Univerza v Ljubljani
Fakulteta za računalništvo in informatiko

Nejc Grenc

Kardinalni B-zlepki

DIPLOMSKO DELO

UNIVERZITETNI ŠTUDIJSKI PROGRAM PRVE STOPNJE
INTERDISCIPLINARNI ŠTUDIJ RAČUNALNIŠTVO IN MATEMATIKA

Mentor: izred. prof. dr. Gašper Jaklič

Ljubljana 2015

Besedilo je oblikovano z urejevalnikom besedil LaTeX.

Naslov izdane teme:

Kardinalni B-zlepki

Mentor:

Gašper Jaklič

Vsebina teme:

Zlepki so odsekoma polinomske funkcije. Uporabljamo jih na veliko področjih uporabne matematike: za interpolacijo, aproksimacijo, numerično reševanje diferencialnih enačb,... B-zlepki so baza prostora zlepkov, ki ima lepe lastnosti. Defnirani so s pomočjo seznama števil (vozlov). Če so vozli razporejeni ekvidistantno, govorimo o kardinalnih B-zlepkih.

Cilj diplomskega seminarja je predstavitev osnovnih lastnosti kardinalnih B-zlepkov in implementacija programa, ki omogoča gradnjo in urejanje teh krivulj.

Literatura:

- Ward Cheney, Will Light, A course in approximation theory, American Mathematical Society, 2000.
- Kai Bittner, Biorthogonal Spline Wavelets on the Interval, Nashboro Press, 2005.

Izjava o avtorstvu diplomskega dela

Spodaj podpisani Nejc Grenc sem avtor diplomskega dela z naslovom:

Kardinalni B-zlepki

S svojim podpisom zagotavljam, da:

- sem diplomsko delo izdelal samostojno pod mentorstvom izred. prof. dr. Gašper Jakliča,
- so elektronska oblika diplomskega dela, naslov (slov., angl.), povzetek (slov., angl.) ter ključne besede (slov., angl.) identični s tiskano obliko diplomskega dela,
- soglašam z javno objavo elektronske oblike diplomskega dela na svetovnem spletu preko univerzitetnega spletnega arhiva.

V Ljubljani, dne Podpis avtorja:

Iskreno se zahvaljujem svojemu mentorju izred. prof. dr. Gašper Jakliču za pomoč in usmerjanje, predvsem pa za veliko mero potrpežljivosti med izdelavo diplomskega dela.

Zahvaljujem se tudi družini za veliko mero podpore in spodbujanja tako med izdelavo diplomskega dela kot tudi med študijem.

Kazalo

Seznam uporabljenih oznak

V tej diplomski nalogi bodo uporabljene naslednje splošne oznake:

p	stopnja polinoma, zlepka, krivulje
x	spremenljivka na abscisni osi
y	spremenljivka na ordinatni osi
t	spremenljivka pri parametričnih polinomih
$f(\bullet)$, $g(\bullet)$, $c(\bullet)$	polinomi

in za zlepljene krivulje:

i	indeksna zaporedna številka elementa
n	število zlepkov v krivulji
u_i, U	zaporedni vozel in množica vozlov
r_i, $\vec{R}$	zaporedna kontrolna točka in vektor kontrolnih točk
$P(\bullet), H(\bullet), B(\bullet)$	različni tipi zlepkov
$N_{p,i}(\bullet)$	B-zlepek
M_p	matrika krivulje
$s_i(\bullet)$	zaporedni odsek krivulje
$S(\bullet)$	zlepljena krivulja

Povzetek

Diplomsko delo obravnava problematiko zapisa in predstavitve krivulj v računalništvu. Kljub temu, da so eden izmed najosnovnejših elementov računalniške grafike, se izkaže, da so tudi same lahko zelo zahtevne za izgradnjo. Veliko različnih tipov zapisov skuša rešiti to problematiko, a noben ni tako uspešen kot kardinalni B-zlepki. Ti imajo edinstven nabor lastnosti, ki jim omogočajo, da na preprost način opišejo zelo kompleksne krivulje. Osrednja tema tega diplomskega dela so tako kardinalni B-zlepki, njihove lastnosti, različni načini zapisa in gradnje krivulj. Slednje so bile v sklopu te diplomske naloge tudi implementirane v programu za generiranje in oblikovanje krivulj, ki služi kot čudovit učni pripomoček.

Namen tega diplomskega dela je predstaviti grafične krivulje in kardinalne B-zlepke na način, ki bo bralcu kar najbolje razložil ta nepoznani svet računalniških krivulj.

Ključne besede:

- računalniška krivulja
- kardinalen B-zlepek
- generator krivulj

Abstract

This thesis deals with the issue of formation and presentation of curves in computer science. Despite being one of the most fundamental elements of computer graphics, they themselves can be very difficult to create. Many different curve format types attempt to solve this problem, but none is as successful as cardinal B-splines. They have a unique set of properties that allow them to describe very complex curves in a simple way. The main topic of this thesis are cardinal B-splines, their characteristics and different ways of recording and engineering curves. The latter were as a part of this thesis also implemented in the curve generating and transformation program, which serves as a wonderful learning tool.

The aim of this thesis is to present graphical curves and cardinal B-splines in a way, that will best explain this unknown world of curves to the reader.

Keywords:

- computer curve
- cardinal B-spline
- curve generator

Poglavje 1

Uvod

Računalniška grafika je relativno mlad pojem, saj obstja šele nekaj desetletij, a je že prinesla pravo revolucijo v svet podob, slik in umetnosti. Najodmevnejša lastnost računalniškega risanja je enostavno odpravljanje napak. Preprost klik na gumb "razveljavi" oziroma označevanje elementov in klik na gumb "izbriši" lahko odpravi tudi izredno kompleksne napake, ki bi bile lahko celo neodpravljive pri starejših načinih: fotografija, slikanje na platno, klesanje v kamen...

Toda četudi dandanes mnogo grafičnih oblikovalcev uporablja računalnik za delo s slikami, le redki izmed njih dejansko vedo kako ti programi delujejo. V ozadju namreč tečejo kompleksni algoritmi, ki omogočajo popravljanje slik po uporabnikovih željah. Že najpreprostejši elementi, kot je preprosto risanje črte na prazno ravnino, imajo lahko za seboj zelo dolge algoritme. Risanje ravne črte je sicer preprosto, saj je le-ta namreč shranjena v pomnilniku le z dvema točkama, ki jo razpenjata. Toda krivulje so povsem razred zase.

