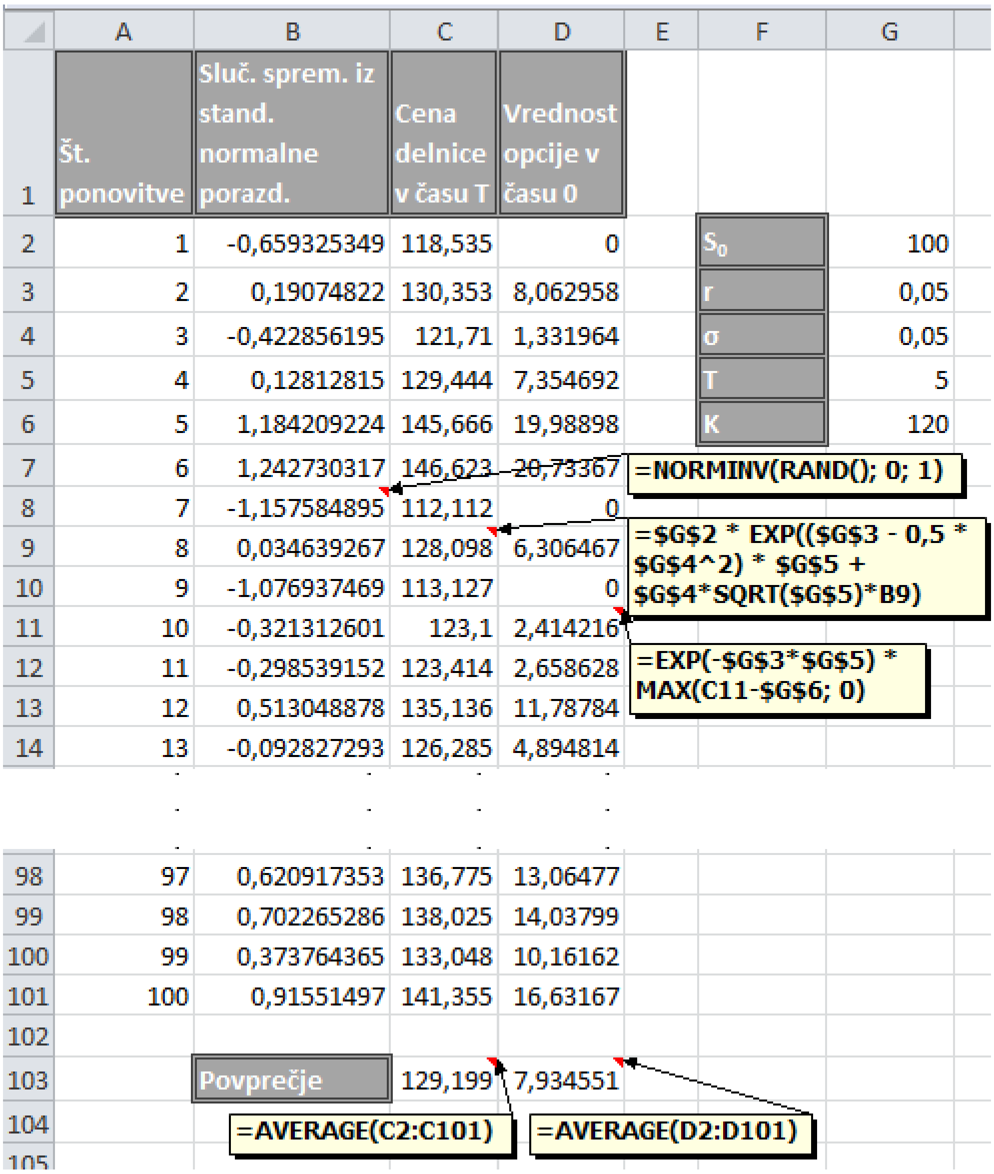
7.2 Recept za vrednotenje opcij

Metode Monte Carlo so v svoji osnovni obliki zelo enostavne. Zapišimo korake, ki jih je potrebno narediti, da opcijo vrednotimo [10].

Recept za vrednotenje opcij s pomočjo metod Monte Carlo

1. Z uporabo enačbe 6.2 simuliraj pot cene osnovnega finančnega instrumenta od sedanjega trenutka do trenutka, ko opcija zapade. Za μ uporabi netvegano obrestno mero.
2. Izračunaj kakšno izplačilo bi opcija izplačala pri izračunani poti cene.
3. Večkrat ponovi zgornja dva koraka.
4. Izračunaj povprečno vrednost zgornjih izplačil opcij.
5. Diskontiraj to povprečno vrednost na sedanji trenutek.

