ETAN

XXXIII JUGOSLOVENSKA KONFERENCIJA
NOVI SAD, 12–17. JUNA 1989.

XIII SVESKA

JUGOSLOVENSKI SAVEZ ZA ELEKTRONIKU, TELEKOMUNIKACIJE, AUTOMATIZACIJU I NUKLEARNU TEHNIKU - BEOGRAD

ZBORNIK RADOVA
XXXIII JUGOSLOVENSKE KONFERENCIJE O ELEKTRONICI, TELEKOMUNIKACIJA, AUTOMATIZACIJI I NUKLEARNOJ TEHNICI

Novi Sad, 12-17.06.1989.

PROCEEDINGS
OF THE XXXIIIth CONFERENCE OF ELECTRONICS, TELECOMMUNICATIONS, AUTOMATION AND NUKLEAR ENGINEERING

Novi Sad, 12-17.06.1989.

SVESKA/PART XIII

Beograd, 1989.

XXXIII JUGOSLOVENSKA KONFERENCIJA ETAN-a, NOVI SAD, 12—17. JUNA 1989.

SADRŽAJ

XIII. SVESKA - KOMISIJA: VI

VI - KOMISIJA ZA VEŠTAČKU INTELLIGENCIJU I PREPOZNAVANJE OBLIKA

XXXIII JUGOSLOVENSKA KONFERENCIJA ETAN-a, NOVI SAD, 12—17. JUNA 1989.

Franc Solina
Fakulteta za elektrotehniko in računalništvo
Univerza v Ljubljani
Tržaška 25,
61001 Ljubljana

Rekonstrukcija oblik s kompaktnimi prostorskimi modeli

Shape reconstruction with compact volumetric models

POVZETEK — Predstavljena je metoda za rekonstrukcijo kompaktnih prostorskih modelov za uporabo v računalniškem vidu. Modeli so superelipsoidi, ki so še dodatno podvrženi deformacijam. Vhodni podatki so tridimenzionalne točke. Definirali smo energijsko funkcijo katere vrednost zavisi od oddaljenosti danih točk od površine modela in velikosti celotnega modela. Rekonstrukcija modela je formulirana kot minimizacija te funkcije z vsoto najmanjših kvadratov. Začetne vrednosti pri minimizaciji so grobe ocene položaja, orientacije in velikosti predmeta. Med iterativno minimizacijo z metodo odvodov spreminjamo vse parametre modela istočasno, tako da rekonstruiramo tak položaj, orientacijo, velikost in obliko modela, da ležijo vse dane točke čimbližje površini modela.

ABSTRACT — A method for recovery of compact volumetric models for shape representation in computer vision is presented. The models are superquadrics with parametric shape deformations. We define an energy function whose value depends on the distance of input range points from the model's surface and on the overall size of the model. Model recovery is formulated as a least-squares minimization of the cost function. The initial estimate required for minimization is the rough position, orientation and size of the object. During the iterative gradient descent minimization process, all model parameters are adjusted simultaneously, recovering position, orientation, size and shape of the model, such that most of the given range points lie close to the model's surface.

1 Uvod

Vidna percepcija omogoča inteligentno interakcijo z okoljem. Daje nam informacije s katerimi lahko brez neposrednega fizičnega kontakta določamo položaj predmetov, jih prepoznavamo in odkrivamo njihova medsebojna razmerja. Skratka, vid naredi zunanji svet pristopen mišljenju [11]. Čeprav še zdaleč ne razumemo povsem mehanizme človeške vidne percepcije, si prizadevamo dati strojem sposobnost vida iz enakega razloga - strojem želimo omogočiti delovanje vzajemno s spreminjajočim se okoljem. Sposobnosti računalniških sistemov za vid so zaenkrat še zelo omejene v primerjavi s človeškim vidom. Vseeno pa imata študij vidne percepcije pri človeku in stroju stične točke na nivoju teorije izračunljivosti. To so vprašanja *katere* informacije je potrebno izluščiti iz sveta in *kako*, neodvisno od specifičnih algoritmov in mehanizmov.

Poglavitni problem pri raziskavah vida je to, da dvodimenzionalne odslikave ne določijo enoznačno originalnega tridimenzionalnega sveta. Teoretično lahko nešteto tridimenzionalnih scen producira eno in isto dvodimenzionalno sliko. Da bi lahko invertirali projekcijo, potrebujemo *dodatne* informacije, ki šele omogočijo formiranje smiselnega opisa sveta. Te informacije so znanje o formiranju slik in o strukturi sveta. V računalniškem vidu je to dodatno znanje vgrajeno v modele, ki se jih uporablja za opisovanje sveta. Ker je večina vidnih informacij v geometrijski obliki, je večina teh modelov namenjena predstavi oblik.