Za opis krivulje je nujna neke vrste funkcija, ki opisuje izgled te krivulje. S pomočjo teh funkcij je mogoče narisati krivuljo na zaslon, a to je lahko računsko zahteven postopek. Še zahtevnejši pa je postopek za iskanje teh funkcij, ki opišejo krivuljo kot si jo je grafični oblikovalec zamislil. Nadalje zahtevnost povečajo še želje po enostavnem in elegantnem upravljanju s krivuljami, želje po gladkosti, po čim enostavnejšem zapisu, itd., ki naposled privedejo do razbitja krivulje na odseke in uporabe kardinalnih B-zlepkov. Očitno je, da ustvarjanje krivulj še zdaleč ni mačji kašelj, kot se morda zdi pri grafičnih urejevalnikih.

V tem diplomskem delu sem, ob pomoči svojega mentorja izred. prof. dr. Gašper Jakliča, raziskal čim več literature o kardinalnih B-zlepkih. Poleg slednjih, ki so glavna tema te naloge, sem v globino raziskal tudi splošne načine gradnje krivulj v računalništvu in probleme zapisa krivulj, ki so privedli do izuma zlepkov in kardinalnih B-zlepkov. Osredotočil sem se na njihovo zgradbo in omejitve, različne tipe, algoritme za njihovo generiranje, ter predvsem njihovo uporabno vrednost. Končen produkt moje diplomske naloge je tako urejena zbirka zbranega znanja, prirejena za poučevanje bralcev, ki o računalniških krivuljah in kardinalnih B-zlepkih ne vedo nič oziroma zelo malo. Ti podatki pa so podkrepljeni s programom za ustvarjanje krivulj, ki je učinkovit vizualni pripomoček za lažje razumevanje in učenje te snovi.

Poglavje 2

Problem zapisa računalniških krivulj

Ustvariti krivuljo na računalniku je že od začetkov računalniške grafike težak problem. Krivulje se namreč ne da shraniti v računalniški pomnilnik kot celote, tako kot je to mogoče na kosu papirja; največ kar se da storiti je, da se shrani neke vrste opis krivulje in iz tega opisa po potrebi uporabniku ustvari prikaz krivulje na zaslonu. Načinov za zapis krivulje pa je seveda ogromno in vsak ima svoje posebnosti [1].

Izbira načina zapisa je seveda odvisna od trenutnih uporabnikovih potreb, a v grobem je mogoče ovrednotiti različne načine in njihovo uporabnost glede na naslednje kriterije:

1. **Majhnost zapisa**
   Krajši kot je zapis, lažje se ga shrani v pomnilniku.

2. **Gladkost zapisa**
   Zapis je boljši, če zmore opisati krivuljo na čim manj robat način, tako da je krivulja čim bolj gladka po vsej svoji dolžini.

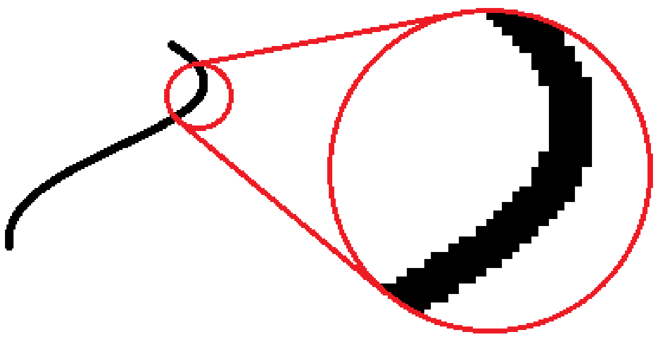
3. **Sposobnost manipulacije**
   Velika prednost je, če je mogoče zapis krivulje enostavno spremeniti.

4. **Lokalnost manipulacije**
   Spreminjanje enega dela krivulje naj ne pokvari izgleda celotne krivulje.

Izkaže se da so nekateri načini mnogo primernejši za ustvarjanje lepega in enostavnega zapisa za splošen primer krivulje. O primerjavi različnih načinov bo govora v tem poglavju diplomske naloge.

2.1 Bitna grafika

Najosnovnejši sistem zapisovanja slike je **bitna grafika**, ki razdeli celotno sliko v enako velike in enakomerno razporejene *piksle (okrajšava za: ang. "picture element", slo. "slikovni delec")*. Vsakemu od njih priredi lastnosti, kot so barva in svetlost, ki določajo del slike. Vsi piksli skupaj tako tvorijo celoten diskreten opis podobe. Takšen sistem je odličen za običajen prikaz podob iz realnega sveta, saj povpreči izgled vseh podob v določenem majhnem delu slike v piksel in se tako znebi ogromne količine podatkov, a hkrati ohrani dovolj informacij, da uporabnik lahko vizualno razbere, kaj slika prikazuje. Težava pa se pojavi, če uporabnik želi spreminjati podobo slike. Bitna grafika namreč ne vsebuje podatkov o vsakem elementu slike in je tako nemogoče spreminjati podobo posameznega elementa, ne da bi to vplivalo na vse ostale elemente, ki gradijo podobo spreminjanega piksla. Tako lahko bitna grafika reši le dva aspekta problema krivulj: vizualno predstavitev in enostavnost zapisa. Količina podatkov je namreč odvisna izključno od števila pikslov in je enaka za krivulje vseh mogočih kompleksnosti. A zaradi izgubljenih podatkov pri takšnem ustvarjanju pikslov je nemogoče iz slike razbrati dejanske lastnosti krivulje in posledično tudi nemogoče spremeniti obliko te krivulje. Bitna grafika tako omogoča enostaven zapis prikaza vsake krivulje s fiksno količino podatkov, a hkrati zavrže koncept krivulje same. Krivulja in njene lastnosti se porazgubijo med kopico pikslov in tako kot same ne obstajajo več.

