

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA RAČUNALNIŠTVO IN INFORMATIKO

Christian Zakrajšek

**KOMPLEKSNA RAVNINA IN
DVODIMENZIONALNE
GEOMETRIJE**

DIPLOMSKO DELO UNIVERZITETNEGA ŠTUDIJA

Mentor: prof. dr. Nežka Mramor Kosta

Ljubljana, 2008

Rezultati diplomskega dela so intelektualna lastnina Fakultete za računalništvo in informatiko Univerze v Ljubljani. Za objavljanje ali izkoriščanje rezultatov diplomskega dela je potrebno pisno soglasje Fakultete za računalništvo in informatiko ter mentorja.

Besedilo je oblikovano z urejevalnikom besedil L^AT_EX.

Namesto te strani **vstavite** original izdane teme diplomskega dela s podpisom mentorja in dekana ter žigom fakultete, ki ga diplomant dvigne v študentskem referatu, preden odda izdelek v vezavo!

Zahvala

Zahvaljujem se svoji družini, ki mi je omogočila študij, me pri njem podpirala in spodbujala k dobrim ocenam. Zahvaljujem se prijateljem in sošolcem, ki so mi stali ob strani in mi s tem olajšali študij. Zahvaljujem se mentorici prof. dr. Nežki Mramor Kosta za strokovno pomoč in nasvete. Fakulteti za računalništvo in informatiko se zahvaljujem, ker mi je omogočila delo s programskim orodjem Mathematica.

Kazalo

Povzetek	1
1 Uvod	5
2 Möbiusove transformacije	7
2.1 Linearna funkcija	8
2.2 Kompleksna inverzija in zrcaljenje prek enotskega kroga	14
2.3 Zrcaljenje prek kroga K	15
2.4 Konformnost preslikav	21
3 Geometrije dveh dimenzij	23
3.1 Kaj je geometrija?	23
3.2 Geometrijska enakost	24
3.3 Neevklidska geometrija	27
3.3.1 Lastnosti neevklidske geometrije	27
3.4 Geometrija na ukrivljenih ploskvah	28
3.4.1 Ukrivljenost ploskev	30
3.5 Geometrije višjih dimenzij	31
4 Evklidska geometrija	32
4.1 Transformacijska grupa \mathcal{G}	32
4.2 Togi premiki kot zrcaljenja	34
4.3 Podobnost	35
5 Sferična geometrija	38
5.1 Sferični trikotnik	38
5.2 Transformacijska grupa \mathcal{G}	40
5.3 Preslikava s sfere Σ na \mathbb{C}	42
5.4 Stereografska projekcija	44

5.5	Kompleksne funkcije in sfera	48
6	Hiperbolična geometrija	50
6.1	Preslikava s sfere na zgornjo polravnino	51
6.2	Hiperbolične premice in razdalja	53
6.3	Transformacijska grupa \mathcal{G}	57
6.3.1	Rotacija	58
6.3.2	Rotacija v limiti	59
6.3.3	Premik	59
7	Demonstracije v Mathematici	61
7.1	Zrcaljenje prek enotskega kroga	62
7.1.1	Krožnica	63
7.1.2	Elipsa	64
7.1.3	Hiperbola	66
7.1.4	Parabola	66
7.2	Evklidska geometrija in linearna funkcija	67
7.3	Sferična geometrija	71
7.4	Hiperbolična geometrija	75
7.4.1	Hiperbolične premice	75
7.4.2	Rotacija v hiperbolični ravnini	77
8	Zaključek	80
	Seznam slik	81
	Literatura	83
	Izjava	85

Povzetek

Delo obsega opis uporabe kompleksnih števil v dvodimenzionalni geometriji in razvoj demonstracij s programskim orodjem Mathematica. V prvem delu, ki zajema drugo do šesto poglavje, sem predstavil kompleksne funkcije kot transformacije ravnine in razvil potrebno teorijo za opis ter razumevanje geometrije. Sferično in hiperbolično geometrijo sem definiriral kot geometrijo sfere in pseudosfere. Transformacijske grupe evklidske, sferične in hiperbolične geometrije sem tvoril z uporabo teorema treh zrcaljenj. Razvil sem izometrični preslikavi s sfere in pseudosfere na ravnino in transformacijske grupe treh geometrij opisal s transformacijami ravnine ter posledično Möbiusovimi transformacijami. V drugem delu, ki zajema sedmo poglavje, sem podal opis aplikacij, ki na podlagi ugotovitev prvega dela demonstrirajo dvodimenzionalne geometrije.

Ključne besede:

Möbiusova transformacija, zrcaljenje prek kroga, evklidska geometrija, ukri-
vljenost ploskve, sferična geometrija, hiperbolična geometrija, . . .

Abstract

This work comprises description of applications of complex numbers in two-dimensional geometry and demonstration development with programming tool Mathematica. In the first part, consisting of chapters two to six, I interpreted complex functions as transformations of the plain and developed theory, necessary for defining and understanding geometry. I interpreted spherical and hyperbolic geometry as geometry of the sphere and the pseudosphere. Transformation groups of Euclidean, spherical and hyperbolic geometries are formed using the three reflections theorem. I developed isometric mappings from the sphere and the pseudosphere to the plain and interpreted transformation groups of the three geometries as transformations of the plain and consequently as Möbius transformations. In the second part, consisting of chapter seven, I described applications which demonstrate two-dimensional geometries.

Keywords:

Möbius transformation, reflection in a circle, Euclidean geometry, surface curvature, spherical geometry, hyperbolic geometry, . . .

Poglavje 1

Uvod

Geometrija je eno najstarejših in še vedno živih področij matematike. Uporaba najrazličnejših geometrij je razširjena med vsemi naravoslovnimi vedami, med katerimi je tudi računalništvo. Hiperbolična geometrija in iz nje izpeljana metrika se uporablja na primer pri zajemanju podatkov [3] in v umetni inteligenci. Kompleksna števila so dobila svojo potrditev prav prek geometrije. V svojem začetku je število i kot koren števila -1 za matematike veljalo kot izmišljeno oziroma *imaginarno*. Od tod izvira izraz imaginarno število, ki danes pomeni večkratnik števila i . Zmotno so celo največji matematiki menili, da velja $\sqrt{-2}\sqrt{-3} = \sqrt{6}$.

Ob pojavu problemov, kako izračunati presečišče med premico in kvadratno ali kubično funkcijo, so se matematiki srečali z enačbami, nerešljivimi v množici realnih števil. V evklidski geometriji prvi problem ni vedno rešljiv, obstoj geometrijske rešitve drugega problema pa je očiten. Preteklo je še kar nekaj časa preden so se kompleksna števila uveljavila kot prava števila oblike $z = a + bi$. Števili a in b sta realni števili, i pa število, za katerega velja $i^2 = -1$. Razvoj kompleksne analize je imel močan vpliv na matematiko in omogočil nov pristop k do tistega časa nerešljivim problemom. Tekom zgodovine se je poglobljala tudi povezava med kompleksnimi števili in geometrijo.

Kompleksna števila so dobila geometrijsko predstavitev kot točke ali vektorji v ravnini. Na kompleksno število $z = a + bi$ lahko tako gledamo kot na točko v ravnini xy s kartezijskimi koordinatami (a, b) ali vektor od koordinatnega izhodišča do te točke. Tako ravnino označimo s \mathbb{C} in jo imenujemo *kompleksna ravnina*. Operacije nad kompleksnimi števili imajo lahko podoben pomen kot geometrijske operacije nad točkami ali vektorji v ravnini. Seštevanje kompleksnih števil lahko definiramo kot navadno vektorsko seštevanje, pri katerem velja paralelogramsko pravilo. Podobna geometrijska pravila lahko

podamo tudi za množenje in druge operacije nad kompleksnimi števili. S tako interpretacijo kompleksnih števil vsaka kompleksna funkcija $z \mapsto f(z)$ predstavlja transformacijo kompleksne ravnine.

Za izbrano tematiko sem se odločil zaradi zanimanja za kompleksno analizo in izjemne knjige Tristana Needhama, *Visual Complex Analysis* [7]. Ker sem želel ugotovitve čim bolj grafično predstaviti z razvojem interaktivne aplikacije, sem se soočil s problemom izbire programskega orodja. Med številnimi okolji za delo s 3D grafiko in modeliranje sem se odločil za programsko orodje Mathematica, ki v primerjavi z drugimi programskimi orodji najenostavneje privede do risanja grafov funkcij. Navdušile so me tudi demonstracije v Mathematici, ki jih najdemo na spletni strani Wolfram Demonstration Project [15].

Glavni del diplomskega dela sem predstavil v naslednjih šestih poglavjih. V drugem poglavju sem opisal Möbiusove transformacije in geometrijske lastnosti kompleksne aritmetike. Podrobno sem obravnaval linearne funkcije, kompleksno inverzijo in zrcaljenje prek kroga. V tretjem poglavju sem formaliziral opis geometrije z njeno transformacijsko grupo. Obdelal sem tudi osnove geometrije ukrivljenih ploskev in na koncu poglavja navedel najpomembnejše lastnosti neevklidskih geometrij. Četrto poglavje sem namenil evklidski geometriji in podal relacijo med njeno transformacijsko grupo in linearno funkcijo. V petem poglavju sem obravnaval lastnosti sferične geometrije kot prve izmed dveh neevklidskih geometrij. V osrednjem delu tega poglavja sem opisal stereografsko projekcijo, na koncu pa sem izpostavil povezavo med rotacijami sfere in Möbiusovimi transformacijami. V šestem poglavju sem opisal hiperbolično geometrijo, ki je še dandanes predmet mnogih matematičnih raziskovanj. Predstavil sem jo na modelu zgornje polravnine. Podal sem preslikavo s pseudosfere na zgornjo polravnino in posledice izpeljane hiperbolične metrike. Poglavje sem končal z obravnavo transformacijske grupe in njeno relacijo z Möbiusovimi transformacijami. V sedmem poglavju sem podal osnove za razumevanje izdelanih demonstracij v Mathematici. Opisal sem tudi zahtevnejše postopke in nekatere lastnosti programskega orodja Mathematica.

Poglavje 2

Möbiusove transformacije

Definicija 1. Möbiusove transformacije ali ulomljene linearne transformacije so funkcije kompleksne spremenljivke tipa:

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d}. \quad (2.1)$$

Obravnavo Möbiusovih transformacij nam olajša naslednja trditev.

Trditev 1. Vsako ulomljeno linearno transformacijo lahko zapišemo kot kompozitum dveh vrst elementarnih funkcij: linearne funkcije oblike $f(z) = Az + B$ in kompleksne inverzije $f(z) = 1/z$. Pri tem gre za zaporedje operacij

$$f_1(z) = z + \frac{d}{c} \quad (2.2)$$

$$f_2(z) = 1/z \quad (2.3)$$

$$f_3(z) = -\frac{(ad - bc)}{c^2}z \quad (2.4)$$

$$f_4(z) = z + \frac{a}{c}, \quad (2.5)$$

tako da velja

$$(f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)(z) = M(z). \quad (2.6)$$

Dokaz.

$$(f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)(z) = -\frac{(ad - bc)}{c^2} \frac{1}{z + \frac{d}{c}} + \frac{a}{c} \quad (2.7)$$

$$= \frac{-(ad - bc) + a(cz + d)}{c^2z + cd} \quad (2.8)$$

$$= \frac{acz + bc}{c^2z + cd} \quad (2.9)$$

$$= \frac{az + b}{cz + d} = M(z). \quad (2.10)$$

V primeru, ko velja $(ad - bc) = 0$, je funkcija konstantna preslikava, ki vsako točko z preslika v točko a/c . To je razvidno iz enačbe 2.4. Möbiusove transformacije tega tipa so singularne. V nadaljevanju bom obravnaval le nesingularne transformacije.

Obe elementarni funkciji imata velik geometrijski pomen. Linearna funkcija je v tesni povezavi z *evklidsko* geometrijo, kompleksna inverzija pa z *neevklidskimi* geometrijami. Tako linearna funkcija kot kompleksna inverzija sta posebni vrsti Möbiusovih transformacij s parametri $c = 0$ in $d = 1$ oziroma $a = 0, b = 1, c = 1$, in $d = 0$.

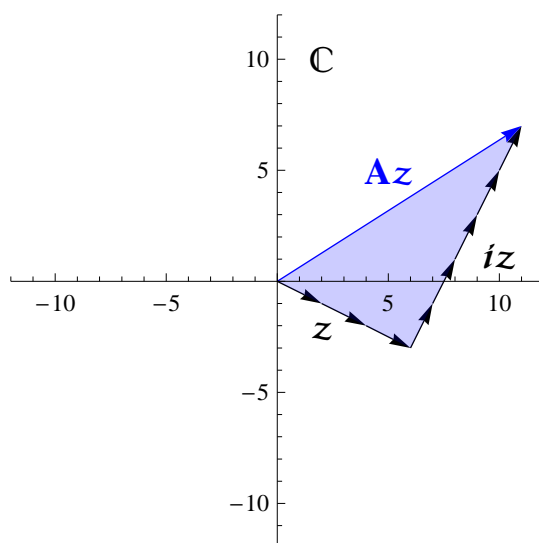
Za prikaz kompleksnih funkcij obstaja več načinov. V tem delu sem si izbral tehniko, pri kateri si kompleksno funkcijo predstavljamo kot *transformacijo kompleksne ravnine*. Pri tej tehniki učinek transformacije prikažemo tako, da izberemo neko podmnožico kompleksne ravnine (zanimivi kandidati so premice, krogi, trikotniki, ...) in proučimo sliko te podmnožice. Slika je nova podmnožica kompleksne ravnine, njena „oblika“ pa je tisto, kar daje predstavo o tem, kaj naredi transformacija. Pri tej tehniki je najbolj pomemben vizualni oziroma geometrijski pomen transformacije, kar je tudi namen tega dela.

2.1 Linearna funkcija

Linearna funkcija je funkcija tipa $f(z) = Az + B$, kjer sta A in B poljubni kompleksni števili. Najprej bom predstavil geometrijski pomen množenja in seštevanja kompleksnih števil.

Trditev 2. *Za neko točko z v kompleksni ravnini pomeni množenje z $A \in \mathbb{C}$ rotacijo te točke za $\arg(A)$ ter razteg za faktor $|A|$ s središčem v koordinatnem izhodišču.*

Dokaz. Trditev postane jasna, ko števili zapišemo v polarnih koordinatah $z = Re^{i\phi}$ in $A = Qe^{i\theta}$:

Slika 2.1: Množenje kompleksnih števil $(3 + 5i)z$.

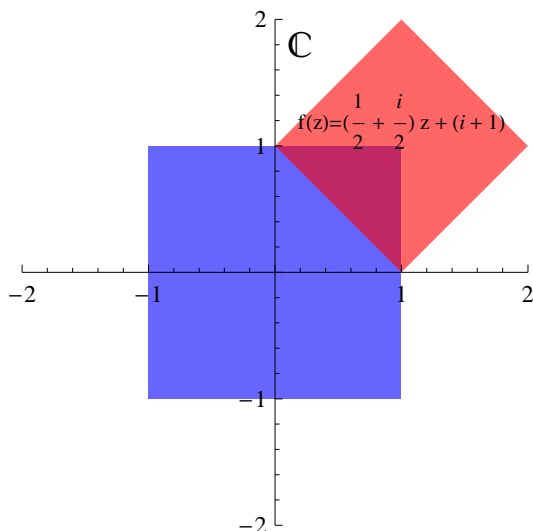
$$Az = RQe^{i(\phi+\theta)}. \quad (2.11)$$

Absolutna vrednost števila z se torej Q -krat poveča, $|f(z)| = Q|z|$, argument pa je večji za θ , $\arg(f(z)) = \arg(z) + \theta$.

Množenje bom predstavil tudi na način vektorskega seštevanja. Kompleksno množenje ima namreč veliko skupnega z vektorskimi operacijami. Produkt Az najprej preuredim v $\Re(A)z + \Im(A)iz$. Kompleksno spremenljivko $z = a + bi$ bom zapisal kot vektor v kompleksni ravnini $\mathbf{r} = (a, b)$ in podobno tudi $iz = -b + ai$ kot $\mathbf{r}_p = (-b, a)$. Vektor \mathbf{r}_p je pravokoten na \mathbf{r} (v pozitivni smeri) ter enake dolžine kot \mathbf{r} . Orientacija vektorja izhaja iz množenja z i . Ker velja $\arg(z) = \pi/2$, pomeni tako množenje rotacijo za $\pi/2$. Množenje je torej seštevek $\Re(A)$ vektorjev \mathbf{r} in $\Im(A)$ vektorjev \mathbf{r}_p . To sem prikazal na sliki 2.1.

Trditev 3. Za neko točko z v kompleksni ravnini pomeni seštevanje $z + B$ premik za $|B|$ v smeri $\arg(B)$.

Tudi seštevanje $z + B$ lahko geometrijsko ponazorimo s seštevkom vektorjev $\mathbf{r} = (a, b)$ in $\mathbf{q} = (\Re(B), \Im(B))$. Uporaba kompleksnih števil namesto vektorjev nam mnogokrat olajša delo. Zelo koristno je že omenjeno množenje z i , s čimer enostavno izračunamo pravokotni vektor. Naslednja trditev podaja še eno povezavo med kompleksnim množenjem in vektorskimi operacijami.



Slika 2.2: Linearna funkcija $f(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)z + (i + 1)$.

Trditev 4. Če zapišemo kompleksni števili $a = |a|e^{i\alpha}$ in $b = |b|e^{i\beta}$ kot vektorja $\mathbf{a} = (\Re(a), \Im(a))$ in $\mathbf{b} = (\Re(b), \Im(b))$, ki oklepata kot $\theta = \beta - \alpha$, velja

$$\bar{a}b = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i(\mathbf{a} \times \mathbf{b}). \quad (2.12)$$

Dokaz.

$$\bar{a}b = (|a|e^{-i\alpha})(|b|e^{i\beta}) = |a||b|e^{i(\beta-\alpha)} = |a||b|e^{i\theta} \quad (2.13)$$

$$= |a||b| \cos \theta + i|a||b| \sin \theta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i(\mathbf{a} \times \mathbf{b}). \quad (2.14)$$

Iz ugotovitev prejšnjih dveh odstavkov izpeljemo trditev:

Trditev 5. Geometrijski pomen linearne funkcije $f(z) = Az + B$ je rotacija in (enakomeren) razteg, s središčem v koordinatnem izhodišču, ter premik (podmnožice) kompleksne ravnine.

Na sliki 2.2 rdeči kvadrat prikazuje sliko modrega kvadrata s transformacijo $f(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)z + (i + 1)$. To transformacijo sestavljajo rotacija za $\frac{\pi}{4}$, raztezanje za $\sqrt{2}/2$ ter premik za $1 + i$.

Definicija 2. Negibna točka preslikave $z \mapsto f(z)$ je tista točka, za katero velja $f(z) = z$.

Središče rotacije in raztega sta pomembna pojma teh dveh transformacij ter posledično tudi linearne funkcije.

Definicija 3. Središče q rotacije \mathcal{R}_q^ϕ za kot ϕ v ravnini je edina negibna točka te transformacije.

Trditev 6. Za vsak $z \in \mathbb{C}$ velja

$$|z - q| = |\mathcal{R}_q^\phi(z) - q|. \quad (2.15)$$

Točka q je edina točka s to lastnostjo.

Definicija 4. Središče q raztega \mathcal{D}_q^r za faktor r je edina negibna točka te transformacije.

Trditev 7. Za vsak $z \in \mathbb{C}$ velja

$$\frac{|\mathcal{D}_q^r(z) - q|}{|z - q|} = r. \quad (2.16)$$

Točka q je edina točka s to lastnostjo.

Trditev 8. Linearna funkcija $f(z) = Az + B$, $A \neq 1$ ima natanko eno negibno točko z_0 .

Dokaz. Rešitev enačbe $z = Az + B$ nam da

$$z = \frac{B}{1 - A} = z_0. \quad (2.17)$$

Iz trditve 5 in 8 sklepamo:

Trditev 9. Geometrijski pomen negibne točke z_0 linearne funkcije $f(z) = Az + B$, $A \neq 1$ je središče q rotacije in raztega.

Dokaz. Iz trditve najprej sledi, da pravzaprav vsaka linearna funkcija geometrijsko predstavlja *le* rotacijo in razteg okoli točke $q = z_0$! Če zapišem B kot $q(1 - A)$, lahko enačbo linearne funkcije prepisem v:

$$f(z) = Az + B = Az + q(1 - A) = A(z - q) + q. \quad (2.18)$$

Enačba pove, da število z najprej premaknemo za $-q$, rotiramo za $\arg(A)$ in raztegnemo za faktor $|A|$ okrog koordinatnega izhodišča in premaknemo nazaj v smeri q . Transformacija kot celota se izkaže kot rotacija in razteg s središčem v q . Kompleksno množenje nam omogoča le rotacijo okrog izhodišča. Če torej želimo rotirati točko z okrog neke druge točke q , moramo to najprej prestaviti v izhodišče. To naredi odštevanje $(z - q)$, ki celotno kompleksno ravnino ustrezno premakne. Inverzna operacija se izvede s prištevanjem q , ki ravnino postavi nazaj v prvotno lego.

Na podlagi trditev 5 in 9 lahko oblikujemo zaključno ugotovitev o geometrijskem pomenu linearne funkcije.

Trditev 10. *Linearna transformacija $f(z) = Az + B$, $A \neq 1$ pomeni rotacijo in razteg s središčem v z_0 točke $z \in \mathbb{C}$:*

$$f(z) = \mathcal{D}_{z_0}^{|A|} \circ \mathcal{R}_{z_0}^{\arg(A)}. \quad (2.19)$$

V izjemnem primeru $A = 1$ gre za premik točke z :

$$f(z) = \mathcal{T}_B. \quad (2.20)$$

Definicija 5. Invariantna krivulja $z(\alpha)$ funkcije $f(z)$ je tista krivulja, ki ostane nespremenjena glede na $f(z)$. Velja

$$f(z(\alpha)) = z(\alpha). \quad (2.21)$$

Iz definicije 5 ni moč sklepati, da so vse točke na krivulji fiksne, temveč da je slika krivulje kot celote kar enaka tej krivulji. Invariantne krivulje nam povedo veliko o transformaciji.

Trditev 11. *Invariantne krivulje linearne funkcije $f(z) = A(z - q) + q$, kjer velja $|A| = 1$, so krožnice s središčem v q .*

Dokaz. Krožnica je določena z enačbo $|z - q| = r$. Izpeljemo:

$$|f(z) - q| = |(A(z - q)) + q - q| = |A(z - q)| = |A||z - q| = r. \quad (2.22)$$

Trditev 12. *Invariantne krivulje linearne funkcije $f(z) = A(z - q) + q$, kjer velja $\arg(A) = 0$, so premice skozi q .*

Dokaz. Premice skozi q določa enačba $z(\alpha) = \alpha e^{i\theta} + q$, $\theta \in [0, 2\pi)$ in $\alpha \in [-\infty, \infty)$. Izpeljemo

$$f(z(\alpha)) = A((\alpha e^{i\theta} + q) - q) + q = |A|\alpha e^{i\theta} + q. \quad (2.23)$$

Z zamenjavo $\beta = |A|\alpha$, $\beta \in [-\infty, \infty)$ dobimo

$$z(\beta) = \beta e^{i\theta} + q, \quad (2.24)$$

kar je ista krivulja.

Trditev 13. *Invariantne krivulje splošne linearne funkcije $f(z) = A(z - q) + q$ so polžaste krivulje s središčem v q oblike $z(\alpha) = k|A|^\alpha e^{i\alpha \arg(A)} + q$, $k \in \mathbb{C}$, $\alpha \in [-\infty, \infty)$.*

Dokaz.

$$f(z(\alpha)) = A((k|A|^\alpha e^{i\alpha \arg(A)} + q) - q) + q \quad (2.25)$$

$$= k|A|^{(\alpha+1)} e^{i\alpha \arg(A) + i \arg(A)} + q \quad (2.26)$$

$$= k|A|^{(\alpha+1)} e^{i(\alpha+1) \arg(A)} + q. \quad (2.27)$$

Z zamenjavo $\beta = \alpha + 1$, $\beta \in [-\infty, \infty)$ dobimo

$$z(\beta) = k|A|^\beta e^{i\beta \arg(A)} + q, \quad (2.28)$$

kar je ista krivulja.

Pozoren bralec bo ugotovil, da iz trditve 13 sledita trditvi 11 in 12.

Trditev 14. *Linearna funkcija $f(z) = Az + B$ ima lastnost $|f(z_1) - f(z_2)| = k|z_1 - z_2|$, kjer sta z_1 in z_2 poljubni kompleksni števili.*

Dokaz.

$$|f(z_1) - f(z_2)| = |Az_1 + B - (Az_2 + B)| = |A(z_1 - z_2)| = |A||z_1 - z_2|, \quad (2.29)$$

in sicer $k = |A|$.

Iz trditve 14 sledi, da linearna funkcija slika krožnice v krožnice in premice v premice.

Trditev 15. *Linearna funkcija ohranja razmerja med razdaljami, torej velja*

$$\frac{|a - b|}{|a - c|} = \frac{|f(a) - f(b)|}{|f(a) - f(c)|} \quad (2.30)$$

za poljubne $a, b, c \in \mathbb{C}$.