V zadnjem koraku dobimo ceno, naj bi ob predpostavki, da arbitraža ne obstaja, bila cena opcije.



	A	B	C	D	E	F	G
1	Št. ponovitve	Sluč. sprem. iz stand. normalne porazd.	Cena delnice v času T	Vrednost opcije v času 0			
2	1	-0,659325349	118,535	0		S_0	100
3	2	0,19074822	130,353	8,062958		r	0,05
4	3	-0,422856195	121,71	1,331964		σ	0,05
5	4	0,12812815	129,444	7,354692		T	5
6	5	1,184209224	145,666	19,98898		K	120
7	6	1,242730317	146,623	20,73367			
8	7	-1,157584895	112,112	0			
9	8	0,034639267	128,098	6,306467			
10	9	-1,076937469	113,127	0			
11	10	-0,321312601	123,1	2,414216			
12	11	-0,298539152	123,414	2,658628			
13	12	0,513048878	135,136	11,78784			
14	13	-0,092827293	126,285	4,894814			
	.	.	.	.			
	.	.	.	.			
	.	.	.	.			
98	97	0,620917353	136,775	13,06477			
99	98	0,702265286	138,025	14,03799			
100	99	0,373764365	133,048	10,16162			
101	100	0,91551497	141,355	16,63167			
102							
103		Povprečje	129,199	7,934551			
104							
105							

Slika 7.1: Izračun cene opcije v času 0

7.3 Black-Scholesova formula

Matematično upanje $E[e^{-rT}max\{S(T)-K,0\}]$, ki je sedanja vrednost opcije, lahko tudi izračunamo na determinističen način. To je integral, ki je odvisen od lognormalne gostote $S(T)$. Lahko ga izračunamo s pomočjo standardne normalne kumulativne funkcije Φ kjer izračunamo $BS(S(0),\mu,T,r,K)$ z enačbo

$$BS(S,\mu,T,r,K) = \\ = S\Phi(\frac{log(S/K)+(r+\mu^2/2)T}{\mu\sqrt{T}}) - e^{-rT}K\Phi(\frac{log(S/K)+(r-\mu^2/2)T}{\mu\sqrt{T}}). \tag{7.6}$$

To je Black-Scholesova formula za izračun evropske nakupne opcije [11].

Z uporabo te enačbe lahko natančno izračunamo zgornje matematično upanje in s tem sedanjo vrednost opcije. Če imamo natančno formulo, zakaj bi potem uporabljali metode Monte Carlo in s tem računali veliko število Brownovih gibanj? Res je, da za primer navadne evropske nakupne opcije metode Monte Carlo niso primerne in obstajajo lažji in hitrejši izračuni. Ta primer smo si pogledali, ker je enostaven in se na njem da koncept metod Monte Carlo najlažje razložiti.

Toda ko opcije postanejo bolj kompleksne, so metode Monte Carlo velikokrat najboljši in tudi edini način, da jih vrednotimo.

7.4 Izračun vrednosti azijskih opcij

Metode Monte Carlo imajo za izračun vrednosti opcij pred drugimi metodami prednost predvsem takrat, ko je izplačilo opcije odvisno ne le od cene finančnega instrumenta ob izplačilu (navadna evropska, ameriška opcija), ampak tudi od poti, po kateri je cena osnovnega finančnega instrumenta potovala. Primeri takih opcij so azijske opcije.

Kot je bilo že omenjeno, je izplačilo azijske opcije odvisno od več trenutkov na poti cene osnovnega finančnega instrumenta.

7.5 Pričakovana vrednost opcij v nezavarovani poziciji

V vseh primerih do sedaj smo pri vrednotenju opcij predpostavljali, da svojo opcijo vedno zavarujemo (angl. hedge). V kolikor smo popolnoma zavarovani, nas pravzaprav ne zanima, kam dejansko se bo cena osnovnega finančnega instrumenta premaknila, ali bo šla navzgor ali navzdol. V vsakem primeru profitiramo enako.

Kako pa ocenimo pričakovano vrednost opcije, če nimamo zavarovanja? Recimo, da smo kupili le eno opcijo in nas sedaj zanima pričakovana vrednost.