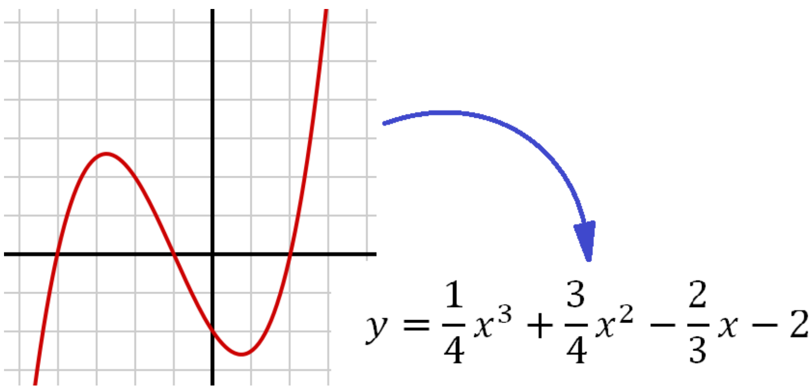


Slika 2.1: Bitna krivulja

Vektorska grafika je rešila to težavo s tem, da je namesto opisa 'izgleda' slike uporabila raje opis komponent te slike. Krivuljo tako namesto s točkami/piksli na sliki opiše kar s polinomom, ki dejansko opisuje njeno zgradbo. Tako se ohranijo vse lastnosti te krivulje. Na žalost pa ima ravno zaradi ohranjevanja vseh informacij vektorska grafika težave z zapisom kompleksnejših elementov in z zapisom večje količine elementov; podatkov je namreč preprosto preveč. Toda ravno zaradi ohranjanja lastnosti krivulje in posledične zmožnosti manipulacije z njimi, je vektorska grafika bolj zanimivo orodje za reševanje problema krivulj kot bitna grafika, zato se bo v nadaljevanju ta diplomska naloga osredotočila izključno na vektorsko grafiko in zapis krivulje s *polinomi*. Slednji so namreč najenostavnejši izmed funkcij, ki zmorejo ustvariti krivuljo.

2.2 Polinomski zapis

Polinomi imajo čudovito sposobnost elegantnega opisa gladko-ukrivljenih struktur, zato so najpogostejša izbira v primerih, ko črte niso izključno ravne. Z njihovo pomočjo lahko posamezno krivuljo popolnoma opišemo z nizem (ali več nizi) števil. To pomeni, da so naravnost čudoviti za shranjevanje v računalniškem pomnilniku, če je le ta niz sorazmerno kratek. Po drugi strani so manj primerni za izračunavanje posameznih vrednosti, saj potrebujejo za ugotavljanje točk, skozi katere potuje krivulja, zahtevne izračune, ki običajno vsebujejo potenciranje spremenljivke z visokimi vrednostmi. Kljub temu pa obstaja ogromno orodij za delo s polinomi, ki jih matematiki razvijajo že stoletja, zato ni presenetljivo da imajo polinomi največjo predstavitveno moč za ukrivljene strukture. Skoraj vsaka krivulja v računalniku uporablja na najosnovnejšem nivoju zapis v polinomski obliki.



Slika 2.2: Shranjevanje krivulje v pripadajočem polinomskem zapisu

Poznamo več vrst polinomskih zapisov:

Ekspliciten polinom
Ekspliciten polinomski zapis opiše krivuljo v n-razsežnem prostoru z $n-1$ spremenljivkami. Vsaka spremenljivka določa spreminjanje polinoma v svoji razsežnosti; zadnjo razsežnost pa določi izračunana vrednost polinoma.
Osnovna oblika zapisa je

$$y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ...$$

Lastnosti:

+ Krivulja je tako enostavno določena z nizom števil: a_i in intervalom, na katerem je krivulja definirana.

- Na žalost pa ta polinom ne zmore opisati krivulje, ki ima več vrednosti za posamezno vrednost spremenljivke. To so krivulje, pri katerih vsaka spremenljivka ne narašča strogo pri potovanju krivulje skozi prostor. Take krivulje so na primer krog, krivulja v obliki črke S, krivulja z navpičnico... Tako ekspliciten polinom ne more opisati nekaterih vrst krivulj, kar pa je seveda huda pomanjkljivost.

Parametričen polinom
Parametričen polinomski zapis opiše krivuljo v j-razsežnem prostoru z j polinomi nad eno samo spremenljivko (ponavadi označena s t). Vsak polinom določi komponento v pripadajoči razsežnosti glede na vrednost spremenljivke. Vsi polinomi skupaj tako definirajo enolično določeno točko za posamezno vrednost spremenljivke.
Osnovna oblika zapisa je

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + ... \, , \\ g(t) &= b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + ... \, , \\ (x, y) &= (f(t), g(t)) \, . \end{aligned}$$

Lastnosti:

+ Za opis posamezne krivulje tako potrebujemo j množic števil, kar je v praksi še zmeraj zelo malo.

+ Zapis krivulje je zelo eleganten, saj lahko obravnavamo vsako razsežnost posebej.

- Uporablja se dodatno "skrito" spremenljivko, katere vrednost ni označena na nobeni izmed koordinatnih osi.

Impliciten polinom

Impliciten polinomski zapis opiše krivuljo z enačbo z več spremenljivkami. Te spremenljivke niso ločene med elementi tako kot pri eksplicitnih polinomih - nobena spremenljivka ni očitno izpostavljena. Običajno se uporablja za zapis tega polinoma izpostavitev ničle na eni strani enačbe: $f(x, y, ...) = 0$.

Lastnosti:

+ Včasih je mogoče elegantno izraziti vrednost spremenljivke y s pomočjo vrednosti spremenljivke x.

+ Ta zapis omogoča veliko kompleksnejše izraze kot eksplicitnih polinomi, saj v posameznem členu enačbe lahko sodelujejo vse spremenljivke.

- Že na prvi pogled je očitno, da je tak zapis zelo zahteven za specifikacijo in spreminjanje. Ravno zaradi te hude kompleksnosti, ti polinomi niso priljubljeni.

Na žalost pa imajo vse osnovne polinomske oblike vsaj dve težavi pri zapisu kompleksnejših krivulj.

1. Kompleksnost polinomskega zapisa narašča s kompleksnostjo krivulje. Velja pa tudi, da zahtevnost izračuna narašča eksponentno glede na velikost polinoma. Tako lahko kaj hitro polinom postane neobvladljiv.

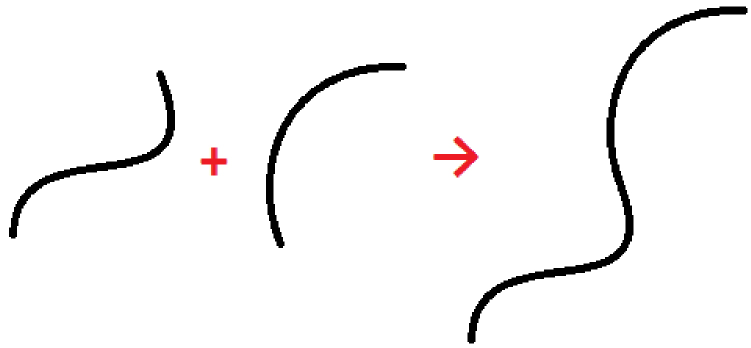
2. Osnoven polinomski zapis ne omogoča lokalne manipulacije (ne izpolnjuje 4. kriterija). Vsaka še tako majhna sprememba polinoma se pozna po vsej dolžini krivulje.