Informacijo vsebovano v posameznih slikovnih elementih digitalne slike moramo organizirati v večje enote ali modele. Modeli dosežejo redukcijo podatkov s tem, da podatkom vsilijo določeno organizacijo. Ta organizacija odseva znanje oziroma pričakovanje o tem, kako so ti podatki strukturirani. Višji ko je model, več strukture vsili podatkom. Večina sistemov za prepoznavanje predmetov v računalniškem vidu je odvisna od natančnih modelov za vse predmete, ki jih pričakujemo na sceni [8,13]. To pa je možno zagotoviti le v strogo kontroliranem okolju, kot je primer v industriji [6]. Tak pristop ni možen v naravnem okolju, saj bi potrebovali izredno veliko število različnih modelov. Za opisovanje naravnih scen in predmetov potrebujemo drugačen pristop. Najbolj razširjena teorija vida zagovarja večstopenjsko rekonstrukcijo modelov za razumevanje slik [17]. Tako se naj najprej izlušči lokalne modele robov, vogalov in površinskih zaplat. Ker se parametri formiranja slik v naravi lahko hipno spremenijo od enega do drugega slikovnega elementa, ti lokalni modeli vsebujejo napake. Ker so povrhu tega to drobnozrnati modeli, jih že opis preproste slike zahteva veliko število. Kakršnokoli prepoznavanje predmetov s primerjanjem modelov na tej stopnji predstavitve bi vodilo do kombinatorne eksplozije. Poprej je potrebno je zmanjšati število modelov. To lahko storimo s tem, da izberemo le najbolj relevantne modele na osnovi zakonov perceptualne organizacije [25,16] ali pa da združimo te lokalne modele v prostorninske modele z večjo zrnatostjo. V vsakem primeru pa moramo z dodatnim znanjem na tej stopnji omogočiti dopolnjevanje manjkajočih informacij in odkrivanje napak na zanesljiv in preverljiv način.

Psihologi, ki preučujejo vidno percepcijo pri ljudeh opozarjajo na posebno vlogo delov, oziroma na tisti nivo opisa, katerega elementi so deli [7,15,14]. Posplošeni valji so najbolj znan tak primer modelov za predstavo oblike namenjeni prav računalniškemu vidu. Uporablja jih več različnih sistemov [10,22], ki jim je skupno to, da rekonstrukcija teh modelov sloni na pravilih izpeljanih iz idej o perceptualni organizaciji (naprimer o večji relevantnosti vsporednih robov). V sistemih, ki slone na eksplicitnih pravilih, pa je nadzorovanje napredka težavno, saj rezultatov ni moč direktno ocenjevati. To pomanjkljivost lahko nadoknadimo s tem, da za parametrične modele oblike zapišemo sistem *pogojnih* enačb, kjer je število teh enačb večje od števila parametrov. Tak *nezdružljiv* sistem pogojnih enačb dobimo, če modele z majhnim številom parametrov uporabimo za opis velikega števila potez v sliki. Rešitev tako zastavljenega problema skuša poiskati najverjetnejše vrednosti parametrov oziroma v čimvečji meri ugoditi vsem zunanjim omejitvam, oziroma potezam v sliki. Notranje omejitve, ki jih vsilijo parametri modelov, pa naj bodo izbrane tako, da odražajo znanje o formaciji slik in obliki naravnih predmetov. Tako rekonstruiranje oblik modelov lahko ponazorimo z delovanjem notranjih in zunanjih sil. Notranje sile so tiste notranje lastnosti modela, ki definirajo vse možne kombinacije parametrov in s tem vse potencialne oblike. Zunanje sile pa so tisti vplivi v sliki, ki usmerjajo oblikovne možnosti podane z notranjo parametrizacijo modela. Rekonstruirana oblika je tako rezultat interakcije notranjih in zunanjih sil.