Dokaz.

$$\frac{|f(a) - f(b)|}{|f(a) - f(c)|} = \frac{|A||a - b|}{|A||a - c|} = \frac{|a - b|}{|a - c|}. \quad (2.31)$$

2.2 Kompleksna inverzija in zrcaljenje prek enotskega kroga

Zanimivejša in veliko bolj kompleksna komponenta Möbiusovih transformacij je kompleksna inverzija.

Definicija 6. Kompleksna inverzija je funkcija $f(z) = 1/z$.

Ta transformacija kompleksne ravnine je ključ do razumevanja Möbius-ovih transformacij in temelj geometrijskih transformacij neevklidskih geometrij. Tudi to transformacijo lahko razbijemo na dve operaciji

$$f_1(z) = \frac{1}{\bar{z}} \quad (2.32)$$

$$f_2(z) = \bar{z} \quad (2.33)$$

tako da velja

$$f(z) = f_2(z) \circ f_1(z) = \frac{1}{r} e^{-i\phi} = z'. \quad (2.34)$$

Iz enačbe 2.34 lahko razberemo dvoje. Radij $r' = |z'|$ slike $z' = r' e^{i\phi'}$ je recipročen radiju $r = |z|$, torej velja $r' = 1/r$. Geometrijsko to pomeni, da se zunanost enotskega kroga (ali enotski disk) preslika v notranost (in obratno), enotska krožnica pa je invariantna krivulja te preslikave. Polarni kot ϕ' slike z' je nasproten polarnemu kotu z , $\arg(z') = -\arg(z)$. Ta druga ugotovitev nam pove, da imamo poleg enotske krožnice še dve invariantni krivulji, in sicer osi kompleksne ravnine. Negibni točki preslikave pa sta le dve in sicer $z = 1$ ter $z = -1$. Točka $z = 0$ nima slike znotraj množice kompleksnih števil \mathbb{C} .

Trditev 16. *Funkcija ima tudi obratno ali inverzno funkcijo, ki je kar enaka sama sebi:*

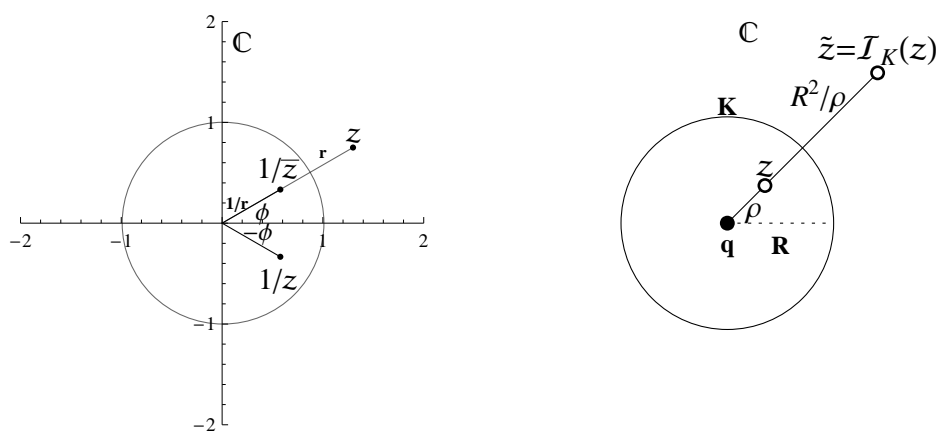
$$f^{-1}(z) = f(z) = 1/z. \quad (2.35)$$

Na sliki 2.3(a) je prikazana konstrukcija števila z' .

Izkaže se, da je preslikava $f_1(z)$ prav tako pomembna in ima svoje ime.

Definicija 7. Zrcaljenje prek enotskega kroga je preslikava

$$f_1(z) = \frac{1}{\bar{z}} = \mathcal{I}_C(z) = \tilde{z}. \quad (2.36)$$



(a) Kompleksna inverzija in zrcaljenje prek enotskega kroga.

(b) Zrcaljenje prek kroga K .

Slika 2.3: Kompleksna inverzija in zrcaljenje prek kroga.

Geometrijsko se preslikava $\mathcal{I}_C(z)$ od preslikave $f(z) = 1/z$ razlikuje za zrcaljenje prek realne osi, analitično pa za kompleksno konjugacijo: $\tilde{z} = z'$. Polarni kot števila \tilde{z} je pri tej preslikavi enak polarnemu kotu praslike z . Posledica tega je, da so invariantne krivulje preslikave $\mathcal{I}_C(z)$ kar vse premice, ki prečkajo koordinatno izhodišče. Hkrati so vse točke enotne krožnice tudi negibne točke preslikave.

V nadaljevanju bom uporabljal predvsem to funkcijo. Bistvo kompleksne inverzije je v absolutni vrednosti in posledici, da izmenja notranjost in zunanost enotskega kroga. Zato lastnosti zrcaljenja prek kroga v glavnem veljajo tudi za kompleksno inverzijo in nas obravnavanje zrcaljenja prek kroga ne bo prikrajšalo za razumevanje funkcije $f(z) = 1/z$.

2.3 Zrcaljenje prek kroga K

V prejšnjem poglavju sem že navedel nekaj geometrijskih lastnosti zrcaljenja prek enotskega kroga, na primer, da preslikava izmenja notranjost in zunanost enotskega kroga.

Definicija 8. Zrcaljenje prek kroga K s središčem q in radijem R je preslikava $z \mapsto \mathcal{I}_K(z)$, ki izmenja zunanost in zunanost kroga K . Točke na K so negibne točke preslikave.

Če naj za $\mathcal{I}_K(z)$ veljajo lastnosti iz definicije 8, mora veljati naslednja relacija med oddaljenostma točke z in njene slike $\tilde{z} = \mathcal{I}_K(z)$ od središča q .

$$|\tilde{z} - q| = \frac{R^2}{|z - q|}. \quad (2.37)$$

Če v enačbo 2.37 vstavimo $R = 1$ in $q = 0$, dobimo relacijo $|\tilde{z}| = 1/|z|$, ki velja za $\mathcal{I}_C(z)$. Funkcija $\mathcal{I}_C(z) = 1/\bar{z}$ je namreč poseben primer bolj splošne funkcije

$$\mathcal{I}_K(z) = \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{q}} + q = \frac{q\bar{z} + (R^2 - |q|^2)}{\bar{z} - \bar{q}}. \quad (2.38)$$

Na sliki 2.3(b) je prikazana konstrukcija preslikave $\mathcal{I}_K(z)$.

Spoznali bomo, da je enačba 2.38 osnova vsem geometrijskim transformacijam neevklidske geometrije.

Trditev 17. *Kompozitum dveh zrcaljenj prek kroga $\mathcal{I}_{K_2}(z) \circ \mathcal{I}_{K_1}(z)$ je Möbiusova transformacija.*

Dokaz.

$$\mathcal{I}_{K_2}(z) \circ \mathcal{I}_{K_1}(z) = \frac{R_2^2}{\frac{R_1^2}{\bar{z} - \bar{q}_1} + q_1 - \bar{q}_2} + q_2 \quad (2.39)$$

$$= \frac{R_2^2}{\frac{R_1^2}{z - q_1} + \bar{q}_1 - \bar{q}_2} + q_2 \quad (2.40)$$

$$= \frac{R_2^2 z - R_2^2 q_1}{(\bar{q}_1 - \bar{q}_2)z + R_1^2 - q_1(\bar{q}_1 - \bar{q}_2)} + q_2 \quad (2.41)$$

$$= \frac{(R_2^2 + q_2(\bar{q}_1 - \bar{q}_2))z - R_2^2 q_1 + R_1^2 q_2 - q_1 q_2(\bar{q}_1 - \bar{q}_2)}{(\bar{q}_1 - \bar{q}_2)z + R_1^2 - q_1(\bar{q}_1 - \bar{q}_2)}. \quad (2.42)$$

Omenil sem že, da ima inverzija v krogu K podobne lastnosti kot zrcaljenje prek premice L . Premica ali krožnica razdeli ravnino na dva dela, ki ju zrcaljenje zamenja. Če krivuljo orientiramo, zrcaljenje prek te krivulje zamenja območji levo in desno od krivulje. Pri premici je to območje polravnina, pri krogu pa notranjost oziroma zunanost, odvisno od izbrane orientacije. Točke na krivulji zrcaljenja so negibne točke, kar velja tudi za $\mathcal{I}_K(z)$. Invariantne krivulje pri zrcaljenju so premice, pravokotne na krivuljo zrcaljenja. Pri zrcaljenju prek kroga so to premice skozi središče q kroga K . V nadaljevanju bomo spoznali, da premice skozi q niso edine invariantne krivulje. Nazadnje velja:

Trditev 18. *Rezultat dveh enakih zrcaljenj je identiteta.*

$$\mathcal{I}_K(z) \circ \mathcal{I}_K(z) = z. \quad (2.43)$$

Dokaz.

$$\mathcal{I}_K(z) \circ \mathcal{I}_K(z) = \frac{R^2}{\frac{R^2}{\bar{z}-\bar{q}} + q - \bar{q}} + q \quad (2.44)$$

$$= \frac{R^2}{\frac{R^2}{z-q} + \bar{q} - \bar{q}} + q \quad (2.45)$$

$$= \frac{R^2(z-q)}{R^2} + q \quad (2.46)$$

$$= z. \quad (2.47)$$

Tudi pri zrcaljenju prek kroga rečemo, da sta točka z in njena slika \tilde{z} simetrični glede na K . Če je radij R krožnice K zelo velik in/ali točka z zelo blizu K , se zrcaljenje $\mathcal{I}_K(z)$ pravzaprav obnaša enako kot zrcaljenje prek premice L (tangente na K v točki najbližji z).

Preden začnem z obravnavo, v kaj $\mathcal{I}_K(z)$ preslika kroge in premice, bom navedel še dve trditvi glede zrcaljenja prek kroga.

Trditev 19. *Zrcaljanje prek kroga ne ohranja razdalj med točkami. Za poljubni točki $a, b \in \mathbb{C}$ torej velja, da razdalja $|a-b|$ v splošnem ni enaka razdalji $|\tilde{a}-\tilde{b}|$.*

Dokaz. Trditev bom dozagal s protiprimerom. Naj bosta točki a in b na premici skozi središče q . Velja

$$|\tilde{a} - \tilde{b}| = \left| |\tilde{a} - q| - |\tilde{b} - q| \right| = \left| \frac{R^2}{|a - q|} - \frac{R^2}{|b - q|} \right| \quad (2.48)$$

$$= \frac{R^2}{|a - q||b - q|} ||a - q| - |b - q|| \quad (2.49)$$

$$= \frac{R^2}{|a - q||b - q|} |a - b|. \quad (2.50)$$

Prvotno razdaljo je torej potrebno množiti z

$$\frac{R^2}{|a - q||b - q|}. \quad (2.51)$$

Ko se a in b približujeta krožnici K in se njuni oddaljenosti od izhodišča približujeta R , se popravek 2.51 približuje vrednosti 1. To je dodaten dokaz, da je zrcaljenje točk blizu K enako zrcaljenju prek premice.

Trditev 20. *Zrcaljenje prek kroga ne ohranja razmerja med razdaljami. Za poljubne točke $a, b, c \in \mathbb{C}$ torej velja*

$$\frac{|a - b|}{|a - c|} \neq \frac{|\tilde{a} - \tilde{b}|}{|\tilde{a} - \tilde{c}|}. \quad (2.52)$$

Dokaz. Za točke a, b in c na premici prek q dobimo podoben izračun kot pri prejšnjem dokazu. Dobimo popravek $|c - q|/|b - q|$.

Premice L skozi q sem že opredelil kot invariantne krivulje preslikave. Del premice znotraj K se slika v dva poltraka zunaj K in obratno. Kaj pa se zgodi s poljubno premico L , ki ne gre čez točko q ?

Trditev 21. *Premica, ki ne seka središča q kroga K , se preslika v krožnico, ki vsebuje točko q .*

Dokaz. Geometrijska razlaga je precej lažja kot analitična. Slika 2.4 prikazuje konstrukcijo preslikave premice L . Na premici L sem izbral točko, ki je najbližje središču q in jo označil z a . Izbral sem še drugo točko na premici, b . Na sliki sta prikazani tudi njuni sliki \tilde{a} in \tilde{b} . Ker je kot $\angle q\tilde{b}\tilde{a} = \angle qab$ pravi kot, velja, da ko točko b premikamo po premici L , njena slika \tilde{b} izrisuje krožnico z radijem $|\tilde{a} - q|/2$ in središčem v $(\tilde{a} + q)/2$. Da sta omenjena kota res enaka, bom dokazal s krajšim izračunom.

Po definiciji preslikave velja relacija

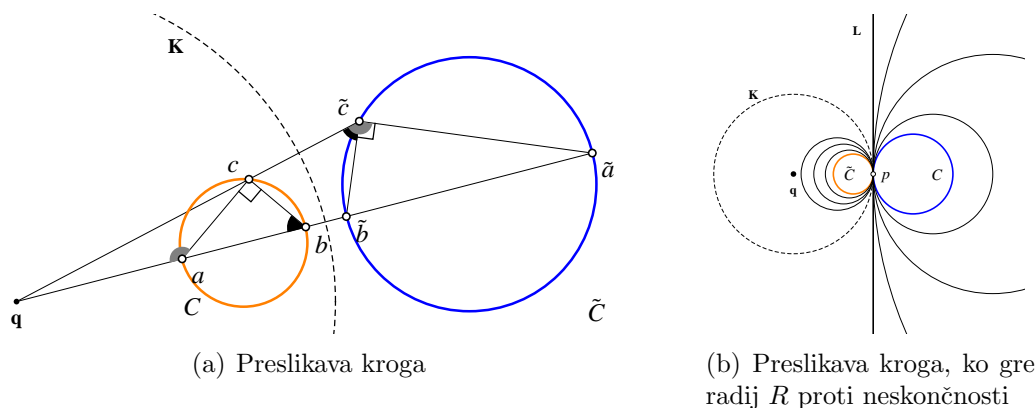
$$|a - q||\tilde{a} - q| = R^2 = |b - q||\tilde{b} - q|, \quad (2.53)$$

iz česar sledi

$$|a - q||b - q| = |\tilde{b} - q||\tilde{a} - q|. \quad (2.54)$$

Upošteva je skupni kot $\angle aqb = \angle \tilde{a}q\tilde{b}$, je moč sklepati, da sta trikotnika aqb in $\tilde{b}q\tilde{a}$ podobna. Sledi omenjena relacija med kotoma $\angle q\tilde{b}\tilde{a}$ in $\angle qab$. Med ostalimi koti držita še relaciji $\angle qab = \angle q\tilde{b}\tilde{a}$ in $\angle qba = \angle q\tilde{a}\tilde{b}$. Dokaz je s tem končan.

Na sliki 2.4 je prikazan primer, ko premica L ne seka kroga K . Velja, da se tudi v nasprotnem primeru premica L preslika v krožnico, ki je določena s premerom $q\tilde{a}$.



Slika 2.5: Preslikava kroga.

se orientacija točk na krožnici obrne. Naj bo C orientirana krožnica. Območje *desno* od C se preslika v območje *levo* od $\tilde{C} = \mathcal{I}_K(C)$. Posledica tega je, da se notranjost C , ki vsebuje q , slika v zunanost \tilde{C} . Podobno velja pri preslikavi polravnine nad premico L s slike 2.4, ki se slika v notranjost krožnice $C' = \tilde{L} = \mathcal{I}_K(L)$.

Trditev 23. *Krogi C , pravokotni na krog zrcaljenja K , so invariantne krivulje zrcaljenja prek kroga K . Velja $\tilde{C} = \mathcal{I}_K(C) = C$.*

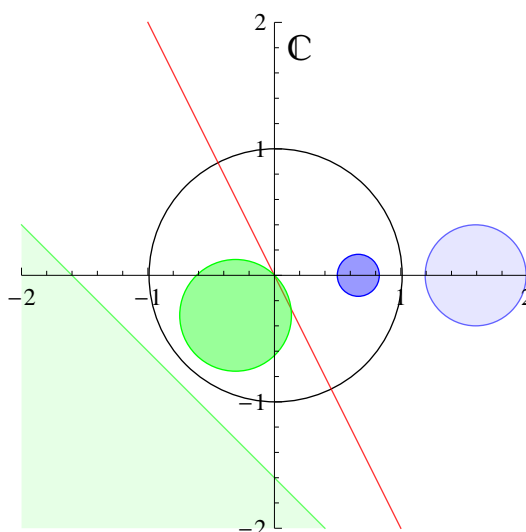
Dokaz. Naj krog C seka krog K s središčem q v točkah a in b . Če naj bo C pravokoten na K , je tangenta T na C v točki a premica skozi q in a . Ker a in b ležita na K , sta negibni točki zrcaljenja. Spomnimo se tudi, da so premice skozi q invariantne krivulje zrcaljenja, torej velja $\tilde{T} = \mathcal{I}_K(T) = T$. Slika \tilde{C} je krog, ki gre prav tako skozi a in b in je pravokoten na K . To pa je lahko le krog C .

Trditev 24. *Vsak krog C skozi z in $\tilde{z} = \mathcal{I}_K(z)$ je pravokoten na krog K .*

Dokaz. Naj bo C krog skozi z in \tilde{z} , eno izmed dveh presečišč s K pa naj bo točka a . Ker velja $\tilde{a} = a$, krog \tilde{C} določajo točke z , \tilde{z} in a . Sledi $\tilde{C} = C$, s pomočjo trditve 23 pa sklepamo, da je C pravokoten na K .

Na sliki 2.5(b) je prikazano zrcaljenje kroga C prek kroga K , katerega radij gre do neskončnosti. Krog C je tako vedno bolj podoben premici L , notranjost C pa se razširja čez polravnino nad premico L . Njegova slika \tilde{C} se približuje središču q . Zrcaljenje premice je torej samo poseben primer zrcaljenja kroga.

Nekaj primerov zrcaljenj je prikazanih na sliki 2.6. Na sliki vidimo moder disk zunaj K , ki se preslika v nov disk znotraj K ; rdečo premico skozi q , ki



Slika 2.6: Izverzija $\mathcal{I}_K(z)$ v krogu K (primeri preslikav).

se preslika vase; in polravnino pod premico (obarvano zeleno), ki se preslika v disk znotraj K .

2.4 Konformnost preslikav

Na koncu poglavja sem dolžan navesti še eno lastnost, po kateri se preslikave ločijo med seboj.

Definicija 9. Preslikava $z \mapsto f(z)$ je konformna, če ohranja tako velikost kotov kot tudi orientacijo.

Velja torej, da je kot med poljubnima dvema krivuljama S_1 in S_2 enak kotu med $S'_1 = f(S_1)$ in $S'_2 = f(S_2)$.

Definicija 10. Preslikava $z \mapsto f(z)$ je antikonformna, če ohranja velikost kotov, orientacijo pa obrne.

Linearna funkcija $f(z) = Az + B$ je konformna preslikava. Kompleksna konjugacija $f(z) = \bar{z}$ je antikonformna preslikava, saj gre za zrcaljenje prek premice.

Trditev 25. *Zrcaljenje prek kroga je antikonformna preslikava.*

Dokaz trditve 25 najdemo v [7]. Antikonformnost je še ena skupna lastnost zrcaljenja prek kroga in zrcaljenja prek premice. Posplošimo lahko, da je vsako zrcaljenje antikonformna preslikava.

Trditev 26. *Kompleksna inverzija $f(z) = 1/z$ je konformna preslikava.*

Dokaz. Iz enačbe 2.34 sledi, da je kompleksna inverzija kompozitum dveh zrcaljenj. Zrcaljenje prek enotskega kroga obrne orientacijo kotov, enako pa za tem stori tudi kompleksna konjugacija. Orientacija kotov se torej ohrani.

Povezavo med številom zaporednih zrcaljenj in učinkom nastale preslikave na orientacijo kotov posplošimo na naslednjo trditev.

Trditev 27. *Kompozitum sodega števila zrcaljenj nam da konformno preslikavo, kompozitum lihega števila zrcaljenj pa antikonformno preslikavo.*

Tudi Möbiusove transformacije so konformne preslikave, saj sta komformni preslikavi obe njeni komponenti: linearna funkcija ter kompleksna inverzija.

Poglavje 3

Geometrije dveh dimenzij

3.1 Kaj je geometrija?

V prejšnjem poglavju sem govoril o geometrijskih lastnostih Möbiusovih transformacij, izognil pa sem se vprašanju, kaj je geometrija? Pri obravnavi linearne funkcije kompleksne spremenljivke sem od bralca pravzaprav pričakoval, da ve vse o geometriji v ravnini. Kljub temu bom to poglavje začel s povsem osnovnimi pojmi in postopoma prešel k opisu geometrije s transformacijsko grupo. Na tem mestu velja omeniti, da beseda „geometrija“ pomeni „merjenje zemlje“. Spoznali bomo, da je merjenje pomemben element geometrije.

Evklid je k definiciji geometrije pristopil z aksiomi (podroben pregled takega pristopa najdemo v [6]), jaz pa bom začel s povsem splošno mislijo, ki velja za vse vede. Ta je, da geometrija proučuje neke *geometrijske lastnosti* nekih *geometrijskih objektov* oziroma elementov. Pod pojmom geometrijski objekt si bralec zagotovo najprej predstavlja geometrijske like in telesa. Tu so še premice, točke in vse ostalo, kar lahko narišemo na katerokoli ploskev, na primer na list papirja ali nogometno žogo. Končno si lahko podobne oblike zamislimo tudi v prostoru. Bolj strokovno lahko objektom rečemo množica točk. Ob pojmu geometrijska lastnost najprej pomislimo na položaj točke pa tudi na izpeljane razsežnosti, na primer kot, razdalja ali razmerje razdalj. Točka je enolično določena s položajem, ki je zato neke vrste identifikator. Sledi, da so vsi geometrijski objekti med seboj različni. Ker je objekt množica točk, lahko enako sklepamo tudi iz definicije o enakosti množic. Očitno to ni najbolj zaželeno lastnost in zato položaj točk ni najbolj zanimiva geometrijska lastnost. Postavi se vprašanje, ali sta dve sicer različni množici točk lahko enaki glede na neko lastnost. Odgovor je pritrdilen. Sledi vprašanje, katere so te lastnosti. Izkaže se, da sta to predvsem razdalja med točkama (glede na

enoto merjenja) in posledično kot, pri evklidski geometriji je pomembno tudi razmerje razdalj. Če povzamem so geometrijske lastnosti tiste lastnosti, ki so skupne vsem med seboj *enakim* oblikam. Omenjenih lastnosti podrobno ne bom obravnaval, saj so vsi koncepti dobro znani. Nasprotno pa se bom posvetil relaciji med dvema enakima objektoma in s tem odgovoril na vprašanje, kdaj sta obliki geometrijsko enaki oziroma *kongruentni*.

3.2 Geometrijska enakost

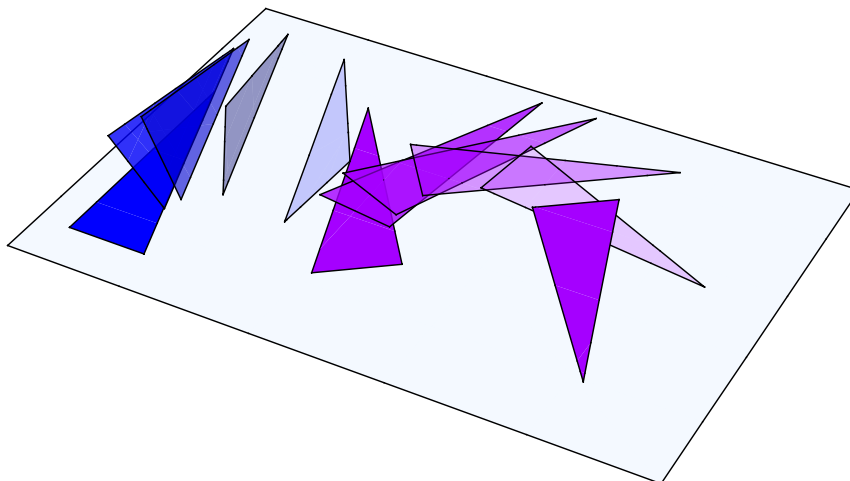
Pred razlago pomena trikotnikov, prikazanih na sliki 3.1, sem dolžan opozoriti na navidez nepomembno lastnost trikotnika. Vsi vemo, kaj je trikotnik: tri točke, paroma povezane med seboj. Pomembna pa je prav ta povezava. Pare točk lahko povežemo s poljubno krivuljo. V tem delu se bom držal pravila, ki zahteva, da je ta krivulja najkrajša pot med točkama. V evklidski ravnini je taka krivulja del *premice* med točkama, ki jo imenujemo *daljica*. Pri geometriji na ukrivljenih ploskvah uporabljamo pojem *geodeta*.

Definicija 11. Geodeta \mathcal{L} je krivulja na ploskvi, zanjo pa velja, da je najkrajša pot med poljubnima točkama $a, b \in \mathcal{L}$ del te iste geodete.

Velja tudi, da poljubni dve točki na ploskvi enolično določata geodeto. Merjenje očitno res igra pomembno vlogo v geometriji!

Vrnimo se k sliki 3.1, kjer je naslikanih veliko trikotnikov. Zaenkrat ostajamo pri (evklidski) geometriji v ravnini, zato naj predstavitev v prostoru bralca ne zmede. Če pozornost usmerimo na temnejše obarvane trikotnike v ravnini, takoj opazimo, da imajo nekaj skupnega. Rečemo, da so podobni.