Osnovne polinomske oblike zmorejo opisati in predstaviti krivuljo, ter omogočajo neko osnovno obliko upravljanja. Uporabniki pa pogosto potrebujejo tudi zmožnost lokalnega upravljanja in natančnega prilagajanja krivulj svojim potrebam. Tukaj pa na vrsto pridejo kompleksnejše oblike. Te v svoji osnovi temeljijo na osnovnih polinomskih oblikah, katere nadalje nadgradijo tako, da omogočijo uporabniku enostavno lokalno manipulacijo. Najbolj znane in najpogosteje uporabljane med njimi so **zlepki**.

2.2.1 Odsekoma polinomske krivulje

Osnovna ideja, ki je pripeljala do pojave odsekoma polinomskih krivulj je: "Krivuljo je mogoče opisati po delih". Odsekoma polinomske krivulje so tako razdeljene na kopico delcev (v tem diplomskem delu bodo imenovani *odseki*), od katerih je vsak opisan s svojim polinomom (ter pripadajočo spremenljivko na določenem intervalu) in se stika s prejšnjim in naslednjim sosedom. Slednje seveda ne velja za robne odseke, katerim manjka eden izmed sosedov.

S takšnim opisom krivulje se izgubijo težave osnovnih polinomskih zapisov: Krivuljo je mogoče razdeliti na takšne odseke, da so posamezni polinomi, ki jo sedaj sestavljajo, razmeroma majhni in tako lažje obvladljivi. Hkrati pa se izgubi odvisnost med oddaljenimi odseki, kar omogoči lokalno manipulativnost - zapis krivulje je namreč mogoče spreminjati tako, da sprememba na enem odseku krivulje ne vpliva na ostale, razmeroma oddaljene odseke [6].



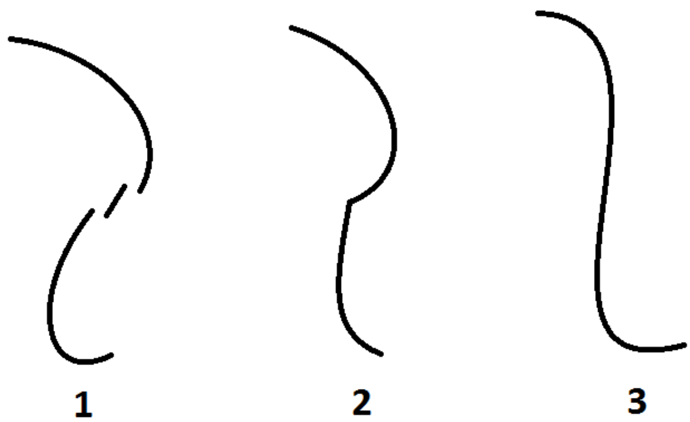
Slika 2.3: Združitev dveh manjših polinomov v večjo krivuljo

2.2.2 Povezanost krivulje

Odsekoma polinomske krivulje v osnovni obliki nimajo nobenih omejitev, ki bi urejale kako se njihovi zaporedni odseki združujejo med seboj. Tako lahko krivulja vsebuje tudi kote ali pa je celo taka, da se njeni odseki sploh ne stikajo med seboj. Take krivulje pa seveda v praksi niso zaželene. Obratno so krivulje, ki bolj ustrezajo naši subjektivni definiciji krivulje (v grobem: so iz ene neprekinjene črte, nimajo kotov in so čim bolj gladke), bolj prijetne na pogled in zato imenovane *lepe*.

Lepota krivulje pa ni izključno subjektivna, saj jo je namreč mogoče popolnoma matematično opisati. Lepoto označuje stopnja povezanosti C_x [16].

Stopnja povezanosti je definirana kot *najvišja stopnja zvezne odvedljivosti vzdolž celotne krivulje* (razen v koncih krivulje).
Če je torej krivulja po vsej svoji dolžini zvezno odvedljiva k-krat, a ne $(k+1)$-krat, se krivuljo označi s *stopnjo povezanosti* C_k. V primeru, da krivulja ni niti zvezna (zvezna odvedljivost stopnje 0), se ta "krivulja" označi kot *nepovezana*.



Slika 2.4: Nezvezna "krivulja" - *nepovezana* (1),
neodvedljiva krivulja - C_0 (2)
in lepa krivulja - $C_{\geq 1}$ (3)

Tako je na primer krivulja, ki je po vsej svoji dolžini zvezno odvedljiva, na prvi pogled lepa, a za izkušeno oko je očitno, da jo krivulja z dvojno zvezno odvedljivostjo po vsej dolžini prekaša v gladkosti in posledično tudi v lepoti. Višjih stopenj povezanosti človeško oko na žalost ne razlikuje dobro, zato se v praksi le redko uporabljajo krivulje z višjo stopnjo povezanosti kot C_2 - uporabniki namreč ne opazijo razlike, zagotavljanje višje povezanosti pa močno poveča računsko zahtevnost pri manipulaciji s krivuljami.

V splošnem je namen in želja vsake manipulacije krivulj, da spremembe ohranjajo stopnjo povezanosti krivulje. Zaradi tega je smiselno omejiti uporabnikove možnosti tako, da lahko posamezno krivuljo preoblikuje le v eno izmed krivulj z enako (ali višjo) stopnjo povezanosti. Pri osnovnih polinomih je to samoumevno, saj krivulja drugače ne more obstajati; pri sestavljenih krivuljah pa je zaradi sposobnosti lokalne manipulacije enako stopnjo povezanosti mnogo težje zagotoviti. Edini način je, da se žrtvuje del popolne lokalnosti manipulacije, tako da se bližnja okolica spremembe lahko prilagodi in ohrani stopnjo povezanosti, a posledično je lastnost manipulacije sedaj lokalna le za določeno bližnje območje. V praksi bližnje območje predstavlja

$p-1$-odsekov krivulje (p je stopnja krivulje) pred in za točko manipulacije in izkaže se, da izguba popolne lokalnosti ni tako težavna, če je le p dovolj majhen ali če krivuljo sestavlja dovolj veliko odsekov, da sprememba ne vpliva na prevelik del krivulje.

2.3 Zlepek

Zlepljena krivulja *(ang. spline curve)* je povezana, odsekoma polinomska krivulja, ki jo sestavljajo zlepki.