V tem članku predstavljamo metodo za rekonstrukcijo kompaktnih prostorskih modelov za predmete sestavljene iz enega samega dela. Da bi lahko preučevali problem rekonstrukcije oblike neodvisno od segmentacije, smo se namreč omejili na scene z enim samim predmetom. Čeprav je to precejšnja poenostavitev, pa je v nekaterih omejenih okoljih taka situacija možna in normalna [23]. Uporabljamo poseben primer kompaktnih prostorskih modelov. To so superelipsoidi z dodatnimi parametričnimi deformacijami oblike, ki so prav posebej primerni za opis oblik na nivoju delov [19]. Na osnovi metode najmanjših kvadratov smo vpeljali novo metodo za rekonstrukcijo teh modelov iz tridimenzionalnih točk globinskih slik. Za tridimenzionalne točke oziroma globinske slike smo se odločili zato, da bi lahko preučevali rekonstrukcijo oblike neodvisno od različnih pasivnih metod za rekonstrukcijo globine (stereo, fokusiranje, gibanje). Vrednosti funkcije prileganja, katere vsoto kvadratov med rekonstrukcijo oblike minimiziramo, so odvisne od razdalje točk od površine modela in od velikosti modela. Čeprav ima parametrski prostor rešitev več "globokih" minimumov, ki vsi ustrezajo sprejemljivim rešitvam in celo kopico lokalnih minimumov, lahko uspešno poiščemo ustrezno rešitev.

Nadaljevanje članka je razdeljeno na naslednje dele: 2. del definira superelipsoide, 3. del govori o rekonstrukciji superelipsoidov, v 4. delu pa je zaključek.

2 Superelipsoidi

Superelipsoidi so posplošeni elipsoidi in se jih uporablja za modeliranje oziroma predstavo oblike v računalniški grafiki [4] in računalniškem vidu [19,2,9]. Superelipsoide lahko primerjamo s kepami gline, ki se jih da oblikovati in združevati v realistične modele naravnih oblik, kar lepo demonstrira Pentlandov grafični sistem *Supersketch* [19].

Površina elipsoida je definirana z naslednjo implicitno enačbo

$$F(x,y,z) = \left(\left(\left(\frac{x}{a_1}\right)^{\frac{2}{\epsilon_2}} + \left(\frac{y}{a_2}\right)^{\frac{2}{\epsilon_2}} \right)^{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} + \left(\frac{z}{a_3}\right)^{\frac{2}{\epsilon_1}} \right)^{\epsilon_1}. \tag{1}$$

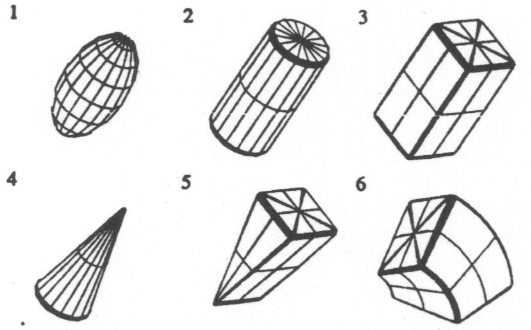
Kadar sta oba eksponenta ϵ_1 in ϵ_2 enaka 1, enačba predstavlja navaden elipsoid, kadar pa so a_1, a_2, a_3 še vsi enaki, je to enačba krogle. Ko je $\epsilon_1 \ll 1$ in $\epsilon_2 = 1$, površina superelipsoida navzame cilindrično obliko. Kvadraste oblike pa dobimo, ko sta oba eksponenta ϵ_1 in $\epsilon_2 \ll 1$. Zmogljivost modeliranja oblik pa lahko še povečamo, če superelipsoide podvržemo parametričnim deformacijam, kot so naprimer tanjšanje in krivljenje [24]. Nekaj primerov deformiranih in nedeformiranih superelipsoidov je na sliki 1.

Funkcijo v enačbi (1) imenujemo tudi notranja-zunanja funkcija ker za dano točko (x,y,z) določi njen relativen položaj glede na površino superelipsoida. Če je $F(x,y,z) = 1$, potem točka (x,y,z) leži na površini superelipsoida. Če je $F(x,y,z) > 1$, ustrezna točka leži zunaj, če je $F(x,y,z) < 1$, pa znotraj superelipsoida.