Iz česa izhaja ta predstava? Ko primerjamo trikotnike, si avtomatsko predstavljamo, kako bi lahko nek trikotnik prijeli v roke, ga nekako premaknili v prostoru, ter ga položili na drug trikotnik. Tako bi hitro ugotovili, ali se trikotnika prilegata ali ne, oziroma, ali prvi trikotnik pokrije drugega. Na sliki je ponazorjeno, da lahko moder trikotnik prevrnemo in se tako prileže na vijolični trikotnik. Če ga nato še zavrtimo, zasede položaj najbolj desnega vijoličnega trikotnika. S predpostavko, da je ravnina s slike 3.1 neskončen list papirja, bi za dajensko fizično izvedbo morali trikotnik najprej izrezati. Lahko pa naredimo kopijo tega lista in premik opravimo kar s celim kosom papirja. Kopijo položimo na original tako, da se trikotnika ujemata. Tako ujemanje lahko formaliziramo kot preslikavo \mathcal{M} ravnine nase. Sliko točke A bom zapisal kot $A' = \mathcal{M}(A)$. Dobili smo idejo, mora za enaka objekta obstajati gibanje v prostoru, ki ju prilagodi med seboj. Naj bralca ne zmede, ko pri geometriji v ravnini govorim o gibanju v prostoru. Gre le za vizualno predstavo.



Slika 3.1: Enaki trikotniki.

Pri premikanju papirja smo predpostavili, da ga med gibanjem ne raztezamo oziroma krčimo (drugače je z upogibanjem, s katerim se bomo srečali kasneje). Zato velja, da mora preslikava \mathcal{M} ohranjati razdalje med točkami.

Definicija 12. Transformacijo ravnine \mathcal{M} , za katero velja enačba $d(A, B) = d(\mathcal{M}(A), \mathcal{M}(B))$, imenujemo togi premik ali izometrija.

Vrste izometrij \mathcal{M} bomo proučili v naslednjih poglavjih za vsako geometrijo posebej, sedaj pa se vrnimo k naši definiciji enakosti. Po vseh dosedanjih ugotovitvah lahko definiramo geometrijsko enakost med objektoma F in F' .

Definicija 13. F je enak ali kongruenten F' , kar zapišemo kot $F \cong F'$, če obstaja preslikava oziroma gibanje \mathcal{M} , tako da velja $\mathcal{M}(F) = F'$.

Geometrijska lastnost objekta je tista, ki ostane nespremenjena, če nad objektom izvedemo transformacijo \mathcal{M} oziroma izometrijo. S pomočjo te ugotovitve lahko končno izpeljemo našo definicijo geometrije.

Definicija 14. Geometrija je proučevanje *invariant* družine transformacij \mathcal{G} , ki ohranjajo razdalje med točkami.

Od geometrijske enakosti, ki jo bom označil z \sim , pričakujemo naslednje lastnosti:

1. oblika mora biti enaka sama sebi, torej: $F \sim F'$ za vsak F ;
2. če je F enak F' , mora biti tudi F' enak F : $F \sim F' \Rightarrow F' \sim F$ in
3. če je F enak F' ter F' enak F'' , potem mora biti tudi F enak F'' .

Te lastnosti imenujemo (po vrsti) *refleksivnost*, *simetričnost* ter *tranzitivnost*. Relacija \sim je torej ekvivalenčna relacija. Upošteva je definicijo 13 in zgornji seznam mora družina \mathcal{G} transformacij $\mathcal{N} \in \mathcal{G}$ vsebovati transformacije sledečega seznama.

1. Družina \mathcal{G} mora vsebovati transformacijo \mathcal{E} , imenovano identiteta, ki preslika vsako točko vase.
2. Če \mathcal{G} vsebuje transformacijo \mathcal{N} , mora vsebovati tudi transformacijo \mathcal{N}^{-1} , imenovano inverz. Velja $\mathcal{N}^{-1} \circ \mathcal{N} = \mathcal{E}$. Pogoj za to je, da je \mathcal{N} *bijektivna* transformacija.
3. Če \mathcal{G} vsebuje \mathcal{N}_1 in \mathcal{N}_2 , potem \mathcal{G} vsebuje tudi $\mathcal{N}_2 \circ \mathcal{N}_1$. Rečemo, da je množica \mathcal{G} zaprta.

Družino \mathcal{G} transformacij, ki ustreza zahtevanim pogojem, imenujemo *transformacijska grupa* [1].

Trditev 28. *Preslikave \mathcal{M} tvorijo grupo.*

Dokaz. Identiteta seveda ohranja razdalje. Če \mathcal{M} ohranja razdalje, sledi, da jih ohranja tudi \mathcal{M}^{-1} . Ker je \mathcal{M} preslikava ravnine nase, je surjektivna. \mathcal{M} je tudi injektivna, saj zaradi same definicije o ohranjanju razdalj različni točki (razdalja med njima je večja od nič) slika v različni točki. Sledi, da je \mathcal{M} bijektivna, torej inverz tudi res vedno obstaja. Končno, ker \mathcal{M}_1 in \mathcal{M}_2 ohranjata razdalje, jih ohranja tudi $\mathcal{M}_2 \circ \mathcal{M}_1$.

Razmišljanje nadaljujemo v smeri, ki jo je pri definiciji geometrije izbral Felix Klein [5]; [4]. Z izbiro poljubne transformacijske grupe \mathcal{G} s pripadajočimi transformacijami \mathcal{M} definiramo geometrijo kot proučevanje invariant glede na \mathcal{G} . S tako definicijo smo zajeli vse vrste geometrij. Če za \mathcal{G} izberemo toge premike, dobimo na primer evklidsko geometrijo v ravnini. Ni pa to edina možna geometrija v ravnini, poznamo na primer tudi *projektivno geometrijo*. Več o projektivni geometriji najdemo v [10]. Lahko definiramo tudi geometrijo na omejenem delu ravnine, na primer na enotnem disku D . Tudi geometrije na ukrivljenih ploskvah, ki nas vodijo do neevklidskih geometrij, lahko definiramo kot transformacijsko grupo. V nadaljevanju bomo spoznali osnovne ideje teh geometrij, saj so te starejše, kot pa njihovi modeli - ukrivljene ploskve, o katerih bom govoril kasneje.

3.3 Neevklidska geometrija

Evklidska geometrija temelji na petih aksiomih, vse ostale lastnosti pa so logično izpeljane iz le teh. Prvi štirje aksiomi niso nikoli vzbujali pretirane pozornosti, peti, aksiom o vzporednih premicah, pa je bil skozi zgodovino predmet številnih raziskav. Le te so pripeljale do odkritij neevklidskih geometrij. Aksiom o vzporednih premicah pravi, da za vsako točko p , ki ne leži na premici L , obstaja natanko ena premica L' skozi p , ki ne seka L . Iz dvomov o pravilnosti tega aksioma sta kot dve nasprotni si alternativni nastala dva nova aksioma.

Definicija 15. Sferični aksiom: Premica skozi p , ki ne seka L , ne obstaja.

Definicija 16. Hiperbolični aksiom: Obstajata vsaj dve premici skozi p , ki ne sekata L .

Na podlagi teh dveh aksiomov sta se razvili dve novi geometriji, sferična¹ in hiperbolična. Ker za njiju osnovni evklidski aksiomi ne držijo, ju imenujemo neevklidske.

3.3.1 Lastnosti neevklidske geometrije

Iz aksioma o vzporednih premicah evklidske geometrije lahko izpeljemo teorem, da je vsota notranjih kotov trikotnika T enaka π . Posledica sferičnega in hiperboličnega aksioma je, da je vsota notranjih kotov trikotnika neevklidskih geometrij različna od π .

Definicija 17. Kotni presežek $E(T)$ je razlika med vsoto notranjih kotov in vrednostjo π :

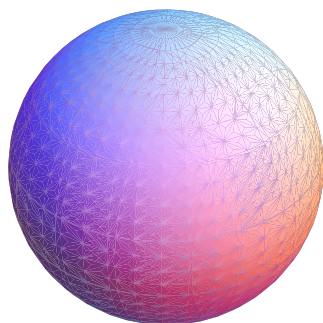
$$E(T) = [\text{Vsota notranjih kotov } T] - \pi. \quad (3.1)$$

Kotni presežek evklidske geometrije je torej enak 0. Izkaže se, da je pri sferični geometriji vsota kotov večja od π , torej $E(T) < \pi$, pri hiperbolični pa manjša, torej $E(T) > \pi$. Nadalje drži, da je $E(T)$ linearno odvisen od ploščine $A(T)$ trikotnika T :

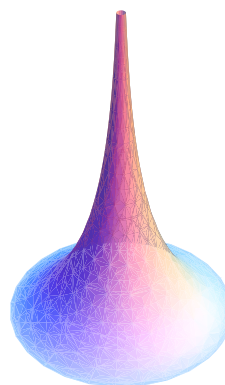
$$E(T) = kA(T), \quad (3.2)$$

kjer je k pozitivno število pri sferični geometriji ter negativno pri hiperbolični. Iz omenjenega dejstva izpeljemo naslednje ugotovitve:

¹Sferična geometrija je tesno povezana z eliptično geometrijo. Več o tej povezavi najdemo v [9].



(a) Sfera.



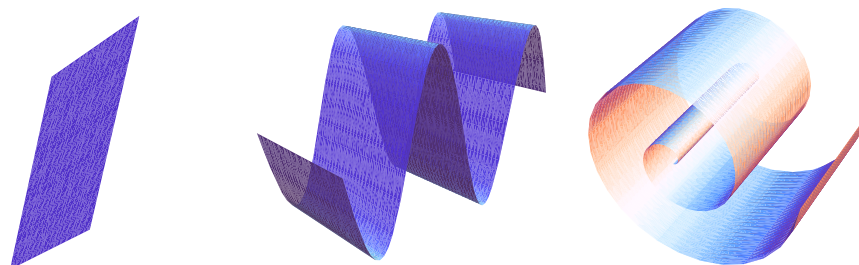
(b) Pseudosfera.

Slika 3.2: Modela sferične in hiperbolične geometrije.

- Obstaja neskončno število sferičnih ter hiperboličnih geometrij, vsaka ima svojo konstanto k .
- Ker vsota notranjih kotov trikotnika ne more biti negativna, velja $E(T) \geq -\pi$. Sledi, da ploščina trikotnika pri hiperbolični geometriji ne more biti večja od $|(\pi/k)|$.
- V neevklidski geometriji ni podobnih trikotnikov: trikotnika z različno ploščino imata različne kote.
- Manjši kot je trikotnik, težje ga je razlikovati od trikotnika evklidske geometrije. $E(T)$ se namreč bliža 0, vsota kotov pa π .

3.4 Geometrija na ukrivljenih ploskvah

Podoben pomen, kot ga ima ravnina za evklidsko geometrijo, ga imata za sferično in hiperbolično geometrijo ukrivljeni ploskvi na sliki 3.2. Risanje na ti dve ploskvi upošteva pravila sferične in hiperbolične geometrije. Ploskev na sliki 3.2(a) imenujemo *sfera*, in je model sferične geometrije, na sliki 3.2(b) pa je prikazana *pseudosfera*, model hiperbolične geometrije. Naša naloga je poiskati tiste lastnosti, ki vplivajo na geometrijo ukrivljene ploskve.

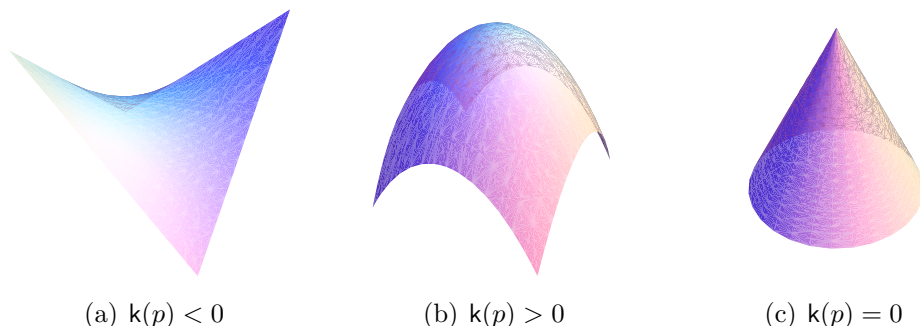


Slika 3.3: Modeli evklidske geometrije.

Začel bom s podobno idejo kot na začetku poglavja, t.j. risanjem. Nakazal sem, da lahko rišemo na katerokoli ploskev. Kakor hitro želimo narisati neko pravilno obliko, na primer kvadrat, smo soočeni s problemom merjenja razdalje. Da bi izmerili razdaljo med dvema točkama na ploskvi, moramo znati narisati geodeto, ki jo določata. Na tem mestu ne bom prehitel snovi in ne bom razkril, kako izgledajo geodete na ploskvah 3.2(a) in 3.2(b). Kljub temu si poskušajmo predstavljati, kako bi izgledala trikotnika T_1 na sferi in T_2 na pseudosferi. Po razmisleku bo bralec ugotovil, da velja $E(T_1) > 0$ ter $E(T_2) < 0$. Jasno je torej, da na $E(T)$ vpliva ukrivljenost ploskve. Vendar pa $E(T)$ ni odvisen od konkretne „oblike“ ploskve. Papir, na katerega smo risali v prejšnjem poglavju, lahko upogibamo (ne pa tudi raztezamo!) in dobimo eno izmed ploskev na sliki 3.3. Prav tako lahko papir prilagodimo na primer valju ali stožcu. S tem smo ploskvi spremenili tako imenovano *ekstrinzično geometrijo*. Opazimo, da je kljub temu geometrija na taki ploskvi enaka evklidski geometriji v ravnini. Krivulje, v katere so se transformirale premice, so še vedno najkrajše poti med pari točk (so geodete). Vsota notranjih kotov trikotnika je še vedno π . Pravimo, da se *intrinzična* geometrija ni spremenila.

Trditev 29. *Vrednost $E(T)$ je neodvisna od upogibanja (ne pa tudi raztezanja), torej od ekstrinzične geometrije ploskve.*

Sfera na sliki 3.2(a) ni narisana v merilu, zato bi lahko pomislili, da je vrednost $E(T)$ neodvisna od radija R . Nasprotno lahko dokažemo z naslednjim razmislekom. Pomarančni olupek lahko upogibamo prav tako kot smo upogibali list papirja, pa vendar ga brez raztezanja ne moremo natančno prilagoditi ploskvi lubenice. Intrinzična geometrija lubenice je torej drugačna od geometrije pomaranče. Katera je torej lastnost, ki določa intrinzično geometrijo ploskve?



Slika 3.4: Ploskve s pozitivnim, negativnim in ničnim $k(p)$.

3.4.1 Ukrivljenost ploskev

Na poti do odgovora na vprašanje prejšnjega razdelka se srečamo z *Gaussovo ukrivljenostjo*, ki jo bom označil s $k(p)$. Ta vrednost natančno določa ukrivljenost ploskve v točki p . Večja kot je vrednost $k(p)$, večja je ukrivljenost v dani točki. Za primer povejmo, da je ukrivljenost zemlje veliko manjša kot ukrivljenost nogometne žoge. Predznak $k(p)$ pa nam pove, kako približno *izgleda* ploskev v bližini točke p . Primeri ploskev so na sliki 3.4. Če je $k(p)$ negativno število, ploskev spominja na sedlo: v nekaterih smereh je upognjena navzdol, v drugih navzgor. V primeru, ko je $k(p)$ pozitivno število, je ploskev v vseh smereh upognjena ali samo navzdol ali samo navzgor. Kadar je $k(p)$ enak 0, ploskev v neki smeri ni upognjena. To lastnost imajo ravnina in vse ploskve, katerih intrinzična geometrija je enaka ravnini (ploskve na sliki 3.3).

Gauss je definiral $k(p)$ kot sledi. Naj bo Π ravnina, ki vsebuje normalni vektor \vec{n} na ploskev v točki p . Nato naj bo k ukrivljenost krivulje, ki jo dobimo kot presek ploskve in ravnine Π , v točki p . Predznak $k(p)$ je odvisen od tega, ali je ukrivljenost v smeri \vec{n} ali $-\vec{n}$. Označimo s k_{max} in k_{min} največjo in najmanjšo vrednost k ob vrtenju Π okoli \vec{n} .

Definicija 18. Gaussova ukrivljenost je vrednost

$$k(p) = k_{max}k_{min}. \quad (3.3)$$

Glede na definicijo lahko razumemo, da je k odvisna od natančne oblike ploskve v prostoru (ekstrinzična geometrija). Največje odkritje pa je dejstvo, da k pravzaprav meri intrinzično ukrivljenost ploskve in je neodvisna od ukrivljanja!

Pogoj, da obstaja geometrija na ukrivljeni ploskvi, torej, da obstaja neka transformacijska grupa, je, da je vrednost $k(p)$ enaka za vse točke p na ploskvi. Govorimo o ukrivljenih ploskvah s *konstantno ukrivljenostjo*. Take so vse ploskve na slikah 3.3 in 3.4. Podobno kot se papir prilega mizi, se tudi del ploskve s konstantno ukrivljenostjo brez raztezanja popolnoma prilega ploskvi na nekem drugem mestu. Drsenje trikotnika na sferi je lahko predstavljivo. Za pseudosfero je prileganje manj očitno, saj je potrebno upogibanje. Seveda pa trditev o prileganju ne velja za sferi oziroma pseudosferi z različnima radijema. Pri tem radij pseudosfere imenujemo polmer kroga, ki ga dobimo z vodoravnim presekom *osnove* oziroma *dna* pseudosfere. Sferi oziroma pseudosferi z različnima radijema imata namreč različni ukrivljenosti.

Ukrivljenost $k(p)$, kot jo določa enačba 3.3, je že omenjena konstanta k (namenoma sem jo označil enako) v enačbi

$$E(T) = kA(T). \quad (3.4)$$

Velja, da jo pri sferi in pseudosferi izračunamo kot $k = \pm(1/R^2)$, kjer je R radij sfere oziroma pseudosfere. Dokaz trditve in še več o diferencialni geometriji najdemo v [2].

Ponovimo, da lahko evklidsko, sferično in hiperbolično geometrijo interpretiramo kot intrinzično geometrijo ploskev s konstantno nično, pozitivno in negativno ukrivljenostjo k .

3.5 Geometrije višjih dimenzij

Na koncu poglavja naj omenim, da tudi geometrije višjih dimenzij lahko definiramo s pomočjo transformacijske grupe. Primeri geometrij treh dimenzij so evklidska geometrija v prostoru, sferična geometrija na 3-sferi in hiperbolična geometrija v (hiperboličnem) prostoru. V tem delu bom obravnaval le geometrije dveh dimenzij, kot nam pove naslov tega poglavja. Bralec, ki ga zanima geometrija treh dimenzij, lahko tovrstno teorijo poišče v [11]. Naj bralca ne zmoti dejstvo, da moramo na primer 2-sfero narisati v prostoru. Kljub temu gre za dvodimenzionalno geometrijo, saj lahko točke na sferi opišemo z dvema parametroma (na primer ϕ in θ v sferičnih koordinatah). Podobno velja za pseudosfero, ravnino v prostoru ali katero drugo ploskev s prejšnjih slik. Dodaten argument je, da obstajajo bijektivne izometrične preslikave na ravnino, ki jih bomo spoznali v petem in šestem poglavju.

Poglavje 4

Evklidska geometrija

Povezavo med evklidsko geometrijo v ravnini in Möbiusovimi transformacijami sem posredno razkril že v drugem poglavju. Cilj tega poglavja pa je natančno opredeliti transformacijsko grupo \mathcal{G} evklidske geometrije. Spomnimo se, kako smo poskušali trikotnik, narisane na papir, z nekim premikom položiti na drug trikotnik. Pri tem smo morali z listom papirja opraviti nek premik v prostoru, sestavljen iz:

- obračanja,
- premikanja (translacije) in
- vrtenja (rotacije).

V seznamu lahko pojem „obrniti“ zamenjamo s pojmom „prevrtni“, saj je papir na koncu vedno v vodoravnem položaju. Kako vemo, katere operacije moramo izvesti, da bomo nek lik prilagodili drugemu?

4.1 Transformacijska grupa \mathcal{G}

Trditev 30. Vsaka transformacija $\mathcal{M} \in \mathcal{G}$ je enolično določena s sliko T' trikotnika T .

Dokaz. Če torej poznamo slike treh nekolinearnih točk, lahko izračunamo sliko poljubne točke v ravnini. Pri dokazovanju nam je v pomoč dejstvo, da položaj poljubne točke P v ravnini določajo oddaljenosti od treh referenčnih točk. Naj bosta podani točki A in B in razdalji $|PA|$ in $|PB|$. Položaja točke P s tem še ne moremo določiti, saj je lahko eno izmed dveh presečišč krogov s središčema

v A in B ter radijema $|PA|$ in $|PB|$. Potrebujemo torej še razdaljo od tretje točke C . Ker transformacije \mathcal{M} ohranjajo razdalje med točkami, velja da lahko položaj točke $P' = \mathcal{M}(P)$ določimo s pomočjo točk A' , B' in C' .

Dokaz trditve 30 nam pove, da ob nepoznavanju slike točke C , transformacija še ni določena. Vendar pa \mathcal{M} ohranja razdalje, zato sta možna položaja slike točke C le dva. Označimo ju s C' in \tilde{C}' , ustreznimi preslikavi pa z \mathcal{M} in $\tilde{\mathcal{M}}$, tako da velja $\mathcal{M}(C) = C'$ in $\tilde{\mathcal{M}}(C) = \tilde{C}'$. Sliki C' in \tilde{C}' sta simetrični glede na premico $L = A'B'$. Trikotnika ABC' in $AB\tilde{C}'$ se razlikujeta za zrcaljenje \mathfrak{R}_L prek premice L . Transformaciji \mathcal{M} in $\tilde{\mathcal{M}}$ se med seboj razlikujeta v tem, kako vplivata na orientacijo kotov. Naj bo transformacija \mathcal{M} konformna, $\tilde{\mathcal{M}}$ pa antikonformna.

Trditev 31. *Obstaja natanko ena konformna transformacija \mathcal{M} in natanko ena antikonformna transformacija $\tilde{\mathcal{M}}$, ki preslika daljico AB v daljico $A'B'$. Velja*

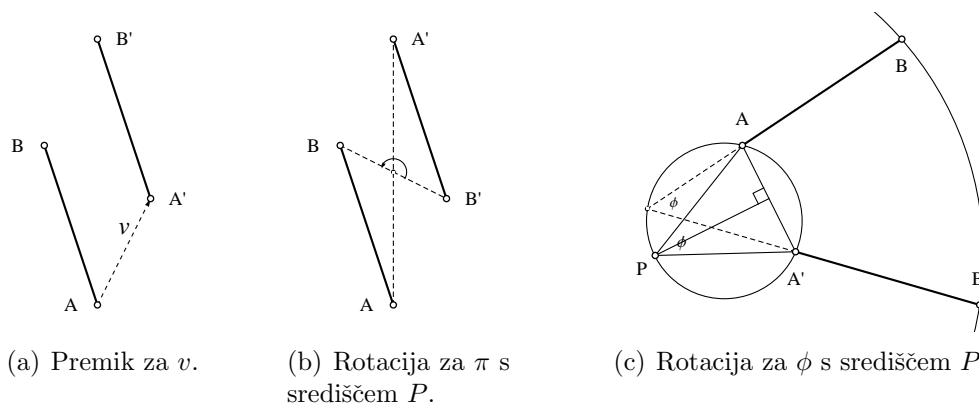
$$\tilde{\mathcal{M}} = \mathfrak{R}_{A'B'} \circ \mathcal{M}. \quad (4.1)$$

Za nas je pomembnejše dejstvo, da transformacije $\tilde{\mathcal{M}} \in \mathcal{G}$, torej take, katerih sestavni del je zrcaljenje, ne tvorijo podgrupe grupe \mathcal{G} . Kompozitum dveh antikonformnih preslikav namreč ni antikonformna preslikava, kar sledi iz trditve 27.

Iščemo torej transformacije $\mathcal{M} \in \mathcal{G}$, ki tvorijo grupo. Da bralca ne bi zmedla sprememba v notaciji, naj poudarim, da bom v nadaljevanju z \mathcal{M} označeval *konformne* transformacije.

Trditev 32. *Vsaka konformna transformacija \mathcal{M} je rotacija in izjemoma translacija.*

Dokaz. Iz trditve 31 sledi, da je vsaka konformna transformacija enolično določena s slikama dveh točk A in B . Glede na razmerje med položajema daljice AB in njene slike $A'B'$ ločimo tri primere, prikazane na sliki 4.1. Če je $A'B'$ vzporedna AB ter nasprotno orientirana, gre za rotacijo s središčem v točki P za π . Točka P leži na presečišču daljic AB' ter BA' (slika 4.1(b)). V primeru, ko sta daljici vzporedni in enako orientirani, gre za translacijo (4.1(a)). To je tudi edina situacija, v kateri je potrebna translacija. V vseh ostalih primerih gre izključno za rotacijo. Na sliki 4.1(c) vidimo konstrukcijo središča rotacije P v primeru, ko daljici nista vzporedni.



Slika 4.1: Togi premiki.

V prvem poglavju (trditev 10 na strani 12) smo spoznali, da linearna funkcija $f(z) = AZ + B$, ko velja $|A| = 1$, predstavlja prav rotacijo in (izjemoma) translacijo, zato velja naslednja trditev.