Odsek krivulje imenujemo območje med dvema točkama, imenovanima **vozla**. Odseki se med seboj stikajo izključno v sprednjem in zadnjem koncu (to ne velja za odseke na koncih krivulje) in skupaj sestavljajo krivuljo. Ponavadi so sestavljeni iz enega samega zlepka *(npr. hermitski zlepki)* in v teh primerih sta pojma med seboj ekvivalentna. Pri nekaterih pa so združena vrednost več zaporednih zlepkov *(npr. bazni zlepki)*. Velja pa, da je odsek zmeraj mogoče zapisati z enim samim polinomom.
Ta pojem ni del standardne definicije zlepkov in bo v tej diplomski nalogi služil izključno za lažje razumevanje.

Zlepek *(ang. spline)* je funkcija, ki je sestavljena iz enega *(npr. hermitski zlepki)* ali več *(npr. bazni zlepki)* polinomov. V primeru, da ga sestavlja en sam polinom, je zlepek definiran med dvema zaporednima vozloma in ekvivalenten odseku na tem območju. V drugem primeru, kjer ga sestavlja več polinomov, pa se zlepek razteza preko več vozlov in med vsakim parom le-teh ga definira drug polinom.
Najbolj bistveno pa je, da ta funkcija služi kot sestavni del zlepljene krivulje.

Slovensko ime izvira iz besedne igre, da se zlepki "zlepijo" med seboj in tako skupaj ustvarijo zlepljeno krivuljo [19]. Angleško ime pa izvira iz besede "spline", ki je označevala tanke lesene deske, ki so jih ladjedelci ukrivili in ukrivljene zlepili skupaj tako, da so obdržale ukrivljenost. Slednje so nato uporabili pri izgradnji ukrivljenih ladijskih trupov in kasneje tudi pri avtomobilih in letalih ter še pogosteje kot pomoč pri risanju krivulj. A bistven pri tem je koncept, da so uspeli iz majhnih koščkov ustvariti večjo gladko krivuljo.

2.3.1 Osnovna matematična definicija

Zlepljena krivulja je preslikava

$$S : [a, b] \to \mathbb{R},$$
$$S(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i(t),$$

kjer interval $[a, b]$ sestavlja k podintervalov $[t_{i-1}, t_i]$, za katere velja

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_{k-1} < t_k = b,$$

ter $P_i(t)$ označuje i-ti odsek/zlepek, tako da velja

$$\forall i \in \{1, 2, ..., k\} : \quad P_i : [t_{i-1}, t_i] \to \mathbb{R}.$$

Vsi ti zlepki pa zaporedoma gradijo krivuljo (vir [17])

$$\begin{aligned} S(t) &= P_1(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \\ S(t) &= P_2(t), \quad t_1 \leq t \leq t_2, \\ &\vdots \\ S(t) &= P_k(t), \quad t_{k-1} \leq t \leq t_k. \end{aligned}$$

Tako je definirana splošna krivulja brez kakršne koli povezanosti. Slednjo je mogoče zagotoviti z dodatnimi omejitvami.

2.3.2 Lastnosti zlepkov

1. **Zveznost** - tudi C_0 povezanost

$$\begin{aligned} P_1(t_1) &= P_2(t_1), \\ P_2(t_2) &= P_3(t_2), \\ &\vdots \\ P_{k-1}(t_{k-1}) &= P_k(t_{k-1}). \end{aligned}$$

2. **Povezanost stopnje** n

$$\begin{aligned} t+ &:= \lim_{\epsilon \to 0}(t + \epsilon), \\ t- &:= \lim_{\epsilon \to 0}(t - \epsilon), \\ \forall t \in (a, b),\ \forall j \in [1, n] &: \ S(t+)^{(j)} = S(t-)^{(j)}. \end{aligned}$$

3. **Stopnja** ali **red** (označeno s p) zlepka je definirana kot stopnja najvišje-stopenjskega polinoma, ki ga sestavlja.
   Stopnja ali red zlepljene krivulje pa je definirana kot najvišja stopnja zlepka, ki jo sestavlja.

4. Krivulja je **enotna** oziroma **kardinalna**, če so vsi intervali $[t_{i-1}, t_i]$ enake dolžine.

Pogosto tudi zvezne odvedljivosti ni potrebno preverjati v vsaki točki. Če so vsi polinomi zvezno odvedljivi vsaj do stopnje p, je dovolj preveriti le odvedljivost v vozlih, da lahko dokažemo povezanost C_p celotne krivulje:

$$\begin{aligned} \forall j \in \{0, 1, ..., p\} : & \\ P_1(t_1)^{(j)} &= P_2(t_1)^{(j)}, \\ P_2(t_2)^{(j)} &= P_3(t_2)^{(j)}, \\ &\vdots \\ P_{k-1}(t_{k-1})^{(j)} &= P_k(t_{k-1})^{(j)}. \end{aligned}$$

Povsem mogoče in dovoljeno je, da je krivulja sestavljena iz različno stopenjskih zlepkov, a to se v praksi ne dogaja. Mnogo enostavneje je, da so vsi zlepki enake stopnje, saj so tako vsi lahko določeni na enak način. Tako je tudi stopnja krivulje enaka stopnji vsakega izmed zlepkov.

V nadaljevanju te diplomske naloge bo enakost stopenj zlepkov privzeta (p v nadaljevanju ozančuje tudi stopnjo zlepljene krivulje). Kljub temu pa je mogoče skoraj vsako izmed definicij v nadaljevanju ustrezno prilagoditi, da podpira polinome različnih stopenj.

2.3.3 Tipi zlepkov

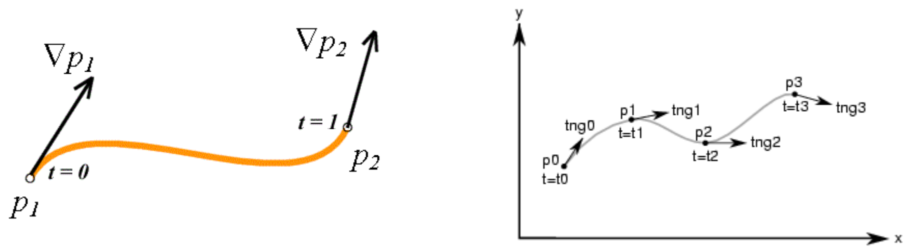
Obstaja veliko različnih tipov zlepkov. Vsak tip v grobem predstavlja svojo podvrsto zlepkov, ki se od drugih razlikujejo po načinu zapisa, po lastnostih ali pa po načinu gradnje krivulje. Posamezen zlepek lahko pripada več različnim tipom in tako pridobi bolj specifične lastnosti, kar običajno omogoči enostavnejšo manipulacijo. V nadaljevanju bo omenjenih nekaj najpogostejših tipov, a potrebno se je zavedati, da jih obstaja še več in obstajajo tudi različice podanih definicij [1].