Notranja-zunanja funkcija (1) definira površino superelipsoida v koordinatnem sistemu (x_S, y_S, z_S) z izhodiščem v središču superelipsoida. Tridimenzionalne točke iz globinskih slik pa so podane v nekem drugem koordinatnem sistemu. Da bi lahko rekonstruirali superelipsoide v splošnem položaju, smo definirali notranjo-zunanjo funkcijo za splošem položaj, kjer je relacija med koordinatnim sistemom globinske slike in superelipsoidu lastnem koordinatnem sistemu podana s homogeno transformacijo $\mathbf{T}$. Rotacijski del transformacijske matrike $\mathbf{T}$ smo izrazili z Eulerjevimi koti (ϕ, θ, ψ) [18]. Notranja-zunanja funkcija superelipsoida v splošnem položaju je potemtakem

$$F(x,y,z) = F(x,y,z; a_1, a_2, a_3, \epsilon_1, \epsilon_2, \phi, \theta, \psi, p_x, p_y, p_z). \tag{2}$$

Ta razširjena notranja-zunanja funkcija ima 11 parametrov; a_1, a_2, a_3 določajo velikost superelipsoida; ϵ_1 in ϵ_2 sta parametra oblike; ϕ, θ, ψ določajo orientacijo v prostoru, p_x, p_y, p_z pa definirajo položaj v prostoru. Množico vseh parametrov označimo z $\Lambda = \{a_1, a_2, \ldots, a_{11}\}$.



Slika 1: Primeri superelipsoidov. Modeli 1, 2 in 3 se razlikujejo le po vrednosti parametrov oblike ϵ_1 in ϵ_2. Superelipsoida 4 in 5 sta deformirana s tanjšanjem vzdolž osi z, superelipsoid 6 pa je upognjen.

3 Rekonstrukcija superelipsoidov

Na vhodnih globinskih slikah imamo predmete, ki so sestavljeni le iz enega dela in ležijo na ravni delovni površini laserske naprave za zajemanje globinskih slik. Točke, ki ležijo na delovni površini odstranimo iz množice vseh tridimenzionalnih točk tako, da vse točke, ki so dovolj blizu ravnine skozi delovno površino, izločimo. Vse preostale tridimenzionalne točke pa ležijo na površini predmeta, katerega obliko želimo rekonstruirati. Recimo, da nam tako ostane N tridimenzionalnih točk (x_W, y_W, z_W), ki jih želimo modelirati s superelipsoidom. Poiskati hočemo take vrednosti vseh 11 parametrov modela $a_j, j = 1, \ldots, 11$ v enačbi 2 da bi večina tridimenzionalnih točk ležala na površini ali vsaj blizu površine modela. Taka množica parametrov Λ, ki bi popolnoma prilagodila model vhodnim točkam ponavadi ne obstaja. Iskanje modela Λ, pri katerem so razdalje točk do njegove površine minimalne, pa se da poiskati z metodo najmanjših kvadratov. Ker zaradi samozakrivanja ne moremo videti naenkrat vso površino predmeta, uvedemo še dodatno omejitev pri rekonstrukciji modelov. Med vsemi možnimi rešitvami izberemo *najmanjši* superelipsoid, ki se prilega danim točkam v smislu vsote najmanjših kvadratov. To dosežemo z naslednjo funkcijo prileganja, katere vrednost v točkah na površini modela poznamo že pred začetkom minimizacije

$$R = \sqrt{a_1 a_2 a_3}(F - 1). \tag{3}$$

Ker velja za vsako točko (x_W, y_W, z_W) na površini superelipsoida

$$R(x_W, y_W, z_W; a_1, \ldots, a_{11}) = 0, \tag{4}$$

moramo najti

$$G = min \sum_{i=1}^{N} [R(x_{W_i}, y_{W_i}, z_{W_i}; a_1, \ldots, a_{11})]^2. \tag{5}$$