Trditev 33. Vsak togi premik \mathcal{M} evklidske geometrije lahko izrazimo kot funkcijo:

$$\mathcal{M}(z) = e^{i\phi}z + v. \quad (4.2)$$

4.2 Togi premiki kot zrcaljenja

Spoznali smo, da transformacije $\tilde{\mathcal{M}} \in \mathcal{G}$ ne tvorijo grupe, saj je kompozitum dveh antikonformnih preslikav konformna preslikava. Poraja se ideja, da bi konformne preslikave tvorili s pomočjo preslikav $\tilde{\mathcal{M}}$. V primeru, ko $\tilde{\mathcal{M}}$ predstavlja enostavno zrcaljenje \mathfrak{R}_L prek premice L , se ideja izkaže kot pravilna.

Trditev 34. Vsaka konformna transformacija \mathcal{M} je kompozitum dveh zrcaljenj prek premic L_1 in L_2 :

$$\mathcal{M} \equiv \mathfrak{R}_{L_2} \circ \mathfrak{R}_{L_1}. \quad (4.3)$$

Očitno je pomembna medsebojna lega premic L_1 in L_2 . Ločimo dva primera:

1. premici L_1 in L_2 se sekata in

2. L_1 in L_2 sta vzporedni.

Trditev 35. Če sta L_1 in L_2 vzporedni, razdalja med njima pa je enaka $|\mathbf{v}|$ v smeri \mathbf{v} , je $\mathfrak{R}_{L_2} \circ \mathfrak{R}_{L_1}$ premik $\mathcal{T}_{2\mathbf{v}}$ za $2\mathbf{v}$.

Trditev 36. Če imata premici skupno točko p in objemata kot ϕ , je $\mathfrak{R}_{L_2} \circ \mathfrak{R}_{L_1}$ rotacija $\mathcal{R}_p^{2\phi}$ za 2ϕ okrog p .

Dokaze trditev 34 do 36 lahko bralec najde v [7]. Ker se transformaciji $\tilde{\mathcal{M}}$ in \mathcal{M} razlikujeta za zrcaljenje (trditev 31), lahko vsako transformacijo $\tilde{\mathcal{M}}$ zapišemo kot kompozitum treh zrcaljenj. Dejstvo, da je vsaka transformacija iz \mathcal{G} kompozitum dveh ali treh zrcaljenj, imenujemo *teorem treh zrcaljenj*.

Zrcaljenje $\mathfrak{R}_{A'B'}$ v enačbi 4.1 lahko zamenjamo s poljubnim zrcaljenjem, na primer kompleksno konjugacijo. Označimo jo z $\mathfrak{R}_{\mathfrak{R}}$. Enačba $\tilde{\mathcal{M}} = \mathfrak{R}_{A'B'} \circ \mathcal{M}$ sicer ne drži več, velja pa $\tilde{\mathcal{M}} = \mathfrak{R}_{\mathfrak{R}} \circ \mathcal{M}'$, kjer je \mathcal{M}' neka druga konformna preslikava iz \mathcal{G} . Če upoštevamo še trditev 33, izpeljemo naslednjo trditev.

Trditev 37. Vsako antikonformno transformacijo $\tilde{\mathcal{M}}$ evklidske geometrije lahko zapišemo kot

$$\tilde{\mathcal{M}}(z) = e^{i\phi}\bar{z} + v. \quad (4.4)$$

Pristop k definiciji transformacijske podgrupe preslikav \mathcal{M} kot zaporedij dveh zrcaljenj je enostavnejši od pristopa, ki sem ga uporabil v prejšnjem razdelku, zato bom ta pristop uporabil pri neevklidskih geometrijah.

4.3 Podobnost

Pri evklidski geometriji v ravnini se srečamo tudi s pojmom podobnosti.

Definicija 19. Podobnost \mathcal{S} je transformacija ravnine, ki ohranja razmerja razdalj.

Vsaka podobnost poveča razdaljo med poljubnima točkama za nek faktor $r > 0$, kar zapišemo s \mathcal{S}^r . Identiteta \mathcal{I} je podobnost, velja tudi $\mathcal{S}^k \circ \mathcal{S}^r = \mathcal{S}^{kr}$ in $(\mathcal{S}^r)^{-1} = \mathcal{S}^{(1/r)}$. Množica podobnosti tvori grupo.

Definicija 20. Evklidska geometrija je proučevanje tistih lastnosti geometrijskih objektov, ki ostanejo nespremenjene nad transformacijsko grupo podobnosti [4].

Podgrupa podobnosti \mathcal{S}^1 je kar enaka grupi enakosti oziroma togih premikov. Splošna podobnost \mathcal{S}^r pa je kombinacija togega premika \mathcal{M} in raztega \mathcal{D}_p^r za faktor r s središčem v p . Učinek \mathcal{D}_p^r je določen z enačbo 2.16 na strani 11.

Trditev 38. *Vsaka podobnost \mathcal{S}^r je sestavljena iz rotacije za ϕ in raztega za faktor r s središčem v točki p (oziroma izjemoma premika):*

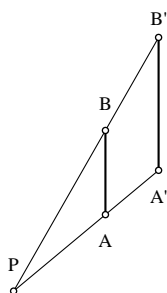
$$\mathcal{S}^r \equiv \mathcal{R}_p^\phi \circ \mathcal{D}_p^r = \mathcal{D}_p^{r,\phi}. \quad (4.5)$$

Dokaz. Prepričajmo se z analizo poljubne daljice AB in njene slike $A'B'$, ki si jih predstavljamo kot stranici med seboj podobnih trikotnikov. V primeru, ko sta daljica in njena slika enake dolžine, imamo 3 možnosti na sliki 4.1, ki smo jih že obravnavali. V nasprotnem primeru imamo 3 možnosti na sliki 4.2. Če sta daljici vzporedni, sta možni dve situaciji. Na sliki 4.2(a) gre za podobnost $\mathcal{D}_p^{r,0}$, na sliki 4.2(b) pa za $\mathcal{D}_p^{r,\pi}$. V obeh primerih velja $r = (pA'/pA) = (pB'/pb)$. Ostal nam je le še splošen primer podobnosti, prikazan na sliki 4.2(c). Poiskati moramo središče rotacije in raztega p , faktor raztega r ter kot rotacije ϕ , da bo $\mathcal{D}_p^{r,\phi}$ preslikala A v A' ter B v B' . Očitno je, da mora biti kot ϕ enak kotu med daljicama. Le tako se bo daljica AB po rotaciji preslikala v neko vzporednico daljici $A'B'$. Kot dobimo tako, da konstruiramo točko S , v kateri se sekata nosilki AB ter $A'B'$. Ker mora veljati $\phi = \angle ApA' = \angle ASA'$, mora točka p ležati na krožnici skozi A , A' in S . Ker enako velja za kot $\angle BpB'$, sta nam ostali dve možnosti za točko p . To sta presečišči S in Q med krogoma skozi A , A' in S oziroma B , B' in S . Ker mora biti faktor raztezka r enak $A'B'/AB$, sledita pogoja: $(pA'/pA) = (pB'/pB) = r$. V splošnem to za točko S ne drži, zato velja $p = Q$. Ustrezna preslikava je torej $\mathcal{D}_p^{r,\phi}$.

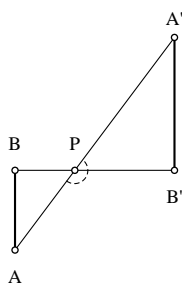
Ponovno se spomnimo splošne linerane funkcije $f(z) = Az + B$ (trditev 10), katere geometrijski pomen je prav rotacija in razteg (ter izjemoma translacija), in sklenimo zaključno ugotovitev o povezavi med evklidsko geometrijo in kompleksnimi števili.

Trditev 39. *Vsako podobnost \mathcal{S}^r evklidske geometrije lahko izrazimo s funkcijo*

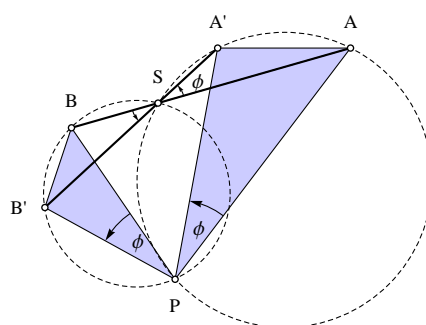
$$\mathcal{S}^r(z) = re^{i\phi}z + v. \quad (4.6)$$



(a) Razteg za faktor $AB/A'B'$ s središčem P .



(b) Rotacija za π in razteg za faktor $AB/A'B'$ s središčem P .



(c) Rotacija za ϕ in razteg za faktor $AB/A'B'$ s središčem P .

Slika 4.2: Podobnosti.

Poglavje 5

Sferična geometrija

Ko pričnemo risati na sfero, se moramo najprej spoprijeti s problemom, kako pravilno med seboj povežemo tri točke, da dobimo trikotnik. Kako torej izgledajo sferične geodete?

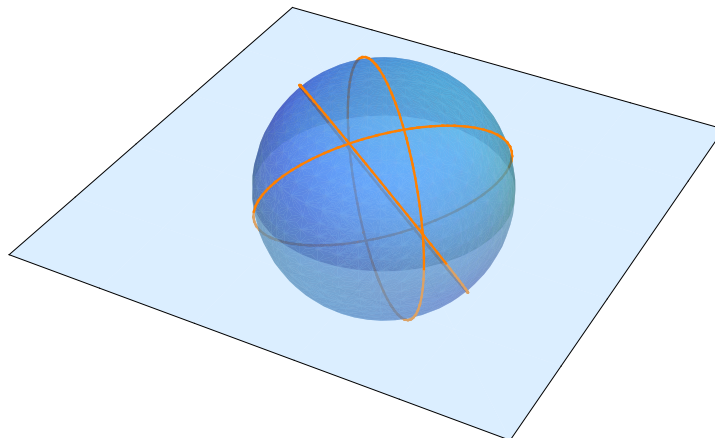
Definicija 21. Geodete na sferi z radijem R imenujemo veliki krogi. Izkažejo se kot krožnice z radijem R .

Veliki krogi so presečne točke med sfero in ravninami skozi koordinatno izhodišče. Veliki krog L skozi točki A in B na sferi torej določa ravnina skozi ti točki ter izhodišče O . To ravnino bomo zapisali z Π_L . V izjemnem primeru, ko so točke A , B in O kolinearne, je ravnin Π_L neskončno, zato tudi veliki krog L skozi A in B ni enolično določen. V tem primeru rečemo, da sta točki A in B antipodni oziroma, da je točka B antipod točke A ; $B = \check{A}$. Na sliki 5.1 so prikazani trije veliki krogi. Iz slike lahko razberemo tudi, kako izgleda trikotnik, ki ga ti veliki krogi omejujejo.

Vemo, da se poljubni dve ravnini, skozi koordinatno izhodišče O , sekata v premici skozi O . Vsaka premica skozi izhodišče pa seka sfero v dveh točkah. Iz tega sledi, da imata poljubna dva velika kroga vedno natanko dve skupni točki. Velja tudi, da sta ti točki antipodni. Velja torej sferični aksiom, ki pravi, da vsaka premica skozi A , ki ni na premici L , seka premico L .

5.1 Sferični trikotnik

V prejšnjem poglavju sem govoril o vrednosti $k(p)$, to je o ukrivljenosti ploskve v točki p . Omenil sem tudi, da je sfera ploskev s konstantno pozitivno ukrivljenostjo $k(p) = k > 0$. Velja $k = 1/R^2$, kjer je R radij sfere [2]. V tem delu bom obravnaval sfero z radijem $R = 1$.

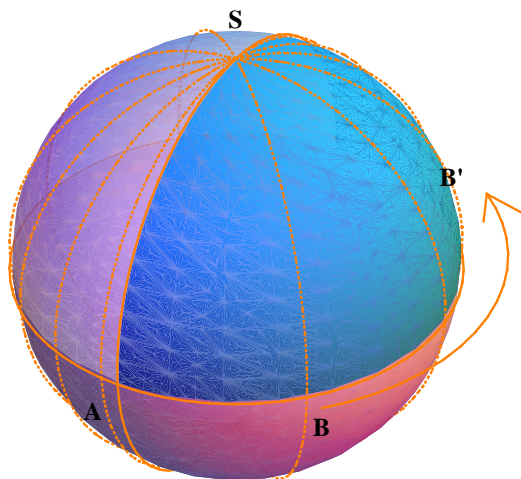


Slika 5.1: Veliki krogi.

Iz enačb 3.1 in 3.2 sledi, da je vsota notranjih kotov trikotnika T na sferi enaka $\pi + kA(T) = \pi + A(T)$. Pri tem je $A(T)$ ploščina trikotnika T . Očitno je, da vsota notranjih kotov ne more biti manjša od π . Za infinitezimalno majhne trikotnike velja, da se vsota notranjih kotov bliža π . Podobno velja za ploskve z infinitezimalno majhno ukrivljenostjo k , na primer sfero z neskončno velikim radijem R . Enačba za izračun vsote notranjih kotov trikotnika nam pove, da je maksimalna vrednost vsote odvisna od maksimalne velikosti trikotnika $A(T)$. Ploščina trikotnika naj ne bi bila večja od ploščine sfere, v našem primeru $R = 1$ le ta znaša 4π .

Trditev 40. *Največja možna ploščina trikotnika na sferi je enaka četrtini ploščine sfere, torej π .*

Dokaz. Da je to res, lahko obrazložimo s sliko 5.2. Sfero postavimo v prostor (x, y, z) , tako da je enačba sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Izberimo si prvo točko, S , ki naj bo severni pol sfere, $S(0, 0, 1)$, in drugo točko $A(0, 1, 0)$. Določimo tretjo točko trikotnika, naj bo B , blizu A , leži pa naj na enotskem polkrogu v polravnini $x > 0, z = 0$. Ko točko B premikamo po enotski krožnici proti točki $A'(0, -1, 0)$, to je antipodni točki A , se trikotnik razgrinja nad tistim delom (četrtini) sfere, kjer velja $x > 0, z > 0$. Ko je B povsem blizu A' , je ploščina trikotnika SAB blizu π . V točki $B = A'$ veliki krog skozi A in B ni določen, zato težko govorimo o trikotniku. Če B premikamo dalje po krožnici v smeri



Slika 5.2: Sferični trikotnik.

urinega kazalca, veliki krog med A in B preskoči na polravnino $x < 0, z = 0$. Podobno velja tudi za trikotnik. Ploščina takega trikotnika je ponovno manjša od π in se s premikanjem B še naprej po krožnici manjša.

5.2 Transformacijska grupa \mathcal{G}

Poiščimo, podobno kot smo to storili pri evklidski geometriji, transformacijsko grupo \mathcal{G} , t.j. družino preslikav iz sfere na sfero, ki ohranjajo geometrijo objektov v sferični geometriji. Razmislimo, katere operacije bi lahko vsebovala grupa \mathcal{G} , kasneje pa bomo transformacijsko grupo formalizirali s pomočjo trditve 34, ki velja tudi pri sferični geometriji [7]. Kandidati za transformacije iz \mathcal{G} so:

- premik (drsenje pomarančnega olupka po pomaranči),
- rotacija okrog neke osi (vrtenje žoge) in
- zrcaljenja.

Tudi tu bomo transformacije grupe \mathcal{G} razdelili v dve podmnožici: podgrupo konformnih transformacij \mathcal{M} in antikonformne transformacije $\tilde{\mathcal{M}}$. Osredotočili se bomo predvsem na konformne transformacije \mathcal{M} , ki jih tudi v sferični geometriji imenujemo togi premiki. Ti se torej kažejo kot kombinacija rotacije in premika. Kljub temu moramo vedeti, kaj pomeni zrcaljenje \mathfrak{R}_L sfere prek velikega kroga L , saj bomo transformacije \mathcal{M} konstruirali s pomočjo zrcaljenj.

Če želimo točko A zrcaliti prek L , moramo poiskati veliki krog M skozi A , ki je pravokoten na L . Iščemo ravnino Π_M skozi koordinatno izhodišče in točko A , tako da je Π_M pravokotna na Π_L . S temi zahtevami je Π_M enolično določena, razen v izjemnem primeru, ko je vektor v smeri A pravokoten na Π_L . V tem primeru je velikih krogov M neskončno, zrcalna slika A' pa je kar njena antipodna točka \check{A} . V splošnem primeru slika A' dobimo tako, da izmerimo razdaljo od A do presečišča M z L in to razdaljo odmerimo na M od presečišča naprej. Velika kroga L in M se seveda sekata v dveh točkah, vendar ni pomembno, katero razdaljo si izberemo. Izkazuje se, da je zrcaljenje prek velikega kroga na sferi enakovredno zrcaljenju preko ravnine Π_L v evklidskem prostoru.

V prejšnjem poglavju smo ugotovili, da lahko vsako rotacijo v evklidski geometriji konstruiramo kot zrcaljenje prek dveh presečnih premic, premik pa kot zrcaljenje prek vzporednic. Prva konstrukcija je izvedljiva tudi pri sferični geometriji, ker pa na sferi ni vzporednih geodet oziroma velikih krogov (poljubna velika kroga se sekata v dveh točkah), v sferični geometriji nimamo analogne transformacije premikom. Vsako drsenje trikotnika po sferi je enakovredno neki rotaciji. Toge premike sferične geometrije sestavljajo torej le rotacije.

Vsako rotacijo določata os V rotacije in kot ϕ . Če si os predstavljamo kot premico skozi izhodišče, jo določa eno izmed dveh presečišč te premice s sfero. Označimo ti točki s p in \check{p} in povejmo, da sta ti dve točki antipodni. Tako definirano rotacijo zapišemo z \mathcal{R}_p^ϕ . Kadar je $\phi > 0$, gre za rotacijo v pozitivni smeri, t.j. v nasprotni smeri urinega kazalca, če gledamo na sfero od zunaj. Velja tudi $\mathcal{R}_p^\phi = \mathcal{R}_{\check{p}}^{-\phi}$.

Trditev 41. *Rotacijo sfere \mathcal{R}_p^ϕ konstruiramo kot zrcaljenje preko dveh velikih krogov L_1 in L_2 , ki se sekata v p in oklepata kot $\phi/2$:*

$$\mathcal{R}_p^\phi = \mathfrak{R}_{L_2} \circ \mathfrak{R}_{L_1}. \quad (5.1)$$

Dokaz. Naj bosta Π_{L_1} in Π_{L_2} ravnini, ki oklepata pozitiven kot $\phi/2$, presečne točke med njima naj tvorijo premico l_v s smernim vektorjem \mathbf{v} . Ravnina Ω naj bo pravokotna na Π_{L_1} in Π_{L_2} (takih ravnin je neskončno). Presečne točke

med Π_{L_1} in Ω ter med Π_{L_2} in Ω naj tvorijo premici l_1 in l_2 . Učinek zracljenja $\mathfrak{R}_{\Pi_{L_2}} \circ \mathfrak{R}_{\Pi_{L_1}}$ prek ravnin Π_{L_1} in Π_{L_2} na ravnino Ω je zrcaljenje $\mathfrak{R}_{\Pi_{l_2}} \circ \mathfrak{R}_{\Pi_{l_1}}$ prek premic l_1 in l_2 . To je rotacija za ϕ s središčem v presečišču med l_1 in l_2 ! Ker velja enako za katerokoli ravnino, vzporedno ravnini Ω , sklepamo, da $\mathfrak{R}_{\Pi_{L_2}} \circ \mathfrak{R}_{\Pi_{L_1}}$ predstavlja rotacijo prostora za ϕ okrog premice l_v . Če gre premica l_v čez koordinatno izhodišče, rotacija ohranja oddaljenost točk od izhodišča. Točke na sferi torej ostajajo na sferi - gre za rotacijo sfere okrog l_v . Poleg tega velja, da tudi ravnini Π_{L_1} in Π_{L_2} vsebujeta koordinatno izhodišče in s tem enolično določata velika kroga L_1 in L_2 . Spomnimo se, da je za točke na sferi zrcaljenje prek ravnine ekvivalentno zrcaljenju prek velikega kroga, ki leži v tej ravnini. Učinek $\mathfrak{R}_{\Pi_{L_2}} \circ \mathfrak{R}_{\Pi_{L_1}}$ za točke na sferi je torej $\mathfrak{R}_{L_2} \circ \mathfrak{R}_{L_1}$. Če je p točka na sferi v smeri \mathbf{v} , velja $\mathfrak{R}_{L_2} \circ \mathfrak{R}_{L_1} = \mathcal{R}_p^\phi$. Trditev je s tem dokazana.

Videli smo, da lahko rotacijo sfere \mathcal{R}_p^ϕ za kot ϕ s središčem v točki p predstavimo s kompozicijo zrcaljenj prek poljubnih dveh velikih krogov s skupno točko p , v kateri tvorita kot $\phi/2$. Rotacija \mathcal{R}_p^ϕ sfere ima dve fiksni točki, to sta p in njen antipod \check{p} . Obstaja tudi natanko en veliki krog P , ki se preslika vase. Veliki krog P leži v ravnini, pravokotni na os rotacije. Pravimo, da je P polarni krog točke p , oziroma, da je točka p pol velikega kroga P . Invariantne krivulje rotacije so še vse krožnice na sferi, ki ležijo v ravninah, pravokotnih na os rotacije.

Ob koncu razprave povejmo, da je tudi v sferični geometriji vsaka transformacija določena s sliko poljubnega trikotnika [7], in zapišimo končno ugotovitev o transformacijski grupi \mathcal{G} .

Trditev 42. *Obstaja natanko ena konformna transformacija \mathcal{M} in natanko ena antikonformna transformacija $\tilde{\mathcal{M}}$, ki preslika del velikega kroga AB med A in B v del velikega kroga $A'B'$ med A' in B' enake dolžine. Velja*

$$\tilde{\mathcal{M}} = \mathfrak{R}_{A'B'} \circ \mathcal{M}. \quad (5.2)$$

5.3 Preslikava s sfere Σ na \mathbb{C}

Ker želim prikazati povezavo med rotacijami sfere in Möbiusovimi transformacijami, ki delujejo na kompleksni ravnini, potrebujemo ravninski model sferične geometrije. Z drugimi besedami, iščemo povezavo oziroma preslikavo med točkami na sferi in kompleksnimi števili. Taki preslikavi pravimo tudi *projekcija*.

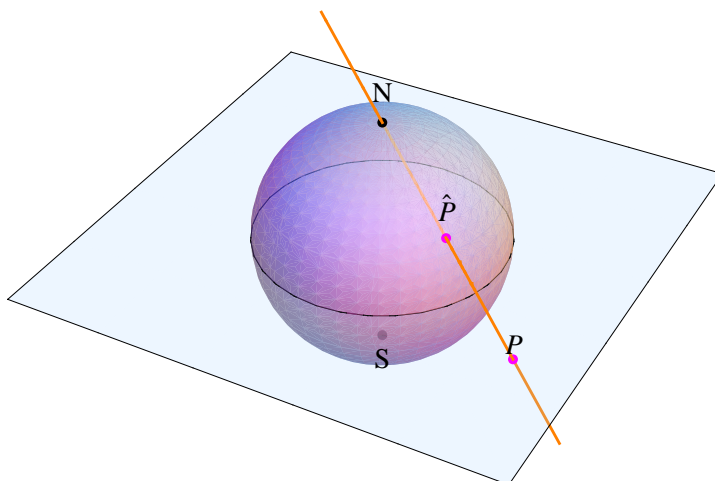
Pri izbiri projekcije se najprej srečamo s pojmom razdalje. Spoznali smo, da je pravzaprav razdalja med točkami na ploskvi tista količina, ki vodi do različnih geometrij. Iskanje najmanjše razdalje v ravnini nam da daljice oziroma premice, na sferi pa pridemo do velikih krogov. Zanima nas torej povezava med razdaljami dveh točk na sferi \hat{z} in \hat{q} ter njunimi projekcijami v ravnini, z in q .

Definicija 22. Transformacija metrike $\Lambda(z, \phi)$, določena s projekcijo s ploskve S na ravnino \mathbb{C} , je razmerje med razdaljo $d\hat{s}$ na ploskvi S in (evklidsko) razdaljo ds v ravnini. Velja

$$d\hat{s} = \Lambda(z, \phi)ds. \quad (5.3)$$

V našem primeru je ploskev S sfera, $d\hat{s}$ razdalja na sferi in ds evklidska razdalja v ravnini. Izberimo q zelo blizu z , tako da velja $z = q + dz$, in $ds = |dz|$. Enačba 5.3 pove, da je razdalja $d\hat{s}$ na sferi odvisna od položaja projekcije točke \hat{z} na ravnino, torej z , smeri ds glede na z ter seveda razdalje v ravnini ds . Posledica vpeljave metrike v ravnino je, da je geometrija take ravnine drugačna od evklidske. Evklidska geometrija je geometrija ravnine z evklidsko metriko oziroma $\Lambda(z, \phi) = 1$. Ravnini z vpeljano metriko rečemo tudi *metrični prostor*. Kaj lahko se zgodi, da najkrajša pot med dvema točkama v ravnini z metriko, različno od evklidske, ni več daljica med njima! Če želimo, da geometrija naše ravnine upošteva sferični aksiom, je transformacija metrike očitno nujna. Bralec bi pomislil, da bi bila primernejša projekcija, ki bi geodete sferične geometrije (velike kroge) projicirala v geodete evklidske geometrije (premice). Ponovno pa se pojavi problem, saj bi bila vsota notranjih kotov trikotnika T v ravnini enaka π . Za trikotnik \hat{T} na sferi pa to ne drži. Izkazuje se, da je konformnost projekcije pomembnejša lastnost od ohranjanja geodet. Projekcija je konformna, če transformacija metrike $\Lambda(z, \phi)$ ni odvisna od smeri ϕ števila dz [7]. Tako se poljuben neskončno majhen lik na sferi razlikuje od svoje projekcije na ravnino le v (navidezni) velikosti. Končno nam tudi ukripljenost sfere ($k > 0$) onemogoča, da bi sferično geometrijo preprosto „prevedli“ na evklidsko, ob tem pa ohranili vse lastnosti prve. Prisiljeni smo izbrati nek element, ki ga želimo ohraniti, in zanemariti ostale.