Hermitski zlepki

Hermitski zlepek je najpreprostejši zlepek s stopnjo povezanosti C_1. V to vrsto zlepkov spada vsak zlepek, ki je definiran le s kombinacijo vozlov, odvodov in višjih odvodov v svojih vozlih. Posamezen zlepek vsebuje le en polinom in popolnoma določa en odsek krivulje.

Takšno krivuljo je tudi zelo enostavno določiti. Vsakega izmed vozlov, z izjemo robnih vozlov, si seveda delita dva zlepka in hkrati z njim si delita tudi vse odvode, definirane v njem. Tako je informacija posameznega vozla uporabljena za določitev dveh odsekov krivulje. Obratno velja, da vsak polinom dobi informacije za svojo določitev iz dveh vozlov. Zato mora biti v vsakem vozlu določena ravno polovica vseh potrebnih informacij za posamezen zlepek, torej $(p+1)/2$ za zlepek stopnje p. Število vozlov je zaradi dodatnega robnega vozla za eno večje od števila zlepkov: n.

Končno: Krivulja je tako popolnoma določena z $\dfrac{(p+1)(n+1)}{2}$ elementi informacij.



(a) Kubični hermitski zlepek

(b) Hermitska kubična krivulja

Slika 2.5: Hermitski zlepek in krivulja

OPOMBA 1: Če je krivulja sklenjena, ne potrebujemo dodatnega vozla in zadošča že $(p+1)n/2$ elementov informacij.

OPOMBA 2: V praksi pogosto uporabljamo zlepke lihe stopnje, saj imajo tako lahko vsi vozli enako količino informacij, ki določajo zlepke. V nasprotnem primeru vsak zlepek zahteva liho število enot informacij, kar pomeni, da sosednja vozla ne moreta biti določena z enako količino informacij (izjemoma je mogoče dovoliti predoločenost, a to ni dobra praksa).

PRIMER: Določitev hermitskega zlepka stopnje 3:

$$zahtevano \begin{cases} v_i & \text{- i. točka} \\ v_{i+1} & \text{- (i+1). točka} \\ o_i & \text{- odvod v i. točki} \\ o_{i+1} & \text{- odvod v (i+1). točki} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} H_i(t) &= \begin{cases} a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \ ; & t_i \le t \le t_{i+1} \\ 0 \ ; & sicer \end{cases} \\ v_i &= H_i(t = t_i) = a_0 \ , \\ v_{i+1} &= H_i(t = t_{i+1}) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \ , \\ o_i &= H_i'(t = t_i) = a_1 \ , \\ o_{i+1} &= H_i'(t = t_{i+1}) = a_1 + 2a_2 + 3a_3 \ . \end{aligned}$$

Tako je posamezen hermitski zlepek popolnoma določen [11]. Krivulja, ki jo sestavlja n hermitskih zlepkov, pa je prav tako povsem preprosta:

$$S(t) = \sum_{i=0}^{n} H_i(t) \ .$$

Bézierjevi zlepki

Bézierjev zlepek je zlepek, katerega zapis je izražen v *Bézierjevi obliki* (z osnovnimi Bernsteinovimi polinomi) [13]. **Bézierjeva krivulja** pa se imenuje krivulja, sestavljena iz množice zaporedno povezanih Bézierjevih zlepkov.

Bézierjev zlepek je sestavljen iz linearnih kombinacij poti med točkami, kar je jasno razvidno iz definicije. Slednja za gradnjo zlepka zahteva množico $p+1$ kontrolnih točk od r_0 do r_p, kjer p označuje stopnjo tega zlepka. Robni točki označujeta začetek oziroma konec zlepka in sta edini točki, ki nujno ležita na njem. Vsem ostalim pa se zlepek le približa.
Rekurzivna definicija Bézierjevega zlepka [15] se glasi:

$$\begin{aligned} B_{r_0}(t) &= r_0, \ \ t \in [0,1] \ , \\ B_{r_0 r_1 \ldots r_n}(t) &= (1-t) B_{r_0 r_1 \ldots r_{n-1}}(t) + t B_{r_1 r_2 \ldots r_n}(t), \ \ t \in [0,1] \ . \end{aligned}$$

Gradnjo Bézierjevega zlepka si je mogoče dokaj enostavno predstavljati s pomočjo premičnih točk, ki potujejo vzdolž daljic in spotoma rišejo krivuljo.

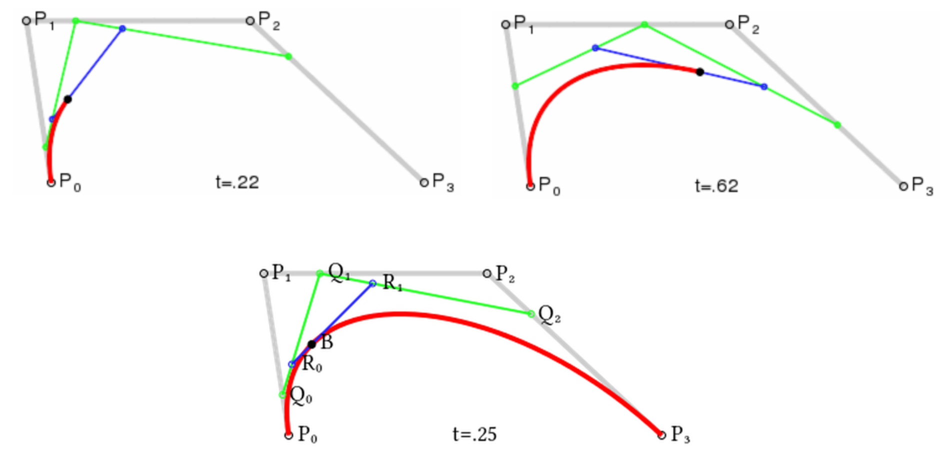
Z izrazom, da premična točka "nariše" krivuljo, je mišljeno, da je pot, po kateri točka potuje, celotna in polna zaloga vrednosti Bernsteinovega polinoma, ki določa zlepek. Torej ta točka zmeraj obstaja le na tem zlepku.
Za pomoč pri razumevanju glej sliko 2.6.