Ker je R nelinearna funkcija 11 parametrov $a_j, j = 1, \ldots, 11$, poteka minimizacija iterativno. Za dane začetne vrednosti parametrov Λ_k, ovrednotimo enačbo (3) v vseh N točkah in nato poiščemo v smeri njihovega parcialnega odvoda nove vrednosti parametrov, ki rešitev izboljšajo. Z novimi parametri Λ_{k+1} ta postopek ponovimo in to ponavljamo dokler se vsota najmanjših kvadratov (5) ne manjša več, ali ko razlike med vsotami postanejo statistično zanemarljive. V večini primerov je 15 iteracij dovolj. Ker se da prve odvode $\delta R/\delta a_i$ za $i = 1, \ldots, 11$ izračunati analitično, uporabljamo Levenberg-Marquardtovo metodo za najmanjše kvadrate nelinearnih funkcij [21]. Kot začetne vrednosti parametrov pri minimizaciji zadostujejo že zelo grobe ocene položaja, orientacije in velikosti predmeta. To je pomembno, ker teh parametrov ne moremo natančno oceniti, saj imamo na voljo le točke, ki ležijo na vidni strani predmeta. Kot začetne vrednosti obeh parametrov oblike ϵ_1 and ϵ_2 vzamemo vrednost 1, kar pomeni, da je začetni model Λ_E vedno elipsoid. Kot približek položaja predmeta v koordinatnem sistemu slike vzamemo kar težišče vseh N danih točk. Orientacijo pa ocenimo tako, da izračunamo cetralne momente teh točk glede na njihovo težišče. Začetni model Λ_E orientiramo tako, da je koordinatna os z modelu lastnega koordinatnega sistema vzdolž njegove najdaljše strani (os z najmanjšim navorom). To orientacijo izberemo zato, ker deformacije tanjšanja in krivljenja delujejo ponavadi vzdolž najdaljše osi nekega predmeta. Ocene velikosti začetnega elipsoida so enostavno največje razdalje med točkami, merjene vzdolž vseh treh koordinatnih osi modelu lastnega koordinatnega sistema.

Deformirane superelipsoide rekonstruiramo na enak način. Edina razlika je ta, da moramo izračunati še dodatne parametre, ki definirajo te oblikovne deformacije. Opis deformacij, kot so naprimer poenostavljeno tanjšanje, upogibanje in zvijanje zahteva le nekaj dodatnih parametrov [5]. Deformacija oblike je funkcija D, ki eksplicitno modificira globalne koordinate točk v prostoru

$$\mathbf{X} = D(\mathbf{x}) \tag{6}$$

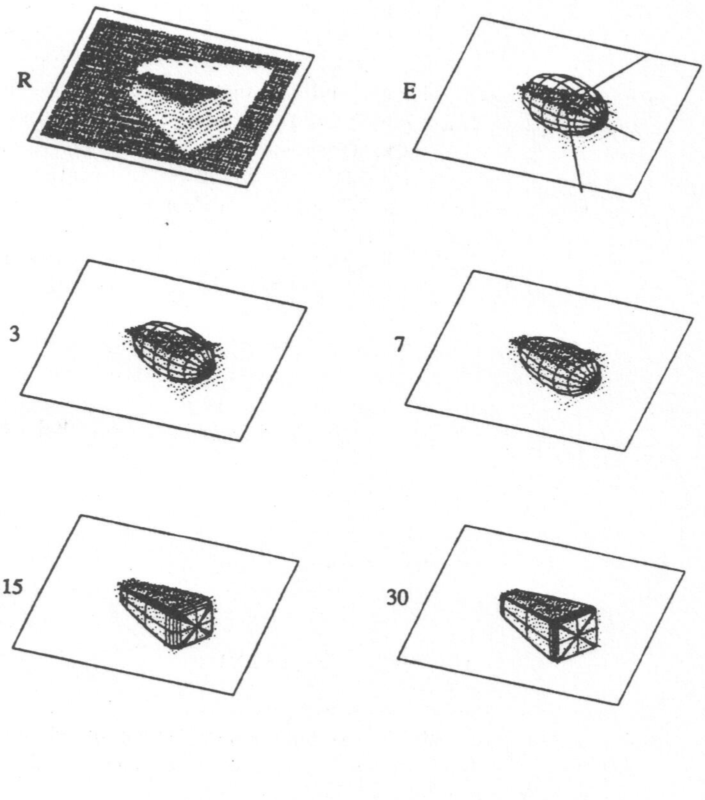
kjer so $\mathbf{x}$ točke na površini nedeformiranega modela, $\mathbf{X}$ pa iste točke po deformaciji. Oba vektorja $\mathbf{x}$ in $\mathbf{X}$ sta izražena v koordinatnem sistemu modela. Vsaka translacija ali rotacija pa se mora izvesti po deformaciji, saj te operacije niso komunitativne. Model, ki je bil stanjšan vzdolž osi in ukrivljen, shematično predstavimo kot