Želimo tudi, da bi bila naša projekcija izometrična. Dolžina projekcije poljubnega velikega kroga mora torej znašati 2π . Iščemo torej konformno in izometrično transformacijo oziroma projekcijo s sfere na ravnino ter pripadajočo transformacijo metrike $\Lambda(z)$. Zahtevane pogoje izpolnjuje stereografska projekcija.



Slika 5.3: Stereografska projekcija.

5.4 Stereografska projekcija

Stereografsko projekcijo kompleksnega števila dobimo z naslednjo konstrukcijo. Kompleksno ravnino \mathbb{C} umestimo v prostor tako, da koordinatno izhodišče sovpada s središčem sfere, presek ravnine s sfero pa je enotna krožnica. Označimo točki na sferi, ki sta najbolj oddaljeni od kompleksne ravnine kot severni in južni pol N in S . Tangentni ravnini na sfero v polih sta vzporedni kompleksni ravnini. Stereografska projekcija priredi točki p v kompleksni ravnini tisto točko \hat{p} na sferi, ki leži na premici skozi severni pol N in izbrano točko p . Na preslikavo lahko gledamo tudi z drugega zornega kota. Stereografska projekcija točke \hat{p} na sferi je tista točka p v kompleksni ravnini, v kateri le to prebada premica skozi N in izbrano točko \hat{p} (slika 5.3).

Takojšnje posledice takšne projekcije so:

- točke na enotni krožnici so negibne točke preslikave,
- notranjost enotne krožnice se projicira na južno poloblo sfere,
- zunanost enotne krožnice se projicira na severno poloblo,
- točka 0 je projekcija južnega pola S in

- severni pol N se projicira v točko, ki je neskončno oddaljena od izhodišča.

Pri zadnji točki se srečamo z vprašanjem, v katero smer projiciramo severni pol, torej kakšen je argument $\text{Arg}(z)$ projekcije. Podoben problem se je pojavil že pri zrcaljenju prek kroga, kjer smo zapisali, da točka $z = 0$ nima slike med kompleksnimi števili.

Definicija 23. Razširjena kompleksna ravnina je kompleksna ravnina \mathbb{C} , ki ji dodamo točko v neskončnosti ∞ . Za točko v neskončnosti velja, da se ji približujemo, ko gre absolutna vrednost $|z|$ do neskončnosti, ne glede na smer $\text{arg}(z)$.

Z vpeljavo točke v neskončnosti smo tako rešili problem preslikave severnega pola N kot tudi zrcaljenje točke 0 . Na premico v razširjeni kompleksni ravnini zdaj lahko gledamo kot na krog čez točko v neskončnosti.

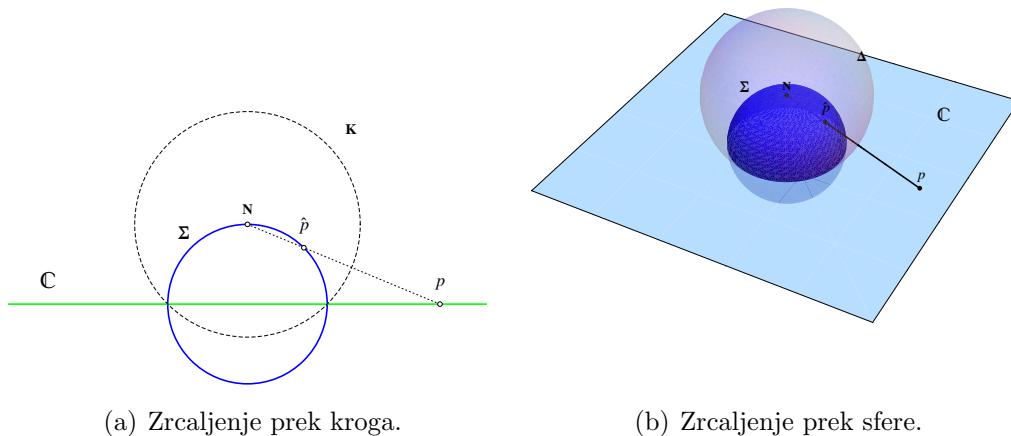
Trditev 43. Premice v kompleksni ravnini se projicirajo v krožnice skozi N .

Dokaz. Poljubna premica v kompleksni ravnini skupaj s severnim polom N tvori neko ravnino v prostoru. Vsaka taka ravnina odreže del sfere. Z drugimi besedami povedano, skupne točke take ravnine in sfere tvorijo krožnico na sferi. Premice se torej res projicirajo v krožnice, ki vsebujejo severni pol. Če si točke na sferi predstavljamo kot kompleksna števila sama in ne le kot projekcijo kompleksne ravnine, vidimo, da krožnice skozi točko v neskončnosti *obstajajo*. Velja tudi, da je tangenta na tako krožnico na sferi v točki N vzporedna s premico, na katero se projicira.

Če konstrukcijo stereografske projekcije, torej sfero s središčem v koordinatnem izhodišču in kompleksno ravnino \mathbb{C} , prerežemo z ravnino, ki vsebuje izhodišče in je pravokotna na \mathbb{C} , dobimo sliko 5.4(a). Vidimo, da je na tako omejenem segmentu stereografska projekcija pravzaprav zrcaljenje prek kroga! Prečni prerez sfere Σ se z zrcaljenjem prek kroga K s središčem v N in radijem $\sqrt{2}$ slika v premico, ki je del kompleksne ravnine \mathbb{C} .

Sedaj si predstavljajmo elemente v prostoru, ki jih dobimo, če sliko 5.4(a) zavrtimo okoli osi SN . Dobimo sfero Σ in ravnino \mathbb{C} . Z rotacijo krožnice K se tvori sfera Δ (slika 5.4(b)). Prišli smo do najzanimivejšega dejstva, da lahko zrcaljenje prek kroga razširimo na zrcaljenje prek sfere $\mathcal{I}_\Delta(p)$. Vse, kar velja za zrcaljenje prek kroga, velja tudi za zrcaljenje prek sfere, le da slednja deluje v prostoru.

Definicija 24. Zrcaljenje prek sfere $\mathcal{I}_\Delta(p)$ z radijem R in središčem q je preslikava, ki točko v prostoru p , oddaljeno za ρ od q , preslika v točko $\tilde{p} = \mathcal{I}_\Delta(p)$, ki ima isto smer glede na q kot p ter za katero velja



(a) Zrcaljenje prek kroga.

(b) Zrcaljenje prek sfere.

Slika 5.4: Stereografska projekcija kot zrcaljenje.

$$|\tilde{p} - q| = R^2/\rho. \quad (5.4)$$

Iz slike 5.4(b) je jasno, da \mathcal{I}_Δ sfero, ki se dotika središča q , preslika v ravnino. V našem primeru gre za sfero Σ in ravnino \mathbb{C} . Iz trditve 21 na strani 18 sledi, da zrcaljenje prek sfere \mathcal{I}_Δ preslika ravnino, ki ne gre skozi središče q v sfero, ki vsebuje q . Iz trditve 22 pa sledi, da \mathcal{I}_Δ sfere, ki se ne dotikajo q , slika sfere, ki se prav tako ne dotikajo q . Ravnine skozi q so invariantne. Če misel o premicah in krogih prenesemo eno dimenzijo višje, ugotovimo, da je ravnina le sfera z neskončnim radijem.

Ker je premica le krožnica z neskončnim radijem, pričakujemo, da se tudi splošna krožnica v kompleksni ravnini projicira v krožnico na sferi.

Trditev 44. *Krožnice v kompleksni ravnini se projicirajo v krožnice, ki ne vsebujejo N .*

Dokaz. Kroge na Σ dobimo s presekom sfere z izbrano ravnino. Zrcaljenje \mathcal{I}_Δ preslika sfero Σ v kompleksno ravnino \mathbb{C} , ravnine pa v sfere (in izjemoma ravnino). Skupne točke med kompleksno ravnino in sferami so seveda krožnice (in izjemoma premica). Stereografska projekcija torej ohranja krožnice.

Ni težko ugotoviti, da se veliki krogi projicirajo v krožnice v kompleksni ravnini, ki sekajo enotski krog v točkah na njegovem premeru. Veliki krogi namreč ležijo v ravnini skozi izhodišče O . Izbrana ravnina skozi točko O in usrezen veliki krog sekata enotsko krožnico v dveh točkah, ki sta simetrični glede

na O . Vemo pa, da so točke na enotski krožnici negibne točke stereografske projekcije. Zapišimo zdaj končno definicijo stereografske projekcije.

Definicija 25. Stereografska projekcija je zrcaljenje \mathcal{I}_Δ sfere Σ prek sfere Δ , ki ima središče v N in radij $\sqrt{2}$. Velja

$$\tilde{p} = \mathcal{I}_\Delta(p) \quad (5.5)$$

in

$$\mathcal{I}_\Delta(\Sigma) = \mathbb{C}. \quad (5.6)$$

Dokaz, da je stereografska projekcija res konformna preslikava, lahko bralec najde v [7]. V nadaljevanju pa bomo poiskali pripadajočo transformacijo metrike in pokazali, da je stereografska projekcija izometrična preslikava.

Ker stereografska projekcija ohranja kroge, se krog in njegova slika razlikujeta le v ploščini. Iščemo razmerje med radijem $d\hat{r}$ neskončno majhnega kroga na sferi ter radijem dr projiciranega kroga v kompleksni ravnini, t.j. transformacijo metrike $\Lambda(z)$. Pri razmisleku si bomo pomagali s sliko 5.4(a). Spomnimo se enačbe 2.50, ki povezuje razdalji med dvema točkama a in b v ravnini in njunimi slikami \tilde{a} in \tilde{b} pri zrcaljenju prek kroga. Če sta a in b točki na premeru kroga v ravnini ter \tilde{a} in \tilde{b} točki na premeru kroga na sferi, velja $dr = |a - b|$ ter $d\hat{r} = |\tilde{a} - \tilde{b}|$. Postavimo še $a = z$ in opomnimo, da v našem primeru velja $R = \sqrt{2}$. V limiti, ko gre a proti b , enačbo 2.50 poenostavimo na

$$d\hat{r} = \frac{2}{|N - z|^2} dr = \frac{2}{1 + |z|^2} dr. \quad (5.7)$$

Transformacija metrike je torej enaka:

$$\Lambda(z) = \frac{2}{1 + |z|^2}. \quad (5.8)$$

Trditev 45. Če v kompleksno ravnino vpeljemo metriko $1/(1 + |z|^2)$, dobimo sferično geometrijo.

Metriko $1/(1 + |z|^2)$ zato imenujemo tudi *sferična metrika*. Če bi torej poskušali narisati najkrajšo pot med dvema točkama v ravnini s tako metriko, bi ugotovili, da je le ta krožni lok. Izračunajmo na primer dolžino realne osi.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1 + x^2} dx = 2 \arctan(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 2\pi. \quad (5.9)$$

Spomnimo se, da je realna os projekcija velikega kroga v ravnini XZ . Ker je dolžina vsakega velikega kroga enaka 2π , je izračunani rezultat pravilen.

Za konec zapišimo še stereografsko enačbo, ki podaja relacijo med točko $A(X, Y, Z)$ na sferi in njeno projekcijo $z = x + yi$ v kompleksni ravnini.

$$x + yi = \frac{X + Yi}{1 - Z}. \quad (5.10)$$

Izpeljavo lahko bralec najde v [7].

5.5 Kompleksne funkcije in sfera

S stereografsko projekcijo smo definirali zvezo med kompleksnimi števili in točkami na sferi. Lahko celo rečemo, da točke na sferi pravzaprav *so* kompleksna števila. Učinek kompleksnih funkcij lahko namesto v ravnini gledamo na sferi. Opazujemo torej točki \hat{z} in \hat{w} na sferi, ki sta stereografski projekciji točk z in w v kompleksni ravnini, povezani z neko funkcijo $w = f(z)$.

Kompleksna konjugacija $f(z) = \bar{z}$ povzroči zrcaljenje sfere Σ prek ravnine XZ . Zrcaljenje prek enotskega kroga $\mathcal{I}_C(z)$ pa pomeni zrcaljenje točk na sferi prek ravnine XY . Skupni učinek teh dveh funkcij je kompleksna inverzija $f(z) = 1/z$. Kompleksna inverzija torej pomeni zaporedno zrcaljenje prek ravnin XY in XZ , ki vsebujeta izhodišče, kot med njima pa znaša $\pi/2$. Ta transformacija je rotacija $\mathcal{R}_{(1,0,0)}^\pi$ sfere s središčem v točki $A(1, 0, 0)$ oziroma okoli realne osi za kot π . Rotacija za π okrog realne osi zamenja pola N in S , enak učinek pa ima tudi kompleksna inverzija nad njunima projekcijama v kompleksni ravnini, 0 in točko v neskončnosti ∞ .

Izkaže se, da lahko z Möbiusovimi transformacijami opišemo rotacije sfere.

Trditev 46. *Zrcaljenje prek $\mathfrak{R}_{\hat{L}}$ velikega kroga \hat{L} na sferi stereografsko povzroči zrcaljenje $\mathcal{I}_L(z)$ prek kroga L , ki je projekcija velikega kroga \hat{L} .*

Dokaz. Dokaz lahko bralec poišče v [7].

Ker so rotacije \mathcal{R}_p^ϕ kompozitum dveh zrcaljenj $\mathfrak{R}_{\hat{L}_2} \circ \mathfrak{R}_{\hat{L}_1}$ (trditev 41), stereografsko povzročijo preslikavo $(\mathcal{I}_{L_2} \circ \mathcal{I}_{L_1})(z)$. V drugem poglavju smo pokazali (trditev 17), da so take preslikave Möbiusove transformacije. Naj bo \hat{T} trikotnik na sferi, T pa njegova projekcija v kompleksni ravnini. Velja relacija

$$\mathcal{R}_p^\phi(\hat{T}) = \hat{T} = \mathcal{I}_\Delta(\tilde{T}) = \mathcal{I}_\Delta((\mathcal{I}_{L_2} \circ \mathcal{I}_{L_1})(T)), \quad (5.11)$$

kjer je \mathcal{I}_Δ stereografska projekcija.

Möbiusova transformacija $M(z) = (\mathcal{I}_{L_2} \circ \mathcal{I}_{L_1})(z)$ ima dve negibni točki a in b . Ti točki sta projekciji točk \hat{a} in \hat{b} na sferi, v katerih se sekata premici \hat{L}_1 in \hat{L}_2 . Izkaže se, da je vsaka Möbiusova transformacija $M(z)$, ki predstavlja rotacijo sfere \mathcal{R}_a^ϕ s središčem v točki \hat{a} za kot ϕ oblike

$$M(z) = \frac{Az + B}{-\bar{B}z + \bar{A}}. \quad (5.12)$$

Utemeljitev enačbe 5.12 presega to delo, najdemo pa jo v [7].

Poglavje 6

Hiperbolična geometrija

V tem poglavju bomo opisal še eno dvodimenzionalno geometrijo in sicer hiperbolično. Omenil sem, da „risanje“ po ploskvi s slike 3.2(b) upošteva zakone hiperbolične geometrije oziroma hiperbolični aksiom. Na sliki 6.1(a) je prikazana konstrukcija krivulje, ki jo imenujemo *traktrisa*. Krivulja ima to lastnost, da je dolžina tangente v vsaki točki med to isto točko in osjo Y konstantna. Označimo to vrednost z R . Enačba traktrise za $R = 1$ v parametrični obliki je

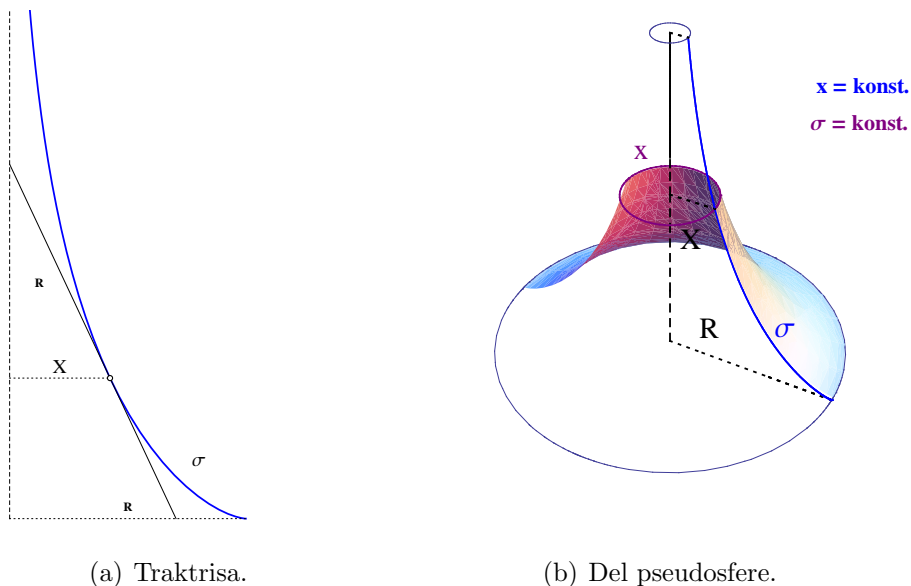
$$x(\alpha) = 1/\cosh(\alpha) \tag{6.1}$$

$$y(\alpha) = \alpha - \tanh(\alpha), \tag{6.2}$$

$\alpha \in [0, \infty)[16]$.

Če traktriso rotiramo okrog osi Y , dobimo *pseudosfero* z radijem R , kar je prikazano na sliki 6.1(b). Taka pseudosfera ima konstantno negativno ukrivljenost $k = -(1/R^2)$ [2]. V nadaljevanju privzemimo, da velja $R = 1$.

Poglavje o sferični geometriji sem začel z obravnavo geodet. Podoben pristop je za pseudosfero precej bolj težaven. Sfera ima veliko pojavnih oblik v realnem svetu, kar pa za pseudosfero ne velja. Na prvi pogled je očitno, da so navpični prerezi pseudosfere (slika 6.1(b)) geodete. Nasprotno pa je za vodoravne prereze manj očitno, da *niso* geodete. Najkrajša pot med točkama na vodoravnem prerezu je najprej usmerjena nekoliko navzgor po osi Y , nato pa se na polovici obrne navzdol. Taka definicija je precej površna, zato bomo raje prešli na enega izmed ravninskih modelov hiperbolične geometrije, kjer bomo geodete natančneje določili. Poznamo več ravninskih modelov, v tem delu sem izbral zgornjo (kompleksno) polravnino.



Slika 6.1: Traktrisa in pseudosfera.

6.1 Preslikava s sfere na zgornjo polravnino

Preden se lotimo preslikave pseudosfere na zgornjo polravnino, bomo definirali vmesno preslikavo med točkami na pseudosferi in podmnožico kompleksnih števil. Še prej moramo priti do dogovora, kako bomo določili točke na pseudosferi. Za ploskve v prostoru velja, da jih opišemo z dvema parametroma. Naj količina x meri kot okoli osi pseudosfere v območju $[0, 2\pi)$. Drugi parameter σ pa naj meri oddaljenost točke od dna pseudosfere. Razdalja σ je torej dolžina traktrise skozi izbrano točko od dna pseudosfere do te iste točke. Točke $x = konst.$ očitno tvorijo traktriso, točke $\sigma = konst.$ pa določajo krožnico z radijem X . Te krožnice so vodoravni prerezi pseudosfere. Povezava med radijem X in parametrom σ je določena z enačbo

$$X = Re^{-\sigma/R}. \quad (6.3)$$

Ker v našem primeru velja $R = 1$, se enačba 6.3 poenostavi na $X = e^{-\sigma}$.

Izberimo tako preslikavo točke (x, σ) na pseudosferi v kompleksno ravnino, da bo parameter x določal realni del kompleksnega števila $z = x + yi$. Traktrise oziroma točke $x = konst.$ bodo v kompleksni ravnini predstavljene z navpičnimi premicami. Določiti moramo še imaginarni del števila z oziroma

funkcijo $y = y(x, \sigma)$. Razvidno je, da so navpični prerezi pseudosfere pravokotni na vodoravne. Ker želimo, da je naša preslikava konformna, se morajo točke $\sigma = konst.$ preslikati v vodoravne premice $y = konst.$ Sledi, da mora biti preslikava $y(x, \sigma)$ odvisna le od parametra σ , torej $y = y(\sigma)$. Poskušajmo z dosedanjimi ugotovitvami določiti transformacijo metrike, ki velja v taki kompleksni ravnini. Proučiti moramo torej razmerje razdalj med dvema točkama na pseudosferi in njunima slikama v kompleksni ravnini. Naj bosta (x, σ) in $(x + dx, \sigma)$ točki na vodoravnem prerezu pseudosfere. Ker je radij na razdalji σ od dna pseudosfere enak $X = e^{-\sigma}$, je razdalja $d\hat{s}$ med točkama na pseudosferi enaka Xdx . To sledi iz enačbe za dolžino krožnega loka in dejstva, da sta točki glede na Z os pseudosfere narazen za kot dx . V kompleksni ravnini je razdalja ds med slikama teh točk enaka natanko dx , saj ležita na vodoravni premici. Spomnimo se trditve iz prejšnjega poglavja, da za konformne preslikave velja, da je transformacija metrike neodvisna od smeri ds glede na z . Transformacija metrike je torej enaka

$$d\hat{s} = Xds = e^{-\sigma} ds. \quad (6.4)$$

Ta enačba ni najbolj primerna, ker moramo poznati parameter σ točke na sferi. Da bi ga lahko izračunali, moramo najprej poznati preslikavo $y = y(\sigma)$, ki določa imaginarni del y slike točke (x, σ) . Ker je transformacija metrike neodvisna od smeri ds glede na z , tudi za točki na traktrisi oziroma navpični premici v kompleksni ravnini velja $dy/d\sigma = 1/X = e^{\sigma}$. Z integracijo dobimo $y = e^{\sigma}$ in s tem

$$d\hat{s} = ds/y \quad (6.5)$$

ter

$$\Lambda(z) = \frac{1}{\Im(z)}. \quad (6.6)$$

Trditev 47. Če v kompleksno ravnino vpeljemo metriko $1/\Im(z)$, dobimo hiperbolično geometrijo.

Metriki $1/\Im(z)$ zato rečemo tudi *hiperbolična metrika*.

Pseudosfera se tako preslika v podmnožico kompleksne ravnine $\Re(z) \in [0, 2\pi)$, $\Im(z) \in [1, \infty)$. Točke $\Im(z) = 1$ so slike točk na dnu pseudosfere. Preslikavo si predstavljamo, kot bi pseudosfero prerezali po traktrisi in jo razvili na omenjeno območje. Višje dele pseudosfere bi v vodoravni smeri ustrezno raztegnili, nato pa še celotno območje v navpični smeri, eksponentno glede na višino.

Taka preslikava je glede na povedano povsem ustrezna, vendar pa pseudosfera sama ni tako popoln model hiperbolične geometrije, kot to velja za sfero in sferično geometrijo. Zato tudi izpeljana preslikava ne predstavlja popolne hiperbolične ravnine. Ima namreč dve veliki pomanjkljivosti. Prva je ta, da ima pseudosfera podobne lastnosti kot cilinder. Vsako zanko v ravnini lahko skrcimo v točko, za zanke na pseudosferi pa to ne velja. Druga pomanjkljivost pa je pseudosferin rob. Taka ploskev ni zvezna in zato ne moremo potegniti geodete poljubno daleč. Traktrise so neomejene v pozitivni smeri Z osi, navzdol pa so omejene. To je še bolj očitno pri definicijskem območju naše preslikave. Realna os je omejena na interval $[0, 2\pi)$. Podobno velja za imaginarno os y , kjer premica $y = 1$ v ravnini predstavlja dno pseudosfere.

Omenjena problema rešimo na naslednji način. Povedali smo, da si vmesno preslikavo predstavljamo kot poskus prileganja plašča pseudosfere ravnini (ravni podlagi). Če pa bi bila pseudosfera več plastna, bi lahko njen plašč razvili čez celotno polravnino nad premico $y = 1$. Slika točke, ki potuje po vodoravni premici, se giblje okoli pseudosfere po krožnici $\sigma = konst.$ in vsake 2π naredi en obhod.

Drugi problem smo pravzaprav že rešili z uvedbo metrike v kompleksno ravnino. Če potujemo nižje od vodoravne premice $y = 1$, nam integracija poti dy/y pove, da je razdalja do realne osi pravzaprav neskončna. Realne osi nikoli ne dosežemo in tako je geodeta, ki se dotika realne osi v hiperbolični ravnini ekvivalentna premici v evklidski ravnini. Navpične premice v hiperbolični ravnini, ki so geodete, so torej v resnici neomejene. Realni osi v hiperbolični ravnini pravimo tudi *obzorje*.