1 Najosnovnejši linearen (red 1) Bézierjev zlepek izgleda kot daljica in ga nariše premična točka, ki potuje od prve kontrolne točke do druge (to sta hkrati tudi robni točki, zato se zlepek v eni prične in v drugi konča).

2 Kvadraten (red 2) Bézierjev zlepek je malo bolj kompleksen, ker vsebuje še eno kontrolno točko in je za razliko od linearnega dejansko ukrivljen. Njegovo gradnjo si je mogoče predstavljati s pomočjo dveh dodatnih premičnih točk, kjer prva potuje od prve kontrolne točke do druge, druga pa od druge kontrolne točke do tretje. Premična točka, ki dejansko ustvari krivuljo pa sočasno potuje vzdolž daljice, ki je razpeta med prvi dve premični točki. Ta daljica je posledično tangentna na krivuljo v vsaki točki in ker spreminja svoj položaj zaradi premikanja prvih dveh premičnih točk ustvari ukrivljenost zlepka.

n Rekurzivna definicija nadaljuje pravilo tudi pri višjih stopnjah, le da je tokrat več premikajočih se daljic. Točka, ki nariše zlepek, potuje po daljici, ki je razpeta med dve potujoči točki, ki sta vsaka na svoji daljici. Nadalje je vsaka od teh daljic razpeta med dve točki, ki drsita vsaka po svoji daljici. Vzorec se rekurzivno nadaljuje vse do zadnjih točk, ki so nepremične kontrolne točke.

Bézierjevi zlepki se uporabljajo v enakih situacijah kot vsi ostali zlepki. Poleg tega pa jih njihov poseben način gradnje naredi idealne za uporabo v animacijah. S spreminjanjem ene same spremenljivke je mogoče doseči, da se točka premika po določeni krivulji (seveda ni nujno, da točka za sabo pušča sled tako kot na sliki 2.6).



Slika 2.6: Postopek generiranja Bézierjevega zlepka (zgoraj)
Dokončan zlepek (spodaj) [15]

Kubični zlepki

Kubični zlepek je vsak zlepek reda 3.

To pomeni, da je vsak polinom, ki ga sestavlja, popolnoma določen s 4 enotami informacij. Slednje so lahko točke, skozi katere gre ali pa se jim le približa, odvodi in višji odvodi v izbranih točkah, ipd. Glavno je, da uporabnik vsakemu polinomu priredi 4 enote informacij, če želi da je zlepek natančno in enolično določen.

Ta tip zlepkov je posebej popularen zaradi prej omenjenega razmerja med lepoto zlepka in majhno kompleksnostjo. Je namreč najnižji tip, ki omogoča povezanost C_2 ter ima hkrati še zmeraj relativno preprost zapis.

Pogosto sta v uporabi tudi imeni za zlepke reda 1 - *linearni zlepki* - in za zlepke reda 2 - *kvadratni zlepki.*

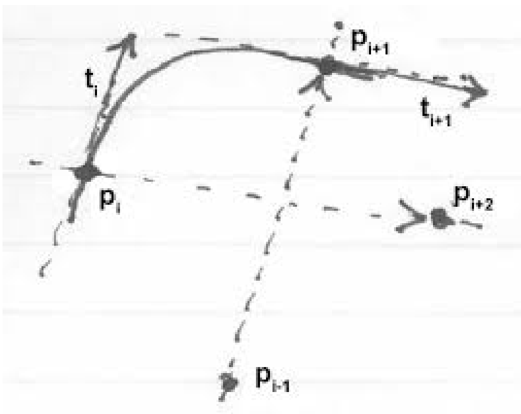
Catmull-Rom zlepki

Hermitski zlepek ima veliko praktično pomanjkljivost. Pri določanju zlepka so namreč udeležene hkrati točke in odvodi, zato zna določanje teh zlepkov postati utrudljivo. Catmull-Rom zlepek reši to težavo tako, da definicijo popolnoma prenese na točke. Odvodi sedaj niso več potrebni [11].

Catmull-Rom zlepek je posebna vrsta kubičnega zlepka. Za svojo določitev krivulja potrebuje $n+2$ točki, kjer je n število zlepkov, ki jo sestavljajo. Ideja definicije je podobna definiciji hermitskih zlepkov, z izjemo da se v tem primeru odvod v vozlu i določi kot naklon navidezne premice skozi vozla $i-1$ in $i+1$. Skozi robna vozla zlepek ne gre in ta dva obstajata samo zaradi določanja odvodov na robovih zlepka. Ker je Catmull-Rom zlepek tudi kubični zlepek, je en odvod v vsakem vozlu skozi katerega potuje, dovolj.

Stroga določenost odvoda v vozlih pa dejansko pripomore h lepoti zlepka, saj zagotovi povezanost C_1. Poleg te pa ima Catmull-Rom zlepek še eno zelo uporabno lastnost: krivulja gre skozi vse podane vozle (razen skrajnih dveh). Tako je Catmull-Rom krivuljo mogoče uporabiti tudi za interpolacijo točk.

Interpolacija je postopek prireditve funkcije množici točk tako, da vse točke ležijo na tej funkciji. Pri tem je po sistemu Ockhamove britve zaželjeno, da je funkcija čim preprostejša.



Slika 2.7: Način generiranja Catmull-Rom in napetostnih zlepkov (vir [11])

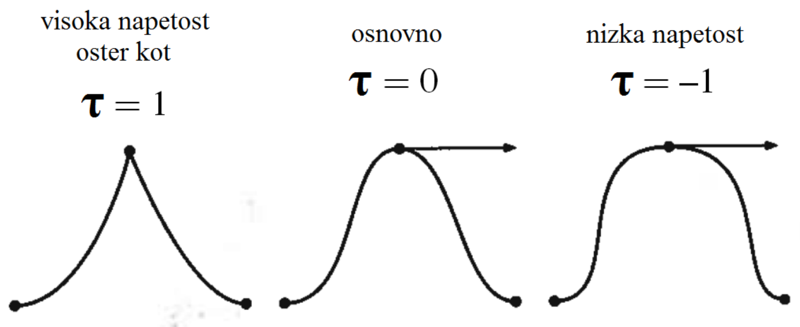
Določitev Catmull-Rom zlepka je v grobem enaka določitvi Hermitskega zlepka:

$$zahtevano \begin{cases} v_i & \text{- i. točka} \\ v_{i+1} & \text{- (i+1). točka} \\ & \text{... (odvisno od stopnje)} \end{cases}$$

Le da so odvodi, ki morajo pri Hermitskih zlepkih podani, tukaj izračunani:

$$o_i = v_{i+1} - v_{i-1} \ ,$$
$$o_{i+1} = v_{i+2} - v_i \ ,$$
$$\text{... (odvisno od stopnje).}$$

Napetostni zlepki
Ta vrsta zlepkov je posplošitev Catmull-Rom zlepkov z napetostnim parametrom τ, ki določi napetost krivulje [11]. Vrednost $\tau > 0$ stisne krivuljo bliže vozlom, vrednost $\tau < 0$ pa jo v okolici vozla bolj sprosti. Pri vrednosti $\tau = 0$ pa napetostni zlepek postane Catmull-Rom zlepek.