$$Trans(Rot(Bend(Taper(\mathbf{x})))). \tag{7}$$

Struktura takega modela ima perceptualen pomen. Ko namreč formiramo model, začnemo v notranjosti takega shematičnega modela. Najprej vzamemo nedeformiran model, ga deformiramo in nato postavimo na poljubno mesto v prostoru. Če pa hočemo model rekonstruirati, gremo v obratni smeri, saj preden rekonstruiramo njegovo obliko, moramo odkriti njegov položaj in orientacijo v prostoru. Notranja-zunanja funkcija deformiranih superelipsoidov, ki smo jo uporabljali pri našem delu ima 4 dodatne parametre; dva za tanjšanje vzdolž z osi, neodvisno v smeri x in y, ter dva parametra za krivljenje: kot α definira položaj ravnine krivljenja, ki se vrti okoli z osi, β pa je dejanski kot ukrivljenja

$$F(x, y, z) = F(X, Y, Z; a_1, \ldots, a_{11}, K_x, K_y, \alpha, \beta). \tag{8}$$

Funkcijo prileganja (8) lahko obravnavamo kot energijsko funkcijo v modelovem parametričnem prostoru. Minimizacija na splošno zagotavlja le konvergenco do nekega lokalnega minimuma, ki ni nujno globalen minimum. Izhodiščni položaj (Λ_E) v parametričnem prostoru pa odloča do katerega minimuma bomo prispeli. Poskrbeti pa moramo, da ne obtičimo v plitkem lokalnem minimumu. Tega se izognemo tako, da dodajamo naključen šum pri vsakem koraku minimizacije. Ko s šumom povečano trenutno vsoto najmanjših kvadratov primerjamo z vsoto kvadratov modela, ki ga preizkušamo v danem koraku, sprejmemo včasih novi model, čeprav je slabši od predhodno sprejetega. Taka stohastična metoda prištevanja šuma je podobna simuliranemu segrevanju (simulated annealing).



Slika 2: Rekonstrukcija oblike kvadrastega predmeta, ki je stanjšan vzdolž najdaljše osi. Na vrhu slike je originalna globinska slika (R) in začetni model, elipsoid Λ_E, potem ko so točke z delovne površine že odstranjene (E). Prikazane so tudi koordinatne osi modelu lastnega koordinatnega sistema. Sledijo modeli po tretji (3), sedmi (7), petnajsti (15) in trideseti (30) iteraciji med rekonstrukcijo oblike, ko smo hkrati prirejali vseh 13 parametrov modela.

Rekonstrukcija modela zahteva v povprečju okoli 20 sekund na računalniku VAX 785 (slika 2). Čas rekonstrukcije pa smo še zmanjšali z multi-resolucijsko metodo, ki uporablja serijo globinskih slik, od redkih, podvzorčenih slik, pa vse do originalne globinske slike z vsemi točkami. Podroben opis rekonstrukcije superelipsoidov, ki obravnava konsistentnost, stabilnost in dvoumnost smo objavili drugje [24].

4 Zaključek

Superelipsoidi implicitno definirajo družino oblik, ki jih lahko navzamejo, tako da pri rekonstrukciji ni potrebno nikakršno dodatno nastavljanje parametrov od primera do primera. Za naš način rekonstrukcije je pomembno, da je površina superelipsoida definirana z analitično, odvedljivo notranjo-zunanjo funkcija. Rekonstrukcija je definirana z metodo najmanjših kvadratov funkcije prileganja. Vsota najmanjših kvadratov je obenem merilo kako dobro se model prilega podatkom. To je dobrodošlo, saj v računalniškem vidu rezultati ponavadi niso direktno preverljivi.

Superelipsoidi tvorijo podmnožico oblik, ki se jih sicer da opisati s posplošenimi valji, vendar pa je parametrizacija superelipsoidov s pridruženimi deformacijami bolj naravna. Z majhnim številom perceptualno relevantnih parametrov omogoča enotno obravnavanje množice osnovnih geometrijskih in naravnih oblik. Rekonstrukcija teh oblik pa je rešljiva tako, da se izračuna najverjetnejše vrednosti parametrov. Zaradi implicitno vgrajene simetrije rekonstruirani superelipsoidi predvidijo tudi obliko tistega dela predmeta, ki je zaradi samozakrivanja senzorjem skrita. To se sklada z načelom ekonomičnosti na katerem sloni človeška percepcija, da med možnimi hipotezami izberemo najpreprostejšo [12].

Zaradi naštetih lastnosti je opisana metoda rekonstrukcije oblik zanimiva v številnih situacijah. Njena uporabnost se preučuje za avtomatično razvrščanje pisemskih pošiljk [23] in za rekonstrukcijo oblike s senzorji otipa v artikuliranih robotskih rokah [1].