Sliko pseudosfere smo razširili na celotno zgornjo kompleksno polravnino in s transformacijo metrike $\Lambda(z) = 1/\Im(z)$ dobili hiperbolično ravnino. Spoznali smo tudi posebno vrsto geodet, to so navpične premice. V nadaljevanju bomo videli, da so splošne geodete, podobno kot pri sferični geometriji, pravzaprav krožnice.

6.2 Hiperbolične premice in razdalja

Povedali smo, da navpične premice v kompleksni ravnini predstavljajo geodete hiperbolične geometrije. To je torej najkrajša pot med dvema točkama z enakim realnim delom. V nadaljevanju bomo geodeti hiperbolične geometrije rekli kar *h-premica*. V splošnem je hiperbolična razdalja $H(z_1, z_2)$ upošteva je metriko $d\hat{s} = ds/y$, v primeru ko je ds dovolj majhen, enaka

$$H(z, z + dz) = \frac{|dz|}{\Im(z)}. \quad (6.7)$$

Za točki na navpični premici lahko enačbo poenostavimo in zapišemo hiperbolično razdaljo (v nadaljevanju *h-razdaljo*) kot:

$$H(x + y_1i, x + y_2i) = |\ln(y_1/y_2)|. \quad (6.8)$$

Navpične premice v kompleksni ravnini, ki predstavljajo poseben tip h-premic, se združijo v točki v neskončnosti. Ko potujemo navzgor po dveh različnih navpičnih premicah, se h-razdalja med njima eksponentno manjša. V neskončnosti pridemo torej do iste točke. S podobnim konceptom smo se srečali tudi pri sferični geometriji, kjer smo ugotovili, da tako točko predstavlja severni pol sfere. Poleg točk na obzorju imamo v hiperbolični geometriji še eno točko v neskončnosti. Za navpične h-premice torej velja, da se oba konca približujeta točkama v neskončnosti. Izkaže se, da podobno velja tudi za vse ostale h-premice, katerih oba konca se dotikata obzorja oziroma realne osi. Na poti do ugotovitve, kako izgledajo splošne h-premice, se najprej srečamo z zrcaljenjem prek kroga.

Trditev 48. *Zrcaljenje $\mathcal{I}_K(z)$ prek kroga K , ki je pravokoten na realno os, ohranja h-razdaljo.*

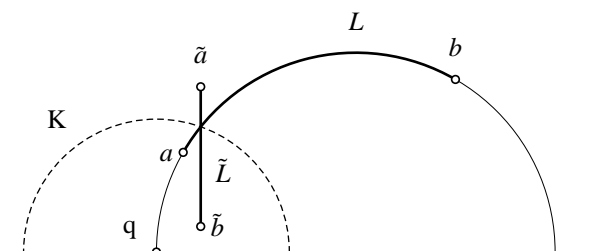
Dokaz. Najprej povejmo, da so krogi, pravokotni na realno os, tisti, ki imajo središče q na realni osi. Naj bo ds razdalja oziroma daljica med z in $z + dz$ v kompleksni ravnini. Pokazati želimo, da $\mathcal{I}_K(z)$ ohranja razdaljo $d\hat{s} = ds/y$. Izberimo daljico ds tako, da bo pravokotna na radij kroga K . Iz podobnih trikotnikov $qz(z + dz)$ in $q\tilde{z}(\tilde{z} + d\tilde{z})$ izhajajo naslednje enakosti:

$$d\hat{s} = \frac{d\tilde{s}}{\tilde{y}} = \frac{ds}{y} = d\hat{s}. \quad (6.9)$$

Zrcaljenje v krogu $\mathcal{I}_K(z)$ s središčem na realni osi v hiperbolični ravnini je neka antikonformna preslikava, ki ohranja razdalje, torej neko *zrcaljenje*. Iz ugotovitev evklidske in sferične geometrije pričakujemo, da je zrcaljenje $\mathcal{I}_K(z)$ v krogu K pravzaprav zrcaljenje prek h-premice K . Preden lahko to trdimo, se moramo prepričati, da so krožnice, pravokotne na realno os res h-premice.

Trditev 49. *Splošne h-premice so polkrogi, pravokotni na realno os.*

Dokaz. Dokaz nam omogoča trditev 48. Izberimo si točki a in b in enolično polkrožnico L skozi ti točki s središčem na realni osi (slika 6.2). Eno izmed

Slika 6.2: Zrcaljenje h-premice v krogu K .

presečišč krožnice L z realno osjo naj bo q . Iz znanja o zrcaljenju prek kroga vemo, da bo vsaka preslikava $\mathcal{I}_K(z)$, kjer ima K središče v q , omenjeno krožnico preslikala v navpično premico. Krožni lok med a in b se torej preslika v navpično daljico $\tilde{a}\tilde{b}$. Za slednjo že vemo, da je najkrajša razdalja med \tilde{a} in \tilde{b} , ker pa $\mathcal{I}_K(z)$ ohranja h-razdaljo, je tudi krožni lok med a in b najkrajša pot med tema točkama.

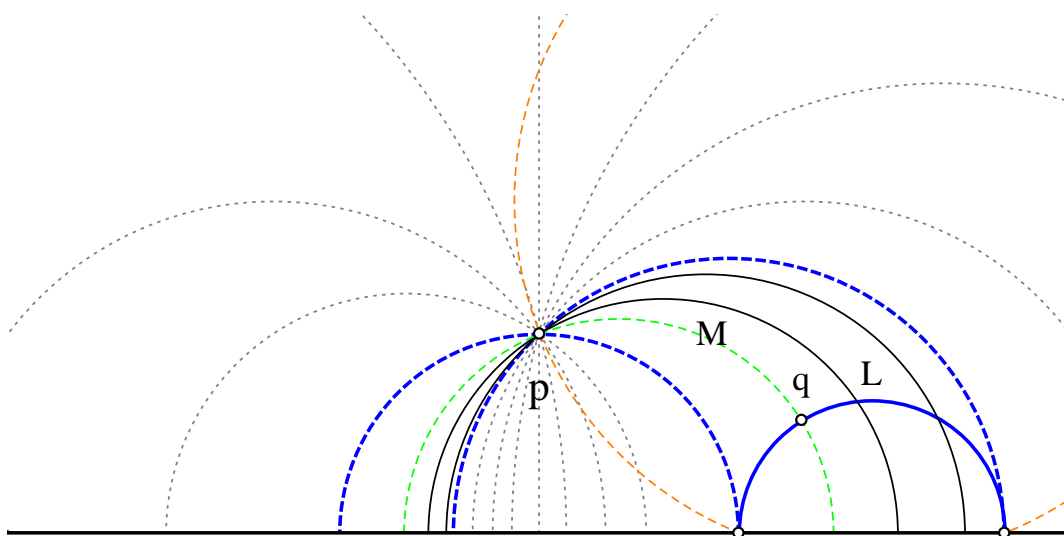
Taka konstrukcija nam omogoča izpeljavo enačbe za izračun h-razdalje med poljubnima točkama:

$$H(a, b) = H(\tilde{a}, \tilde{b}) = \left| \ln \left(\frac{\Im(\tilde{a})}{\Im(\tilde{b})} \right) \right|. \quad (6.10)$$

Trditev 50. Zrcaljenje $\mathcal{I}_K(z)$ prek kroga K je ekvivalentno zrcaljenju prek h-premice K :

$$\mathfrak{R}_K(z) \equiv \mathcal{I}_K(z). \quad (6.11)$$

Dokaz. Da je zrcaljenje v krogu $\mathcal{I}_K(z)$ antikonformna preslikava že vemo. Dokazali smo tudi, da so krožnice, pravokotne na realno os, res h-premice ter da $\mathcal{I}_K(z)$ ohranja h-razdaljo. Ostane nam le še dokaz, da $\mathcal{I}_K(z)$ predstavlja prav zrcaljenje prek premice K . Pokazati moramo, da sta poljubna točka z in njena zrcalna slika $\tilde{z} = \mathcal{I}_K(z)$ enako oddaljeni, glede na h-razdaljo, od h-premice K . Najprej moramo definirati h-razdaljo med točko in h-premico. Podobno kot pri evklidski geometriji moramo poiskati h-premico P , ki je pravokotna na z in \tilde{z} . Nato izmerimo h-razdaljo med z oziroma \tilde{z} in m , ki je točka presečišča med K in P . Spomnimo se, da je vsaka krožnica skozi z in $\tilde{z} = \mathcal{I}_K(z)$ pravokotna na K (trditev 24). Taka krožnica P pa je hkrati tudi najkrajša pot med z in \tilde{z} oziroma h-premica skozi z in \tilde{z} . Krožnice, pravokotne na K , se preslikajo same vase (trditev 23), torej $\mathcal{I}_K(z)$ zamenja med seboj krožna loka zm in $m\tilde{z}$.



Slika 6.3: Premice v hiperbolični ravnini.

Ker $\mathcal{I}_K(z)$ ohranja h-razdaljo, velja, da sta omenjena krožna loka enako dolga, in s tem je trditev dokazana.

Poglejmo sedaj, kakšne relacije so možne med h-premicami. Na sliki 6.3 je prikazano, da obstaja neskončno število h-premic, ki gredo čez p in ne sekajo L (modra polna krivulja). Za take premice rečemo, da so *ultraparalelne* premici L . Na sliki 6.3 so označene s pikčastimi krožnimi loki. Med premicami, ki sekajo L in ultraparalelnimi premicami sta dve premici, ki jim rečemo *asimptotični*. Ti dve premici ne sekata premice L nikjer v hiperbolični ravnini, se pa z njo srečata na obzorju. Ta je označena s črtkasto modro črto. Tu je tudi natanko ena premica M (na sliki označena zeleno), ki seka premico L pod pravim kotom. Tako premico lahko konstruiramo tudi kot h-premico skozi točki p in $\mathfrak{R}_L(p) = \mathcal{I}_L(p) = \tilde{p}$ (trditev 24). Oddaljenost točke p od premice L je enaka dolžini h-premice M med p in q . Ker sta M in L pravokotni, zrcaljenje $\mathfrak{R}_M = \mathcal{I}_M$ prek premice M preslika L vase. Zrcaljenje prek M tudi zamenja točki na obzorju in asimptotični premici glede na L . Premica M je tudi simetrala kota med asimptotičnimi premicami, ki ga imenujemo *kot paralelizma* in označimo s Π . Ta kot nam pove, za koliko največ lahko rotiramo premico M okoli p , da le ta še vedno seka premico L . Na sliki sta označeni še dve h-premici (polna črna črta), ki sekata L . Slika 7.13 na strani 77 prikazuje podobne elemente, le da v tem primeru h-premica L postaja vedno bolj podobna navpični. To velja tudi za eno od njenih asimptot.

6.3 Transformacijska grupa \mathcal{G}

V poglavju o evklidski geometriji smo spoznali, da lahko konformne transformacije \mathcal{M} kot pripadnice družine \mathcal{G} realiziramo z zrcaljenji prek dveh premic. Antikonformne transformacije $\tilde{\mathcal{M}}$ pa dobimo z zrcaljenjem prek tretje premice. Podobno je obveljalo tudi pri sferični geometriji, kjer smo točke zrcalili prek velikih krogov. V evklidski ravnini se lahko dve premici sekata ali pa sta vzporedni in glede na ti dve razmerji smo kot preslikave \mathcal{M} dobili rotacije in premike. Skupno smo jih poimenovali togi premiki. Sferična geometrija nam je ob odsotnosti vzporednih geodet ponudila le eno vrsto preslikav, to je rotacijo. Hiperbolična geometrija pa je bogatejša od obeh prejšnjih. Zaradi neskončno vzporednih oziroma ultraparalelnih in asimptotičnih h-premic se nam poleg rotacij in premikov ponuja nova, tretja vrsta transformacij \mathcal{M} .

Možne konformne transformacije $\mathcal{M} = \mathfrak{R}_{L_2} \circ \mathfrak{R}_{L_1}$ hiperbolične geometrije glede na razmerje med premicama L_1 in L_2 so kot sledi.

- V primeru, ko se L_1 in L_2 sekata, \mathcal{M} imenujemo *hiperbolična rotacija*.
- V primeru, ko sta L_1 in L_2 asimptotični, imenujemo \mathcal{M} *rotacija v limiti*.
- V primeru, ko sta L_1 in L_2 ultraparalelni, imenujemo \mathcal{M} *hiperbolični premik*.

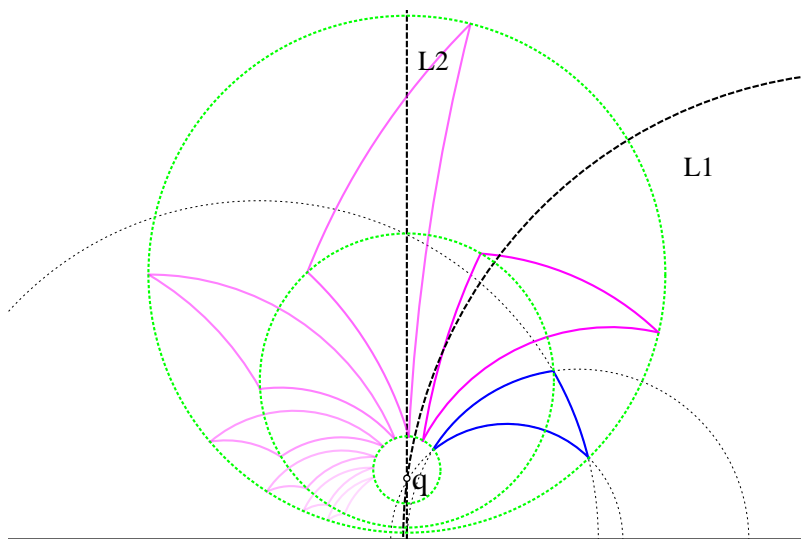
V prejšnjem poglavju smo spoznali, da je zrcaljenje prek h-premice L v hiperbolični ravnini ekvivalentno zrcaljenju prek kroga L , torej $\mathfrak{R}_L = \mathcal{I}_L$. Preslikavo \mathcal{I}_L lahko seveda zapišemo kot funkcijo kompleksne spremenljivke oblike 2.38. Ker središče q kroga L leži na realni osi, lahko enačbo 2.38 poenostavimo na:

$$\mathcal{I}_L(z) = \frac{q\bar{z} + (R^2 - q^2)}{\bar{z} - q}. \quad (6.12)$$

Kompozitum dveh takih funkcij je seveda Möbiusova transformacija (trditev 17)

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (6.13)$$

pri čemer so koeficienti a , b , c in d realna števila. Velja tudi $(ad - bc) > 0$. Ker so koeficienti realni, iz zaporedja enačb 2.2 do 2.5 sledi, da gre za preslikavo zgornje polravnine nase. To smo glede na povedano tudi pričakovali.

Slika 6.4: Rotacije s središčem v q v korakih po $\pi/12$.

6.3.1 Rotacija

Hiperbolična rotacija \mathcal{R}_a^ϕ okrog točke a za kot ϕ ima na hiperbolično ravnino podoben učinek kot je to pri evklidski geometriji. Vsako h-daljico ap preslika v h-daljico $a\tilde{p}$, ki s prvo objema kot ϕ . Tudi tu lahko tako rotacijo konstruiramo kot zrcaljenje prek dveh h-premic s skupno točko a ter kotom $\phi/2$ med njima. Invariantne krivulje rotacije so *h-krožnice* s središčem v a . To so tiste točke, ki so enako oddaljene od a . Zanimivo je dejstvo, da so take h-krožnice v hiperbolični ravnini predstavljene z evklidskimi krožnicami. Velja, da se h-krog s središčem $a = x + yi$ in h-radijem ρ v hiperbolični ravnini kaže kot evklidski krog s središčem

$$q = (x + iy \cosh \rho) \quad (6.14)$$

in radijem

$$R = y \sinh \rho. \quad (6.15)$$

Na sliki 6.4 so prikazane rotacije \mathcal{R}_q^ϕ , $\phi \in [\pi/12, 2\pi/3]$ v korakih po $\pi/12$, pri čemer so vijolični trikotniki slike modrega. Opozoriti je potrebno, da h-premici L_1 in L_2 na sliki 6.4 ustrezata le rotaciji $\mathcal{R}_q^{\phi/12}$ (najtemnejši vijolični trikotnik).

6.3.2 Rotacija v limiti

Rotacija v limiti \mathcal{R}_a^ϕ je svoje ime dobila po tem, da se središče rotacije a v limiti približuje obzorju. Rotacija v limiti je zrcaljenje prek dveh asimptotičnih h-premic L_1 in L_2 . Invariantne krivulje take preslikave so *horo-krogi*. To so evklidske krožnice, ki se dotikajo realne osi, recimo v neki točki A . Horo-krogi predstavljajo vrsto h-krogov, ko središče a limitira proti točki A . Horo-krogi so torej posebna vrsta h-krogov z neskončnim radijem. Če tak horo-krog zrcalimo prek poljubnega kroga s središčem v A (to je h-premica), dobimo vodoravno premico v hiperbolični ravnini. Tudi to so horo-krogi!

Tudi h-premici, vidni kot navpični premici v ravnini, sta asimptotični. Dotikata se v točki v neskončnosti. Preslikava $\mathfrak{R}_{L_2} \circ \mathfrak{R}_{L_1}$, pri kateri sta L_1 in L_2 navpični, se v hiperbolični ravnini kaže kot kompleksno seštevanje $z \mapsto z + \beta$, kjer je β evklidska razdalja med h-premicama L_1 in L_2 . Tudi v tem primeru so invariantne krivulje rotacije v limiti horo-krogi, le da se v tem primeru kažejo kot vodoravne premice v hiperbolični ravnini.

6.3.3 Premik

Hiperbolični premik \mathcal{T}_L^δ je zrcaljenje prek dveh ultraparalelnih h-premic L_1 in L_2 . Obstaja natanko ena h-premica L , ki je pravokotna tako na L_1 kot tudi na L_2 . Premica L je tudi invariantna krivulja hiperbolične translacije. V tem se hiperbolični premik razlikuje od evklidskega, pri katerem so invariantne krivulje vse premice v smeri premika. Kljub temu gre za premik, saj velja, da se točke na h-premici L pomikajo za h-razdaljo δ v ustrezni smeri. Premici L rečemo tudi *os premika*. Poleg premice L so invariantne krivulje tudi vse evklidske krožnice skozi točki e_1 in e_2 , v katerih se h-premica L dotika obzorja. Takim krivuljam rečemo, da so *ekvidistančne*, saj velja, da povezujejo točke, ki so enako oddaljene glede na h-razdaljo od premice L . Na sliki 6.3 je v oranžni barvi prikazan primer take krivulje.

V primeru, ko je os premika navpična h-premica, so invariantne krivulje premika premice skozi točko e_1 , v kateri se L dotika realne osi. Premik \mathcal{T}_L^δ , kjer je L navpična premica, se v hiperbolični ravnini kaže kot linearna funkcija $z \mapsto \alpha(z - e_1) + e_1$. Faktor raztega α je enak $\alpha = e^\delta$.

Podobno, kot pri prejšnjih dveh geometrijah, tudi tu velja, da je vsaka transformacija iz \mathcal{G} določena s tremi točkami, vsaka konformna preslikava \mathcal{M} pa z dvema [7]. Poglavje sklenemo z naslednjo trditvijo.

Trditev 51. *Obstaja natanko ena konformna transformacija \mathcal{M} in natanko ena antikonformna transformacija $\tilde{\mathcal{M}}$, ki preslika del h-premice AB med A in*

B v del h-premice A'B' med A' in B' enake dolžine. Velja

$$\tilde{\mathcal{M}} = \mathfrak{A}_{A'B'} \circ \mathcal{M}. \quad (6.16)$$

Postopka, kako določimo konformno transformacijo \mathcal{M} , glede na točki A in B ter njuni sliki, ne bomo obravnavali. Bralec ga lahko poišče v [7].

Poglavje 7

Demonstracije v Mathematici

Na osnovi teorije, opisane v poglavjih 2 do 6, sem izdelal pet demonstracij v razvojnem okolju Mathematica. Mathematica je program za numerično in simbolično računanje in ima bogato zbirko funkcij za delo z grafiko. Funkcija `Manipulate[]` omogoča razvoj interaktivnih aplikacij za prikaz grafov funkcij in drugih matematičnih pojavov. Glede na vrednosti vhodnih parametrov, ki jih uporabnik interaktivno spreminja, program izrisuje grafe funkcij in druge elemente.

Razvil sem naslednje prezentacije:

- Zrcaljenje prek enotskega kroga,
- Evklidska geometrija,
- Sferična geometrija,
- Hiperbolične premice in
- Hiperbolična rotacija.

Pri razvoju vseh programov, še posebej pa pri evklidski geometriji, sem uporabljal prednost simboličnega računanja. Ta omogoča natančen izračun funkcij in ne le numerični približek, kar je posebej opazno pri korenih celih števil in kotnih funkcijah. Mathematica vsebuje dve glavni funkciji za delo z grafiko, `Graphics[]` in `Graphics3D[]`, ki se obnašata kot okvir za standardne dvodimenzionalne in trodimenzionalne grafične elemente kot so premica, krog, večkotnik, sfera, parametrizirane krivulje in ploskve (npr. `ParametricPlot3D[]`) ter niz znakov. Pri risanju diagramov imamo na voljo obsežno množico

konstruktorjev, za vsak element posebej pa lahko določimo še njegove lastnosti. Lokacijo grafičnih elementov v ravnini podamo s koordinatami (x, y) , v prostoru pa s koordinatami (x, y, z) . Te vrednosti so absolutne, pri nekaterih lastnostih, na primer debelini premic, pa operiramo z relativnimi vrednostmi glede na velikost diagrama (v pikah). Druge lastnosti, na primer barva in vrsta premice (črtkana, pikčasta), so podane s skalarnimi vrednostmi, spet druge z vrednostjo na intervalu od 0 do 1 (prosojnost) in tako dalje. Izmed najbolj uporabnih funkcij je tudi funkcija `Table[]`, ki se obnaša podobno kot `For` zanka. Izberemo nek parameter α , ki teče od *min* do *max* v korakih $d\alpha$, funkcija pa generira elemente tabele glede na α .

Kjer je bilo možno, sem opravil izračune v množici kompleksnih števil, kar ima nekatere prednosti pred računanjem z vektorji. Pri delu vsake izmed prezentacij sem se srečal z svojevrstnimi algoritmi. V nadaljevanju bom opisal aplikacije ter navedel kontrolne elemente in najpomembnejše funkcije. Nekatere funkcije sem uporabljal v večih prezentacijah, zato jih bom opisal le enkrat.

Glede na zalogo vrednosti parametara prezentacije se avtomatsko določi vrsta kontrole. Vrsto kontrole je sicer moč spreminjati, vendar je privzeta možnost v praksi najbolj ustrezna.

Tudi vse slike v tem delu sem izdelal v Mathematici. V veliko pomoč pri delu v razvojnem okolju Mathematica mi je bila uradna dokumentacija [14] ter že izdelane aplikacije [15].

Pri uporabi urejevalnika besedil $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X} 2_{\epsilon}$ sem si pomagal z [8].

7.1 Zrcaljenje prek enotskega kroga

V tej prezentaciji sem predstavil geometrijski pomen inverzije v enotskem krogu. Preslikava v splošnem krogu K z radijem R in središčem q se od te razlikuje za premik in raztezek. Zaradi podobnega vizualnega učinka, splošne inverzije v krogu nisem predstavil. Aplikacija prikaže neko območje oziroma podmnožico kompleksne ravnine ter prikaže sliko tega območja. Uporabnik ima na voljo naslednje kontrolne elemente:

- Vrsta krivulje
 - krožnica
 - elipsa
 - hiperbola
 - parabola

- Prosojnost prvotnega območja (parameter na intervalu $[0,1]$)
- Prosojnost slike območja (parameter na intervalu $[0,1]$)
- Lokatorji (3)

Izbiramo lahko med štirimi znanimi krivuljami. Pravilo, kako izbrana krivulja omejuje območje, se pri vsaki izmed njih razlikuje, zato ga bom navedel v podrobnem opisu. Vrsta kontrole je množica gumbov (`SetterBar []`). To je privzeta kontrola za parametre z do pet skalarnimi vrednostmi.

Pri prosojnosti pomeni vrednost 0 največjo transparentnost, 1 pa najmanjšo. Z uporabo teh parametrov lahko dosežemo, da nam aplikacija prikaže le preslikavo krivulje, ali pa da območje slike popolnoma prekrije prvotno območje. Tip kontrole je pri obeh parametrih drsnik (`Slider []`). To velja za vse enodimenzionalne parametre z vrednostmi na nekem intervalu. Privzeta vrednost obeh je 0.4. Območje sem obarval različno glede na vrsto krivulje, slika območja pa je v vseh primerih obarvana modro.

Lokator je točka na dvodimenzionalnem diagramu, ki jo lahko uporabnik premika z miško. Pomen lokatorjev je pri tej demonstraciji različen, v splošnem lokatorji določajo točke na krivuljah. S tem se parametri krivulj dinamično spreminjajo in grafi krivulj ter območij se temu ustrezno osvežujejo.

Aplikacija prikazuje kompleksno ravnino v območju $[-5, 5]$ na realni osi in $[-2.5, 2.5]$ na imaginarni osi.