Izračun tega po zelo podoben kot pri zavarovani poziciji. Izračunamo n simulacij poti z geometričnim Brownovim gibanjem, po kateri se osnovni finančni instrument giblje, izračunamo povprečje ter sedanjo vrednost povprečja. Toda sedaj se pojavi ena pomembna razlika. Pri do tveganja nevtralnem geometričnem Brownovem gibanju, ki je simulacija cen instrumentov za zavarovano pozicijo, smo v enačbi 7.7 za μ vzeli netvegano obrestno mero.

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW(t). \tag{7.7}$$

V tem primeru moramo za μ vzeti *realen* povprečni donos, ki ga za instrument pričakujemo, in ne netvegane obrestne mere.

Poglavje 8

Zaključek

V diplomski nalogi smo se osredotočili na uporabo metod Monte Carlo za vrednotenje opcij. Ogledali smo si kaj opcije so, zakaj so pomembne in kje z njimi trgujemo. Za pravilno delovanje metod Monte Carlo so ključni generatorji psevdonaključnih števil, ki smo jih v diplomski nalogi opisali. Videli smo matematično teorijo za metodami Monte Carlo in si ogledali praktičen algoritem.

Ideja algoritma je razmeroma preprosta in jo lahko zapišemo v nekaj korakih.

- Simuliraj pot cene osnovnega finančnega instrumenta od sedanjega trenutka do trenutka, ko opcija zapade. Pri tem uporabi do tveganja nevtralno verjetnost.
- Izračunaj koliko bi opcija izplačala pri izračunani poti cene.
- Večkrat ponovi zgornja dva koraka.
- Izračunaj povprečno vrednost izplačil.
- Diskontiraj povprečno vrednost na sedanji trenutek.

Ti koraki so dovolj enostavni, da lahko metode Monte Carlo implementiramo celo z uporabo brezplačnih ali komercialnih preglednic. Eno tako implementacijo smo pokazali v tej diplomski nalogu. Vseeno pa je kvaliteten algoritem najboljše napisati z uporabo programskega jezika. Tu smo se odločili za Matlab.

Pri implementaciji metod Monte Carlo je pomembno, da uporabimo kvaliteten generator psevdonaključnih števil. Če generator ne vsebuje dovolj pravih statističnih lastnosti naključnosti, ki so za nas pomembne, lahko v rezultatih vidimo vzorce, ki so v resnici rezultat slabega generatorja.

Rezultat, ki nam ga algoritem vrne, je kvečjemu toliko dober, kot so dobre predpostavke. Že majhen premik vhodnega parametra, na primer σ v geometričnem Brownovem gibanju, lahko izračunano ceno opcije zelo premakne. Zavedati se tudi moramo, da model ni enak realnosti in se na nek specifičen rezultat ne smemo preveč zanašati.

Literatura

[1] Wikipedia. Financial market. Dostopno na:
http://en.wikipedia.org/wiki/Financial_market. Zadnji dostop: 12.8.2013

[2] Biro bonus. Dividende in kapitalski dobiček. Dostopno na:
http://www.biro-bonus.si/koristne-informacije/dobicek/dividende-in-kapitalski-dobicek. Zadnji dostop: 12.8.2013

[3] Investopedia. Dostopno na:
http://www.investopedia.com. Zadnji dostop: 19.8.2013

[4] Bill Byrne. Simulation - Option Pricing Using Matlab. Dostopno na:
http://www.youtube.com/watch?v=INymyeOsvv0. Zadnji dostop: 17.7.2013

[5] Paolo Brandimarte. *Numerical Methods in Finance & Economics.* Wiley-Interscience, 2006.

[6] RANDOM.ORG. Dostopno na:
http://www.random.org. Zadnji dostop: 15.6.2013

[7] Einstein Year. Brownian motion. Dostopno na:
http://www.einsteinyear.org/facts/brownian_motion/. Zadnji Dostop: 25.8.2013

[8] Wikipedia. Geometric Brownian motion. Dostopno na: `http://en.wikipedia.org/wiki/Geometric_Brownian_motion`. Zadnji dostop: 12.8.2013

[9] Wikipedia. Risk-neutral measure. Dostopno na: `http://en.wikipedia.org/wiki/Risk-neutral_measure`. Zadnji dostop: 25.8.2013

[10] Paul Wilmott. *Paul Wilmott Introduces Quantiative Finance*. John Wiley & Sons Ltd, 2007.

[11] Paul Glasserman. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springers, 2003.

[12] Peter Forsyth. An Introduction to Computational Finance Without Agonizing Pain. Dostopno na: `https://cs.uwaterloo.ca/~paforsyt/agon.pdf`. Zadnji dostop: 23.8.2013