V zvezi s superelipsoidi obstaja še veliko zanimivih nerešenih problemov. Eden od teh problemov je kako uporabiti kot vhodne podatke za rekonstrukcijo superelipsoidov tudi drugačne vrste informacij vsebovane v slikah (oris, tekstura, senčenje, stereo). Nerešen problem je tudi vloga takih kompaktnih prostorskih modelov pri segmentaciji slik in delitvi artikuliranih predmetov na dele [3,20].

Literatura

[1] P. K. Allen and K. S. Roberts, "Haptic object recognition using a multi-fingered dextrous hand," in *Proceedings IEEE Conference on Robotics and Automation*, May 1989

[2] R. Bajcsy and F. Solina, "Three dimensional shape representation revisited," *Proceedings First International Computer Vision Conference*, London, England, 1987

[3] R. Bajcsy, F. Solina and A. Gupta, "Segmentation versus object representation – are they separable?," Technical report MS-CIS-88-58, GRASP Lab 151, Department of Computer and Information Science, University of Pennsylvania, Philadelphia, 1988

[4] A. H. Barr "Superquadrics and angle-preserving transformations." *IEEE Computer Graphics and Applications*, vol. 1, pp. 11-23, 1981.

[5] A. H. Barr "Global and local deformations of solid primitives." *Computer Graphics*, vol. 18, no. 3, pp. 21-30, 1984

[6] P. J. Besl and R. C. Jain, "Three dimensional object recognition," *ACM Computing Surveys,* vol. 17, no. 1, pp. 75-145, 1985

[7] I. Biederman, "Human image understanding: recent research and theory," *Computer Vision, Graphics, and Image Processing,* vol. 32, pp. 29-73, 1985

[8] R. C. Bolles and P. Horaud, "3DPO: A three-dimensional part orientation system." *International Journal of Robotics Research,* vol. 5, no. 3, pp. 3-26, 1986

[9] T. E. Boult and A. D. Gross, " Recovery of superquadrics from depth information," in *Proceedings Spatial Reasoning and Multi-sensor fusion workshop,* St. Charles, IL, 1987, pp. 128-137.

[10] R. A. Brooks, "Model-based 3-D interpretation of 2-D images," *IEEE Pattern Analysis and Machine Intelligence,* vol. PAMI-5, no. 2, pp. 140-150, 1983

[11] J. A. Fodor, *The modularity of mind,* Cambridge, MA: MIT Press, 1983

[12] E. H. Gombrich, *Art and Illusion,* Oxford: Phaidon, 1962

[13] W. E. L. Grimson, T. Lozano-Perez, "Model-Based Recognition and Localization from Sparse Range or Tactile Data," *International Journal of Robotics Research,* vol. 3, no. 3, pp. 3-35, 1984

[14] D. D. Hoffman and W. A. Richards, "Parts of recognition," *Cognition,* vol. 18, pp. 65-96, 1985

[15] J. Koenderink and A. van Doorn, "The shape of objects and the way contours end," *Perception,* vol. 11, pp. 129-137, 1982

[16] D. G. Lowe and T. O. Binford, *Perceptual organization and visual recognition,* Boston: Kluwer, 1985

[17] D. Marr, *Vision.* San Francisco: Freeman, 1982

[18] R. Paul, *Robot manipulators.* Cambridge, MA: MIT Press, 1981

[19] A. P. Pentland, "Perceptual organization and the representation of natural form." *Artificial Intelligence,* vol. 28, no. 3, pp. 293-331, 1986

[20] A. P. Pentland, "Recognition by parts," in *Proceedings First International Computer Vision Conference,* London, England, 1987

[21] W. H. Press et al., *Numerical recipes.* Cambridge: Cambridge University Press, 1986

[22] K. Rao and R. Nevatia, "Computing volume descriptions from sparse 3-D data," *International Journal of Computer Vision,* to appear.

[23] F. Solina and R. Bajcsy, "Range image interpretation of mail pieces with superquadrics," *Proceedings AAAI-87,* Seattle, 1987, pp. 733-737

[24] F. Solina, "Shape recovery and segmentation with deformable part models." Ph.D. dissertation, University of Pennsylvania, Philadelphia, 1987.

[25] A. P. Witkin and J. M. Tenenbaum, "On the role of structure in vision," in *Human and Machine Vision,* ed. J. Beck, B. Hope, A. Rosenfeld, New York: Academic Press, 1983