7.1.1 Krožnica

Krožnico C z enačbo $|z - p| = r$ sem določil s tremi točkami, katerih vrednost določa položaj lokatorjev. Te sem označil s črkami „a“, „b“ in „c“. Območje je v tem primeru množica točk znotraj krožnice, oziroma je določeno z enačbo $|z - p| < r$, in obarvano zeleno. Pri realizaciji sem razvil funkcije:

- `Krog[a:comp, b:comp, c:comp]:{p:comp, r:real}`
- `InverzijaKroga[p:comp, r:real]:{p':comp, r':real}`
- `Komplement[L:list]:list`

Prva funkcija izračuna radij r in središče p glede na tri točke v kompleksni ravnini. Velja, da tri nekolinearne točke enolično določajo krožnico. S podanimi točkami a , b in c sem parametra p in r določil po naslednjem postopku. Središče kroga je nekje na simetrali med a in b (ali katerem drugem paru točk).

Točke na simetrali sem določil z enačbo $t = (a + b)/2 + ki(a - b)$. Iščevo tak k , da bo veljalo $|t - a| = |t - c| = r$. Vrednost r je radij kroga, središče q pa je kar enako t : $q = t$. Kadar so točke kolinearne, dobimo premico. To je tudi prednost pred določanjem krožnice le z radijem in središčem, saj hkrati omogoča še demonstracijo preslikave premic oziroma polravnin.

Za reševanje enačbe v prejšnjem odstavku sem uporabil funkcijo `Solve[]`, ki je namenjena splošnemu reševanju enačb. Deluje nad realnimi in kompleksnimi spremenljivkami. Rešuje enačbe več spremenljivk, tako linearne kot višjega reda, in tudi sisteme enačb. V podanih enačbah se lahko pojavljajo tudi funkcije, kot na primer `Abs[]`. Vendar v tem primeru vrne opozorilo, da je lahko množica rešitev nepopolna. Zaradi tega razloga sem zgornjo enačbo razstavil na realni in imaginarni del, tako da sem dobil enačbo realne spremenljivke in se izognil absolutnim vrednostim oziroma kompleksni konjugaciji.

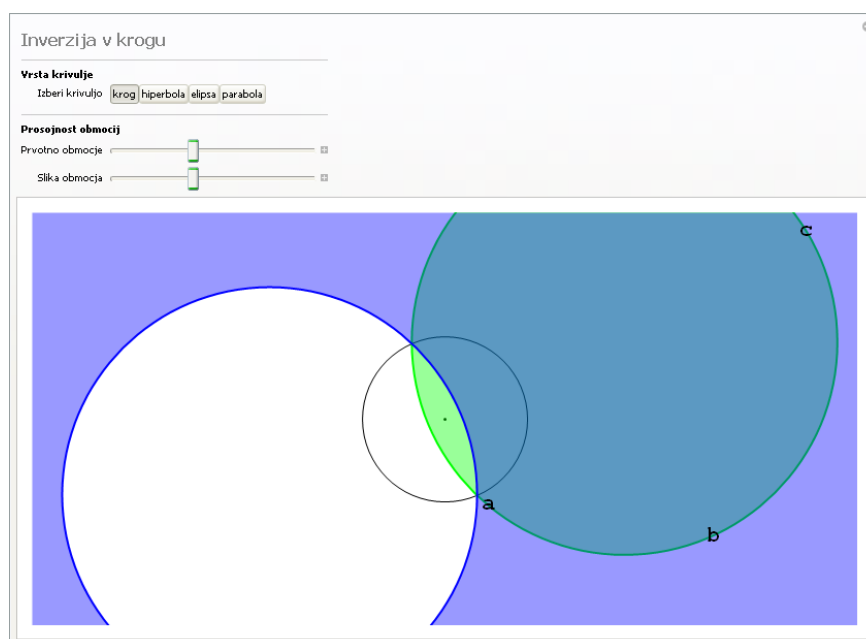
Za preslikavo krožnice sem uporabil drugačen pristop kot pri ostalih krivuljah, v ta namen sem razvil posebno funkcijo `InverzijaKroga[]`. Če preslikamo točki a in b na premeru kroga C , ki so v presečišču s premico v smeri p , dobimo točki \tilde{a} in \tilde{b} . To sta točki na premeru slike kroga, ki je prav tako krog (izjemoma premica). Novo središče p' je torej na polovici daljice med tema točkama: $p' = (\tilde{a} + \tilde{b})/2$. Podobno dobimo radij kot absolutno vrednost razlike med p' in na primer \tilde{a} : $r' = |p' - \tilde{a}|$.

Pri risanju krožnic C in njene slike \tilde{C} sem uporabil funkcijo `Circle[]`, zato mi ni bilo potrebno skrbeti za resolucijo krivulje oziroma njene slike. Drugače je pri risanju območij. Pri risanju prvotnega območja sem uporabil funkcijo `Disk[]`. V primeru, ko notranjost C vsebuje izhodišče, pa se to območje preslika v zunanost krožnice \tilde{C} (str. 20). To preverja pogoj $|p| < r$. V tem primeru sem uporabil funkcijo `Komplement[]`. Krožnico \tilde{C} sem najprej predstavil kot množico točk (večkotnik). Funkcija sprejme ta seznam točk in vrne seznam točk, ki določajo komplement tega območja (glede na del ravnine, prikazan v aplikaciji). Primer take preslikave je na sliki 7.1.

7.1.2 Elipsa

Tudi elipso sem določil s tremi točkami oziroma lokatorji. Lokatorje sem označil s črkami „q“, „v1“ in „v2“. Enačba elipse s središčem q v parametrizirani obliki je $z(t) = \sin(t)(v_1 - q) + \cos(t)(v_2 - q)$, $t \in [0, 2\pi]$. Taka predstavitev omogoča tudi rotacijo elipse. Območje, katerega preslikavo aplikacija ponazarja, je tisto znotraj elipse. Obarvano je oranžno.

Elipso sem aproksimiral z večkotnikom, točke sem izračunal po zgornji enačbi. Lahko bi uporabil tudi funkcijo `Circle[]` z ustreznimi parametri in

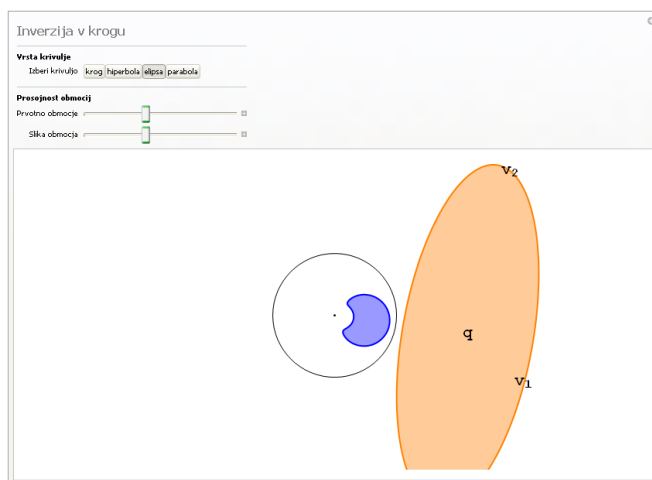


Slika 7.1: Zrcaljenje prek kroga (preslikava krožnice).

dobljeno elipso nato rotiral s funkcijo `Rotate[]`, vendar sem mnenja, da bi se zmanjšal pomen lokatorjev in s tem tudi interaktivnost prezentacije. Preslikavo elipse sem realiziral s preslikavo posameznih točk na elipsi, saj inverzija elipse ni katera izmed znanih krivulj. Pri tem sem se srečal s problemom ločljivosti. Ločljivost se z inverzijo namreč spremeni, saj se točke zelo blizu izhodišča preslikajo zelo daleč. Tako je absolutna razlika med točkama in njunimi slikami zelo velika in slika krivulje zelo slabo aproksimirana. Pri veliko točkah nastane problem zmogljivosti in zgodi se, da zaradi preveč računanja prezentacija ni več interaktivna. Problem sem rešil tako, da sem resolucijo spreminjal glede na oddaljenost od izhodišča. Definiral sem največjo dovoljeno absolutno razliko med dvema zaporednima točkama slike in tako zelo zmanjšal število potrebnih točk.

Srečal sem se tudi s problemom določanja, ali elipsa v svoji notranjosti vsebuje koordinatno izhodišče. Gre za podoben koncept, kot sem ga omenil pri preslikavi krožnice. Razvil sem funkcijo `WVeckotniku[L:list]:bool`, s katero sem implementiral algoritem vodoravnih žarkov [17].

Primer preslikave elipse je prikazan na sliki 7.2.



Slika 7.2: Zrcaljenje prek kroga (preslikava elipse).

7.1.3 Hiperbola

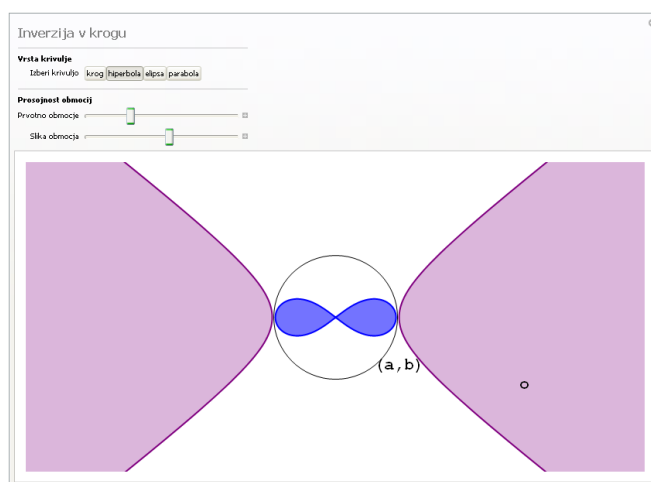
Pri hiperboli sem izbral predstavitev, pri kateri sta uporabljena le dva lokatorja. Prvi je označen kot „(a,b)“, drugi pa kot „o“. Točko simetrije hiperbole sem fiksiral v koordinatno izhodišče. Prvi lokator $z = a + bi$ določa parametra a in b enačbe hiperbole realnih spremenljivk x in y v ravnini $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$. Območje je določeno z enačbo $x^2/a^2 - y^2/b^2 > 1$ in obarvano vijolično. Drugi lokator „o“ sem uporabil za orientacijo hiperbole. Kadar za lokator „o“ velja $|\Re(o)| > |\Im(o)|$, je hiperbola določena s prej navedeno enačbo, v nasprotnem primeru pa velja enačba $x^2/a^2 - y^2/b^2 = -1$. V kompleksni ravnini je krivulja torej določena kot $z(t) = a \cosh(t) + ib \sinh(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$.

Tudi tu sem krivuljo in njeno sliko aproksimiral sam. Inverzija hiperbole s parametroma $a = 1$ in $b = 1$ nam da poznano lemniskato. Tudi za hiperbolo s poljubnimi parametri velja, da je njena slika podobna lemniskati, vendar sem se zaradi težavne parametrizacije take krivulje raje odločil za preslikavo posameznih točk in aproksimacijo krivulje z večkotnikom.

Preslikavo hiperbole vidimo na sliki 7.3.

7.1.4 Parabola

Parabolo z enačbo $y = a(x - p)^2 + q$ v kartezičnih koordinatah sem določil z dvema lokatorjema. Prvi lokator, označen s „(p,q)“, določa teme parabole $z_1 = p + qi$, drugi lokator, označen s „t“, pa drugo točko na paraboli $z_2 = x + iy$ in posledično koeficient a . Območje preslikave sem določil z enačbo



Slika 7.3: Zrcaljenje prek kroga (preslikava hiperbole).

$y > a(x - p)^2 + q$ in ga obarval rumeno. V kompleksni ravnini je krivulja določena z $f(z) = t + (a(t - p)^2 + q)i$, $t \in (-\infty, \infty)$.

Uporabil sem podoben pristop kot pri prejšnjih dveh krivuljah. Krivuljo sem torej parametriziral in aproksimiral z ustreznim številom točk s funkcijo `Line[]`. Posamezne točke sem preslikal in tako dobil inverzijo parabole v krogu.

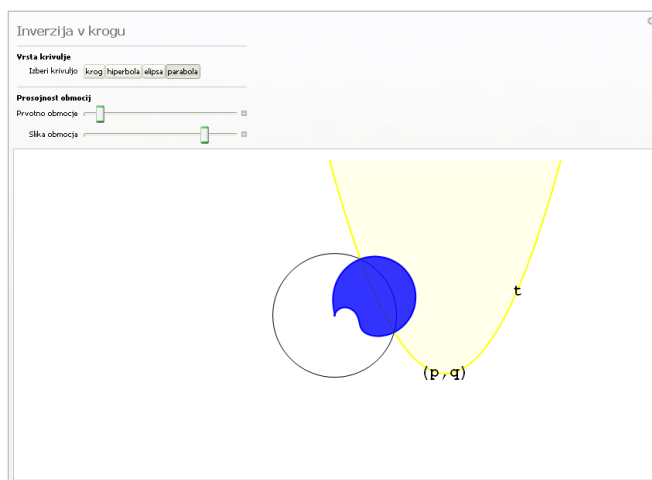
Za ugotavljanje, ali je izhodišče nad parabolo, sem preveril pogoj $ap^2 + q > 0$.

Primer preslikave parabole je prikazan na sliki 7.4. Prikazana je tudi uporaba manipulatorjev prosojnosti. Območje nad parabolo je skoraj popolnoma transparentno, slika območja pa je poudarjena in prekriva parabolo.

7.2 Evklidska geometrija in linearna funkcija

S to prezentacijo sem želel toge premike in podobnosti evklidske geometrije predstaviti kot linerane funkcije kompleksne spremenljivke. Operacije delujejo nad trikotnikom $A'B'C'$, ki ga lahko premikamo, rotiramo in raztezamo, program pa nato glede na fiksni referenčni trikotnik ABC izračuna ustrezno linearno funkcijo, ki predstavlja to preslikavo. Aplikacija vsebuje naslednje kontrolne elemente:

- Razteg
- Rotacija



Slika 7.4: Zrcaljenje prek kroga (preslikava parabole).

- Premik

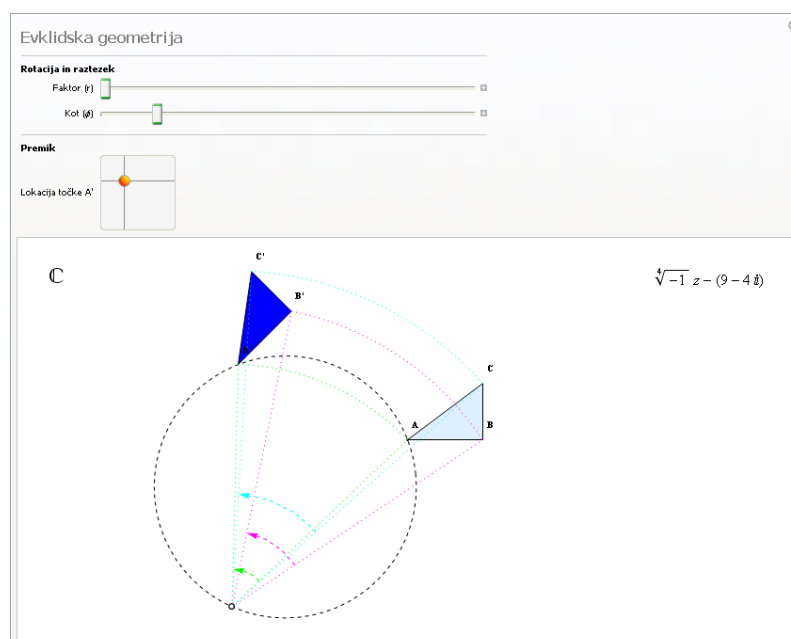
Kontrola faktorja raztega in rotacije je v obliki drsnika z vrednostmi na intervalu $[1, 5]$ v korakih po $1/2$ oziroma $[0, 7\pi/4]$ v korakih $\pi/4$. Privzeti vrednosti sta 1 za faktor raztega in 0 za rotacijo. Središče raztega oziroma rotacije je v obeh primerih A' . Premik je realiziran s kontrolo tipa dvodimenzionalni drsnik (`Slider2D[]`). Lokacija tega drsnika določa položaj točke A' in je na intervalu $x \in [-20, 20]$, $y \in [-10, 10]$ v korakih po 1 za obe koordinati. Aplikacija je prikazana na sliki 7.5.

Omenjene kontrole sem izbral kljub dejstvu, da gre pri kombinaciji rotacije in premika pravzaprav le za rotacijo (str. 11). S tem sem namreč predstavil to ugotovitev. Preslikavo sem tudi prikazal na enak način, kot je to na slikah 4.1, str. 34 in 4.2, str. 37. Glede na razmerje med stranicama trikotnikov AB in $A'B'$ sem ločil:

1. Enakosti

- Primer, kjer sta referenčni stranici AB in $A'B'$ vzporedni, vendar nasprotno orientirani (rotacija za π);
- Primer, kjer sta stranici vzporedni in enako orientirani (premik);
- Primer, kjer stranici nista vzporedni (rotacija),

2. Podobnosti



Slika 7.5: Evklidska geometrija (rotacija).

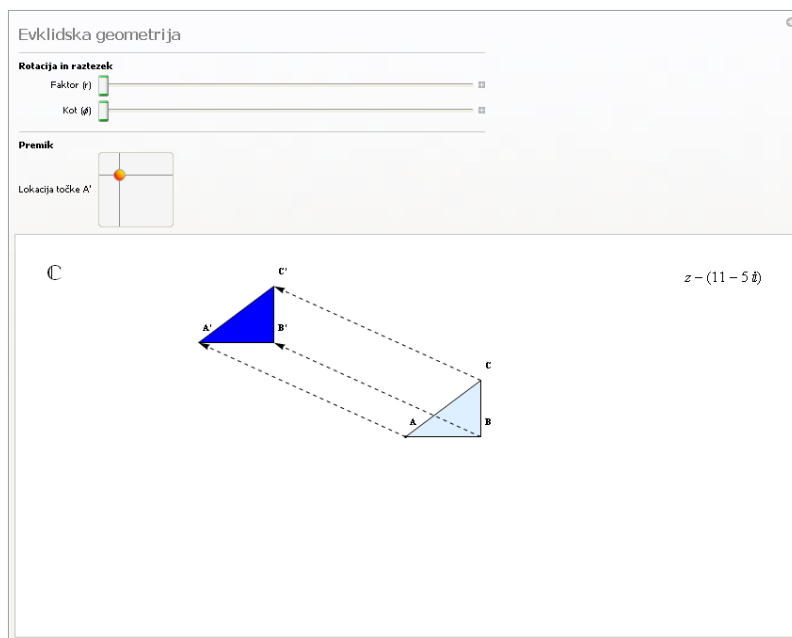
- Primer, kjer sta referenčni stranici AB in $A'B'$ vzporedni, vendar nasprotno orientirani (rotacija za π in razteg);
- Primer, kjer sta stranici vzporedni in enako orientirani (razteg);
- Primer, kjer stranici nista vzporedni (rotacija in razteg).

Enakosti so prikazane na slikah 7.5, 7.6 in 7.7, podobnosti pa na slikah 7.8, 7.9 in 7.10.

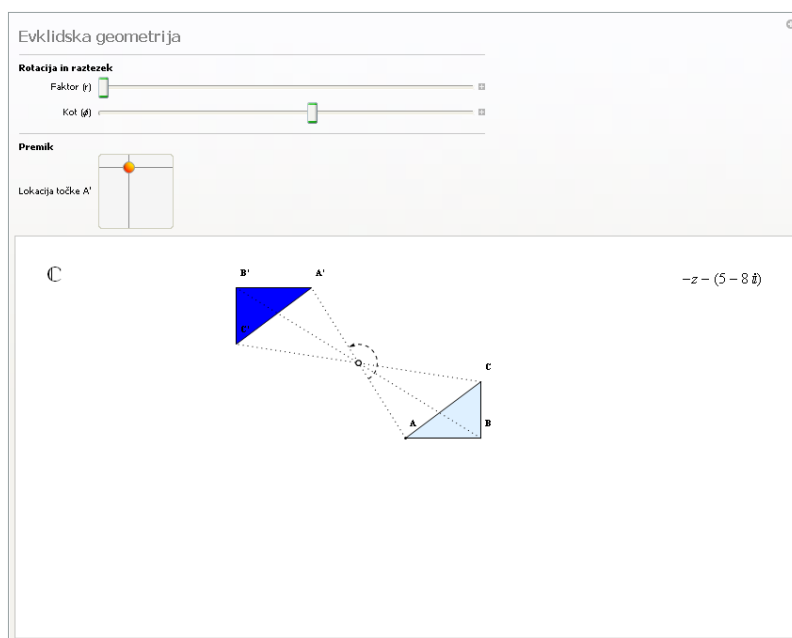
Pri implementaciji sem razvil tri manj zahtevne postopke in sicer:

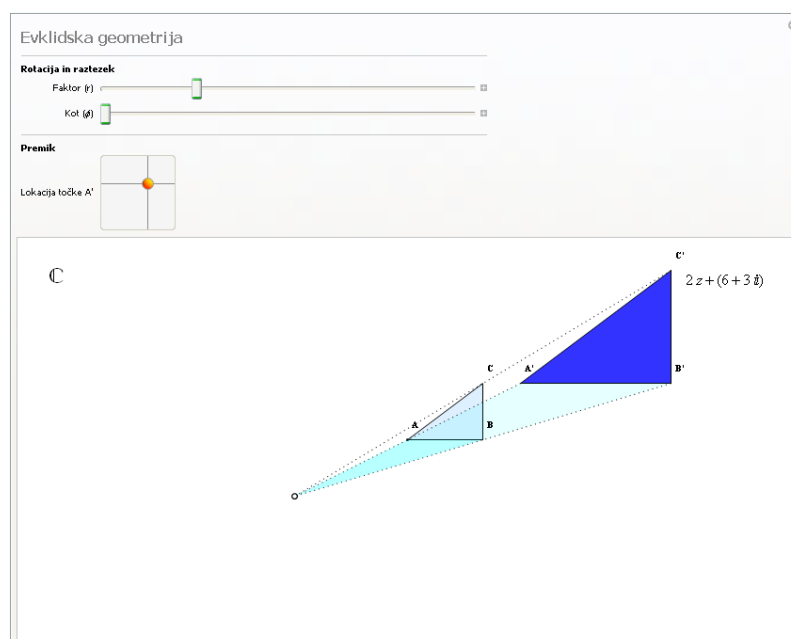
- `PreseciscePremPrem[a1:comp, b1:comp, a2:comp, b2:comp]:comp`
- `PresecistePremKrog[a:comp, b:comp, q:comp, r:real]:comp`
- `PresecisceKrogKrog[q1:comp, r1:real, q2:comp, r2:real]:comp`

Prva funkcija poišče presečišče dveh daljic oziroma njunih nosilk. Druga funkcija je namenjena iskanju presečišča med premico in krogom. V splošnem lahko rešitev vsebuje 0, 1 ali 2 točke. V mojem primeru premica vedno seka krožnico v dveh točkah, funkcija pa izbere eno izmed njih (slika 4.1(c), str. 34). Tretja funkcija izračuna presečišča med krogoma. Tudi kroga se lahko sekata



Slika 7.6: Evklidska geometrija (premik).

Slika 7.7: Evklidska geometrija (rotacija za π).



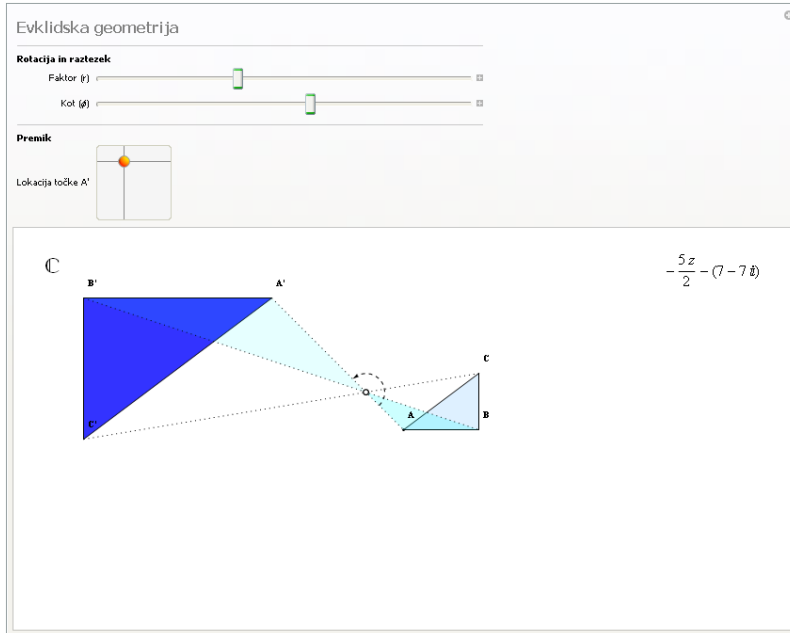
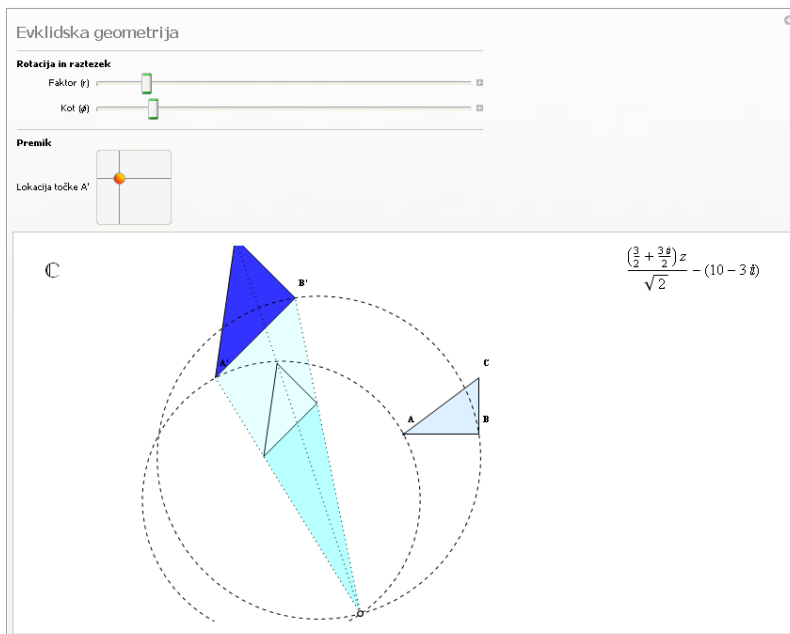
Slika 7.8: Evklidska geometrija (razteg).

v 0, 1 ali 2 točkah, vendar v mojem primeru rešitev ponovno vedno vsebuje dve točki. Funkcija vrne eno izmed njih (slika 4.2(c), str. 37). Pri vseh treh sem uporabil funkcijo `Solve[]` z ustreznimi parametri.

7.3 Sferična geometrija

S to prezentacijo sem ponazoril sferično geometrijo, hkrati pa sem predstavil tudi stereografsko projekcijo. Prezentacija ima dva ločena grafična dela. V levem oknu se izriše (sferični) trikotnik, določen s tremi točkami a , c in c v kompleksni ravnini z z metriko $d\hat{s} = ds/(1+|z|^2)$. Položaj točk je določen s tremi kontrolami tipa lokator. Označeni so s črkami „a“, „b“ in „c“. V desnem oknu je prikazana sfera in stereografska projekcija točk. Prikazane so tudi projekcije geodet med pari točk, to so veliki krogi. Poleg lokatorjev aplikacijo sestavljajo še naslednji kontrolni elementi:

- Parametri rotacije
 - Os
 - Kot

Slika 7.9: Evklidska geometrija (rotacija za π in razteg).

Slika 7.10: Evklidska geometrija (rotacija in razteg).

- Parametri za prikaz
 - Veliki krogi
 - Ravnini / kroga zrcaljenja
 - Prosojnost sfere

Aplikacija izriše tudi ustrezni ravnini Π_{L_1} in Π_{L_2} (v prostoru) oziroma kroga L_1 in L_2 (v ravnini), prek katerih moramo zrcaliti, da dobimo rotacijo \mathcal{R}_p^ϕ . S parametri rotacije določamo vrednosti ϕ in p . Kontrola kot je tipa drsnik in ima vrednosti na intervalu $[-\pi, \pi]$ z natančnostjo $\pi/12$. Središče rotacije p določa kontrola os, ki lahko zavzame vrednosti „X“, „Y“ ali „Z“.

Aplikacija vsebuje naslednje pomembnejše funkcije:

- `LokGeodete[a:comp, b:comp]:{α:real, β:real}`
- `StereografskaProj[z:comp]:vec`
- `StereografskaProj2[a:vec]:comp`
- `VelikiKrog[a:vec, b:vec]:fun`
- `VsebujeN[a:comp, b:comp, c:comp]:bool`

Za izračun geodete med dvema točkama a in b v kompleksni ravnini sem uporabil že opisano funkcijo `Krog[]`. Geodeta je krožnica, ki jo določajo točke a in b ter antipod ene od njiju, na primer \check{a} . Antipod \check{a} točke a v kompleksni ravnini je določen z enačbo

$$\check{a} = -\frac{1}{\bar{a}} [7]. \quad (7.1)$$

Pred tem sem moral preveriti, ali sta morda točki a in b antipodni. V tem primeru ni enolične geodete med njima. Če veliki krog prečka severni pol N , se le ta projicira v premico v ravnini.

Pri določanju krožnega loka, ki predstavlja najkrajšo pot med a in b , sem se srečal z najtežjim problemom. To nalogo rešuje funkcija `LokGeodete[]`. Krog v kompleksni ravnini točki a in b delita v dva krožna loka. Krajšega izmed njiju sem poiskal s pomočjo položaja antipoda \check{a} . Oba loka med a in \check{a} imata enako dolžino, zato je krajši lok med a in b tisti, ki ne vsebuje \check{a} . Postopek je zapleten zaradi nezveznega definicijskega območja kotov, na primer $(-\pi, \pi]$ oziroma $[0, 2\pi)$, kar je posledica njihove periodične narave. Poleg tega funkcija `Arg[z]` uporablja prvo območje, funkcija za risanje krožnega loka `Circle[]`

pa drugega. Problem sem rešil tako, da sem postavil $\arg(a) = 0$. Nato sem lažje primerjal položaje točk na krožnici.

Funkciji `StereografskaProj []` in `StereografskaProj2 []` sta implementaciji enačbe 5.10 in projekcije s kompleksne ravnine na sfero. Koordinate projekcije $A(X, Y, Z)$ točke $z = x + yi$ izračunamo z enačbami

$$X = \frac{2x}{1 + |z|^2} \quad (7.2)$$

$$Y = \frac{2y}{1 + |z|^2} \quad (7.3)$$

$$Z = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}. \quad (7.4)$$

Funkcija `VelikiKrog []` izračuna parametrično enačbo velikega kroga. Veliki krog, določen s točkama \hat{a} in \hat{b} na sferi, je oblike

$$\hat{a} \cos(\alpha) + \hat{v} \sin(\alpha), \quad (7.5)$$

kjer je \hat{v} enak

$$\hat{v} = (\hat{a} \times \hat{b}) \times \hat{a}. \quad (7.6)$$

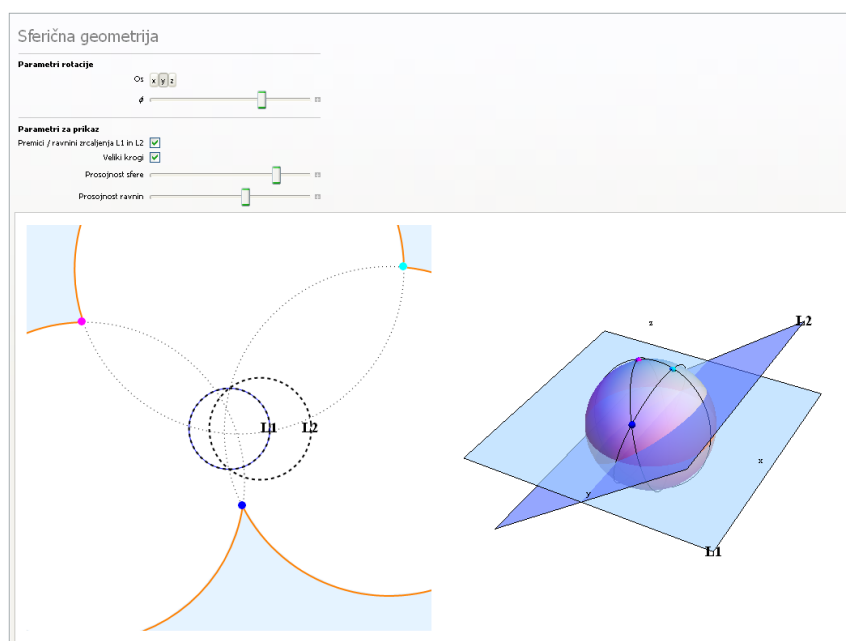
Vektor v mora biti seveda normaliziran.

Funkcija `VsebujeN []` je namenjena ugotavljanju, ali sferični trikotnik $\hat{a}\hat{b}\hat{c}$ vsebuje severni pol N . V primeru, da ga vsebuje, se notranjost trikotnika projicira v območje zunaj krožnih lokov med točkami a , b in c . Najprej izračunamo točke \hat{a} , \hat{b} in \hat{c} z uporabo funkcije `StereografskaProj []`. Trikotniku $\hat{a}\hat{b}\hat{c}$ nato določimo orientacijo in jo primerjamo z orientacijo trikotnika abc . Orientacijo sem izračunal kot vektorski produkt tangentskih vektorjev na velika kroga med a in b oziroma a in c . Pri nastavitvi enačbe sem si pomagal z [12]. Če se orientacija ne ohrani, je notranjost trikotnika zunaj krožnih lokov.

Ravnini $\Pi_{\hat{L}_1}$ in $\Pi_{\hat{L}_2}$ sta določeni z večkotnikom v prostoru. Prva ravnina se s povečevanjem kota ne spreminja in je pri rotaciji okoli Y osi ravnina XY . Druga ravnina je v primeru rotacije okoli osi Y določena s točkami $A(0, -1, 0)$, $B(0, 1, 0)$ in

$$C(\cos(\phi/2), 0, \sin(\phi)). \quad (7.7)$$

Pri rotaciji okoli drugih osi je konstrukcija ravnin podobna. Kroga L_1 in L_2 sta določena s projekcijo dveh parov točk velikih krogov \hat{L}_1 in \hat{L}_2 na ravnino (funkcija `StereografskaProj2 []`).



Slika 7.11: Sferična geometrija (rotacija $\mathcal{R}_Y^{5\pi/12}$).

Parametri za prikaz določajo, ali se ustrezni elementi prikažejo ali ne oziroma določajo njihovo prosojnost. Ravnina je prikazana na območju $x \in [-5, 5]$, $y \in [-5, 5]$. Posnetka aplikacije sta na slikah 7.11 in 7.12.

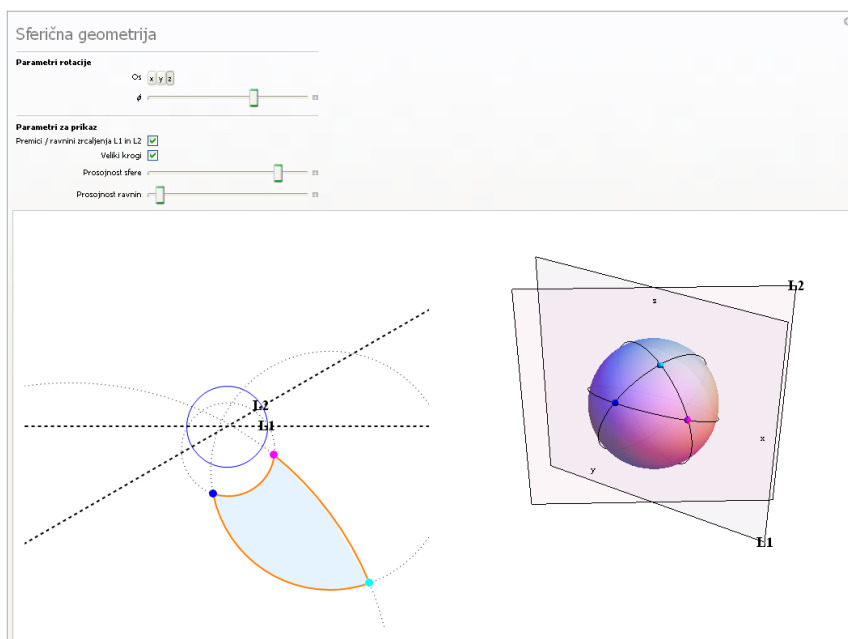
7.4 Hiperbolična geometrija

Predstavitev hiperbolične geometrije sem razdelil v dve aplikaciji. V prvi sem simuliral kompleksno ravnino z metriko $d\hat{s} = ds/y$ in prikazal značilne krivulje hiperbolične geometrije. Druga aplikacija predstavlja rotacije hiperbolične geometrije.

7.4.1 Hiperbolične premice

Glavni kontrolni elementi te aplikacije so trije lokatorji, označeni s črkami „a“, „b“ in „p“. Glede na vrednosti kompleksnih števil a , b in p , ki jih lokatorji predstavljajo, sem prikazal naslednje krivulje:

- Premico L skozi a in b (modra, odebljena);
- Asimptotični premici skozi p glede na L (modri, črtkani);

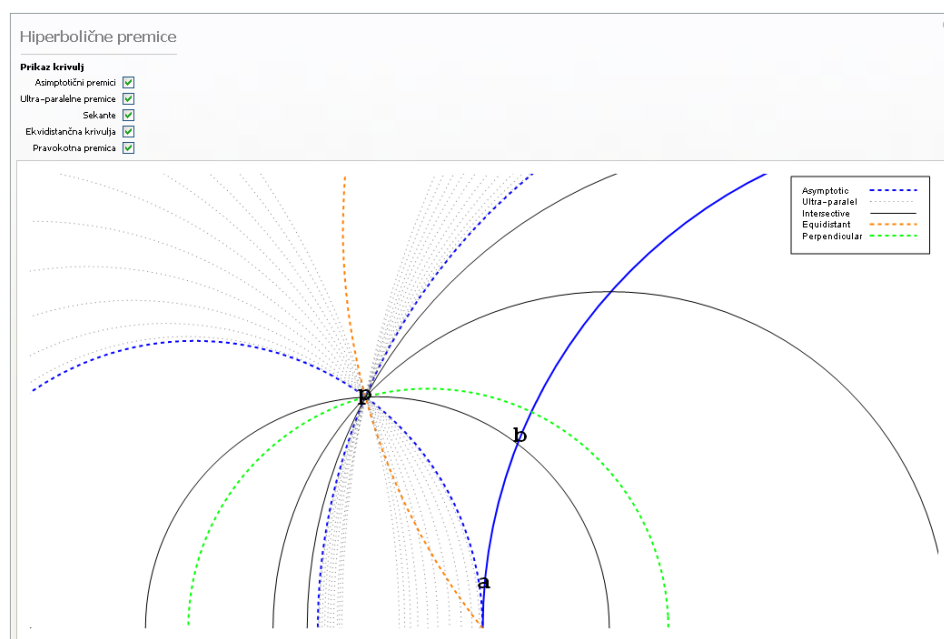


Slika 7.12: Sferična geometrija (rotacija $\mathcal{R}_Z^{\pi/3}$).

- Ultraparalelne premice skozi p glede na L (sive, pikčaste);
- Premice skozi p , ki sekajo L (črne);
- Premico skozi p , pravokotno na L (zelena, črtkana);
- Ekvidistančno krivuljo glede na p in L (množica točk, oddaljenih od L za $d(p, L)$) (oranžna, črtkana).

Teoretično ozadje teh krivulj sem opisal že v poglavju o hiperbolični geometriji (str. 54 -), zato bom tu navedel le konkreten postopek za izračun.

Premica L skozi a in b je določena s evklidsko krožnico skozi ti točki in središčem na realni osi. Ker je hiperbolična ravnina omejena na del kompleksne ravnine nad realno osjo, se hiperbolična premica kaže kot krožni lok, omejen s kotoma 0 in π . Asimptotični premici sta tisti hiperbolični premici, ki vsebujeta p in se dotikata premice L na realni osi. Ultraparalelne premice so premice skozi p , ki nimajo skupnih točk s premico L . Sekante so vse ostale premice skozi p . Premico skozi p , pravokotno na L , dobimo tako, da izrišemo premico skozi p in $\tilde{p} = \mathfrak{R}_L(p) = \mathcal{I}_L(p)$, torej zrcalno sliko p glede na L . Ekvidistančna krivulja je evklidska krožnica skozi p in točki, v katerih se asimptotični premici dotikata L .



Slika 7.13: Hiperbolične premice (prikaz nekaterih krivulj v hiperbolični ravnini).

Za izračun premic prek dveh točk sem uporabil nekoliko poenostavljeno funkcijo `Krog[]`. Iščemo namreč krožnico skozi a in b , središče q pa je oblike $q(x, 0)$ oziroma $\Im(q) = 0$.

Poleg lokatorjev ima aplikacija še 5 kontrolnih elementov. Izbirati je mogoče, katere krivulje naj aplikacija prikaže. Izjema je le premica L , katere prikaz je obvezen. Kontrole so oblike kvadratika s kljukico (`CheckBox[]`, zaloga vrednosti `{True, False}`). Zaslonska maska aplikacije je prikazana na sliki 7.13.

7.4.2 Rotacija v hiperbolični ravnini

Aplikacija prikazuje rotacijo \mathcal{R}_q^ϕ hiperboličnega trikotnika T s središčem v točki q za kot ϕ . Uporabnik ima na voljo štiri lokatorje. Trije določajo trikotnik T in so označeni s črkami „a“, „b“ in „c“, četrti, označen s „q“ pa določa središče rotacije q . Aplikacija izriše h-premici zrcaljenja L_1 in L_2 , tako da velja $\mathcal{R}_q^\phi = \mathfrak{R}_{L_2} \circ \mathfrak{R}_{L_1}$. Nato se izrišeta tudi sliki $\mathfrak{R}_{L_1}(T)$ in $(\mathfrak{R}_{L_2} \circ \mathfrak{R}_{L_1})(T)$, obarvani enako kot L_1 oziroma L_2 . Poleg lokatorjev ima aplikacija naslednje kontrolne elemente:

- Parametri rotacije

- Kot
- Parametri za prikaz
 - Slika zrcaljenja \mathfrak{R}_{L_1}
 - Slika zrcaljenja $\mathfrak{R}_{L_2} \circ \mathfrak{R}_{L_1}$
 - H-premici zrcaljenja L_1 in L_2
 - Invariantne krivulje

Kot je kontrola tipa drsnik in vsebuje vrednosti na intervalu $[-\pi, \pi]$ v korakih po $\pi/12$. Pri določanju h-premic L_1 in L_2 sem uporabil naslednji pristop. Za h-premico L_1 sem izbral navpično premico skozi q . Nato sem poiskal ustrezno h-premico L_2 , tako da je kot med L_1 in L_2 enak ϕ . Kadar je kot ϕ pozitiven, je h-premica L_2 polkrog z radijem R in središčem p , tako da velja

$$R = \frac{\Im(q)}{\sin(\pi - \phi/2)} \quad (7.8)$$

in

$$p = \Re(q) - R \cos(\pi - \phi/2). \quad (7.9)$$

Če je kot ϕ negativen, se vlogi h-premic L_1 in L_2 zamenjata.

Invariantne krivulje so h-krogi s središčem v q ter skozi točke a , b oziroma c . Radije h-krogov sem izračunal z implementacijo konstrukcije iz dokaza trditve 49 in uporabo enačbe 6.10. Za izračun središča q in radija R evklidskega kroga, ki predstavlja h-krog, sem uporabil enačbi 6.14 in 6.15.

Zrcaljenja točk sem implementiral z uporabo enačbe 2.38.

Aplikacija je prikazana na sliki 7.14.

Poglavje 8

Zaključek

V mojem delu sem predstavil nekaj primerov uporabe kompleksnih števil v geometriji. Geometrijskih lastnosti Möbiusovih transformacij pa še zdaleč nisem izčrpal. Obšel sem model hemisfere, katerega lahko z ustrezno projekcijo prevedemo na vse tri ravninske modele hiperbolične geometrije. Poleg zgornje polravnine sta to še Poincaréov in Kleinov disk, ki jih pravtako nisem obravnaval. Splošna Möbiusova transformacija pa predstavlja transformacijsko grupo hiperboličnega prostora. Iz hiperboličnega prostora izhajajo prav vse dvodimenzionalne geometrije, ki sem jih obdelal v tej nalogi. Ponuja se torej kar nekaj možnosti oziroma smeri razširitve moje naloge.

Drugi zastavljeni cilj, vizualno čim bolj približati geometrijske lastnosti kompleksnih števil in dvodimenzionalnih geometrij, sem po mojem mnenju v veliki meri zpolnil. Nadaljni izziv je zagotovo optimizacija kode, ki zahteva poglobljeno znanje razvojnega okolja Mathematica. Sledila bi lahko še izpopolnitev uporabniškega vmesnika. Knjižnica funkcij uporabniškega vmesnika je bila pri razvoju tekoče verzije Mathematice med pomembnejšimi usmeritvami in bo v prihodnjih verzijah zagotovo še bogatejša.

Podobne aplikacije, usmerjene v e-učenje že obstajajo [13], vendar ostaja pomanjkanje celostnih rešitev na vseh področjih naravoslovja. Menim, da so tu še neodkrite možnosti uporabe Mathematice, ki je zaradi podpore simboličnemu računanju primerna tudi za izobraževanje. Slabost obstoječe verzije Mathematice je pomanjkljiva podpora izpisovanja računskega postopka. Uporaba demonstracij, razvitih v okolju Mathematica, je omogočena vsem, saj je izvajalno okolje Mathematica Player na voljo brezplačno. Alternativna rešitev pa je tehnologija Web Mathematica, ki poveže Mathematico s spletnim strežnikom in tako omogoča uporabo aplikacije prek spletnega brskalnika. Primer uporabe je spletni integrator [18].

Slike

2.1	Množenje kompleksnih števil $(3 + 5i)z$	9
2.2	Linearna funkcija $f(z) = (\frac{1}{2} + \frac{i}{2})z + (i + 1)$	10
2.3	Kompleksna inverzija in zrcaljenje prek kroga.	15
2.4	Preslikava premice.	19
2.5	Preslikava kroga.	20
2.6	Izverzija $\mathcal{I}_K(z)$ v krogu K (primeri preslikav).	21
3.1	Enaki trikotniki.	25
3.2	Modela sferične in hiperbolične geometrije.	28
3.3	Modeli evklidske geometrije.	29
3.4	Ploskve s pozitivnim, negativnim in ničnim $k(p)$	30
4.1	Togi premiki.	34
4.2	Podobnosti.	37
5.1	Veliki krogi.	39
5.2	Sferični trikotnik.	40
5.3	Stereografska projekcija.	44
5.4	Stereografska projekcija kot zrcaljenje.	46
6.1	Traktrisa in pseudosfera.	51
6.2	Zrcaljenje h-premice v krogu K	55
6.3	Premice v hiperbolični ravnini.	56
6.4	Rotacije s središčem v q v korakih po $\pi/12$	58
7.1	Zrcaljenje prek kroga (preslikava krožnice).	65
7.2	Zrcaljenje prek kroga (preslikava elipse).	66
7.3	Zrcaljenje prek kroga (preslikava hiperbole).	67
7.4	Zrcaljenje prek kroga (preslikava parabole).	68
7.5	Evklidska geometrija (rotacija).	69
7.6	Evklidska geometrija (premik).	70

7.7	Evklidska geometrija (rotacija za π).	70
7.8	Evklidska geometrija (razteg).	71
7.9	Evklidska geometrija (rotacija za π in razteg).	72
7.10	Evklidska geometrija (rotacija in razteg).	72
7.11	Sferična geometrija (rotacija $\mathcal{R}_Y^{5\pi/12}$).	75
7.12	Sferična geometrija (rotacija $\mathcal{R}_Z^{\pi/3}$).	76
7.13	Hiperbolične premice (prikaz nekaterih krivulj v hiperbolični ravnini).	77
7.14	Hiperbolična rotacija (rotacija $\mathcal{R}_q^{\pi/12}$).	79

Literatura

- [1] S.V. Duzhin and B.D. Chebotarevsky. *Transformation groups for beginners*. AMS, 2004.
- [2] Alfred Gray, Elsa Abbena, and Simon Salamon. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*. Chapman & Hall/CRC, third edition, 2006.
- [3] Júlia Góth and Adrienn Skrop. Varying Retrieval Categoricity Using Hyperbolic Geometry. *Information Retrieval*, 8:265–283, April 2005.
- [4] Felix Klein. Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. *Mathematische Annalen*, 43:63–100, 1893.
- [5] Felix Klein. *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint: Geometry*. Dover, 1939.
- [6] Walter Meyer. *Geometry and Its Applications*. Academic Press, 2006.
- [7] Tristan Needham. *Visual Complex Analysis*. Oxford University Press, 1997.
- [8] Tobias Oetiker, Hubert Partl, Irene Hyna, and Elisabeth Schlegl. *The Not So Short Introduction To L^AT_EX 2_ε*, 2006.
- [9] Hans Schwerdtfeger. *Geometry of Complex Numbers*. Dover Publications, 1979.
- [10] John R. Silvester. *Geometry, ancient and modern*. Oxford University Press, 2001.
- [11] W. P. Thurston. *Three-Dimensional Geometry And Topology*. Princeton University Press, 1997.

- [12] Gabrijel Tomšič and Tomaž Slivnik. *Matematika III*. Založba FE in FRI, 2001.
- [13] Noneuclid. <http://www.cs.unm.edu/~joel/NonEuclid/NonEuclid.html>.
- [14] Wolfram *Mathematica* Documentation Center. <http://reference.wolfram.com/mathematica/guide/Mathematica.html?docs>.
- [15] Wolfram Demonstration Project. <http://demonstrations.wolfram.com/>.
- [16] Pseudosphere. <http://mathworld.wolfram.com/Pseudosphere.html>.
- [17] Determining if a point lies on the interior of a polygon. <http://local.wasp.uwa.edu.au/~pbourke/geometry/insidepoly/>.
- [18] Wolfram *Mathematica* Online Integrator. <http://integrals.wolfram.com/index.jsp>.

Izjava

Izjavljam, da

- sem diplomsko nalogo izdelal samostojno pod vodstvom mentorice prof. dr. Nežka Mramor Kosta
- so elektronska oblika diplomskega dela, naslov (slov., angl.), povzetek (slov., angl.) ter ključne besede (slov., angl.) identični s tiskano obliko diplomskega dela
- soglašam z javno objavo elektronske oblike diplomskega dela v zbirki „Dela FRI“.

Ljubljana, 29. september 2008

Christian Zakrajšek