Slika 2.8: Napetost napetostnega zlepka glede na parameter τ

Popravki pri izračunih odvodov za napetostne zlepke:

$$o_i = \tau(v_{i+1} - v_{i-1}) \ ,$$
$$o_{i+1} = \tau(v_{i+2} - v_i) \ ,$$
$$\text{... (odvisno od stopnje).}$$

B-zlepki
B-zlepki so posplošitev Bézierjevih zlepkov. Dodan imajo seznam vozlov, ki dodatno ureja gradnjo krivulje. S tem pa so pridobili tudi cel kup zanimivih lastnosti, ki bodo obdelani v naslednjem poglavju.

NURBS
Kratica označuje *Non Uniform Rational B-Spline* kar v prevodu pomeni *neenakomeren racionalen bazni zlepek.* Seveda je NURBS generalizacija B-zlepka in ima nekatere dodatne lastnosti, ki mu omogočajo večjo uporabnost pri nekaterih nalogah, ki zahtevajo, da krivulja ponekod postane bolj ostra in stisnjena. NURBS je eden najbolj uporabljanih tipov zlepkov pri CAD modeliranju.
Lastnost neenakomernosti dovoljuje, da so odseki krivulje lahko poljubno lokalno raztegljivi, ne da bi bistveno vplivali na ostali del krivulje.

Lastnost racionalnosti pa omogoča, da se zlepek bolj stisne/približa določenim kontrolnim točkam. Količina približanja določeni točki je določena relativno na količino približanja ostalim točkam, kakor je razvidno iz spodnje definicije krivulje. Ta vrednost približanja za zlepek i je v bistvu utež, ki jo določa dodatna spremenljivka w_i.

NURBS krivulja je definirana z enačbo:

$$S(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(t) r_i w_i}{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(t) w_i} ,$$

kjer je $N_{i,p}(t)$ običajen B-zlepek (definicija v poglavju 4.2).

Več o teh krivuljah si je mogoče prebrati v knjigi [8] in članku [7].

Poglavje 3

Kardinalni B-zlepki

3.1 Vozli

Definiranje vozlov kot koordinatne točke, kjer se stikajo polinomi, ni več potrebno. Povsem zadošča že seznam števil na določenem kompaktnem intervalu, ki določajo kje na krivulji se posamezni vozli nahajajo. Položaj posameznega števila na intervalu sovpada s položajem vozla na krivulji. V nadaljevanju bo pri B-zlepkih zabrisana razlika med vozlom, določenim s koordinatami kot dejanska točka stičišča polinomov na grafu, in vozlom, zapisanim kot razmerje med oddaljenostjo od robov krivulje. Oba zapisa določata isti vozel in tato je mogoče dokaj enostavno pretvoriti enega v drugega. Natančnejša definicija zapisa z razmerji pa je tukaj zelo odprta in se lahko razlikuje med implementacijami, a najpogosteje so vozli zapisani kot *nepadajoče zaporedje števil*: $U = \{u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq ... \leq u_m\}$. Običajno so takšni zapisi poravnani na cela števila ali pa so omejeni na interval $[0, 1]$, kjer nadalje sledi $u_0 = 0$ in $u_m = 1$.

Tukaj je razmerje velikosti odsekov krivulje skrito v razliki med posameznima vozloma, kar omogoča preprost izračun dolžine posameznega odseka.

Takšna definicija dovoljuje tudi *t.i. večkratne vozle*, kjer je razlika med sosednjima vozloma enaka 0, vsi ostali pa so *preprosti vozli.*

V primeru da so razdalje med vozli enake in so posledično vsi odseki krivulje med seboj enako veliki, se zlepki imenujejo **kardinalni B-zlepki** [10].

3.2 Osnovni B-zlepki

Cox-de Boor-ova rekurzivna formula za definicijo B-zlepka potrebuje seznam vozlov U, ter še en parameter, *stopnjo zlepka*, označeno s p (vir [2],[5]).

i-ti B-zlepek je tako definiran:

$$N_{i,0}(x) = \begin{cases} 1\ ; & u_i \leq x < u_{i+1} \\ 0\ ; & sicer \end{cases} \quad ,$$

$$N_{i,p}(x) = \frac{x - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(x) + \frac{u_{i+p+1} - x}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(x).$$

Torej, če je stopnja nič ($p = 0$), so zlepki v bistvu *enotske funkcije* za izbrani interval med dvema sosednjima vozloma.

Primer: $N_{1,0} = 1$ na intervalu $[1, 2)$ in 0 povsod drugod.

Slika 3.1: B-zlepki stopnje 0

Za izračun zlepkov višjih stopenj se uporabi rekurzivna shema, tako da se iz dveh zlepkov nižje stopnje zgradi višjestopenjski zlepek. Slednji je tako definiran na uniji območij obeh zlepkov, ki ga sestavljata, kot utežena vsota istoležnih polinomov teh dveh zlepkov, ter povsod drugje z vrednostjo 0.

Primer: Generiranje prvega 1-stopenjskega ($p = 1$) B-zlepka pri enostavnih vozlih $U = \{0, 1, 2, 3\}$. Tak zlepek ima formulo:

$$N_{0,1}(x) = \frac{x - u_0}{u_1 - u_0} N_{0,0}(x) + \frac{u_2 - x}{u_2 - u_1} N_{1,0}(x) \ ,$$

ter z vstavljenimi vozli:

$$N_{0,1}(x) = xN_{0,0}(x) + (2 - x)N_{1,0}(x) \ .$$

Rezultat je zlepek stopnje 1, ki ima podobo strehe.

Slika 3.2: Sestavljen zlepek stopnje 1 iz zlepkov na sliki 3.1

Primer: B-zlepek stopnje 2 se zgradi na podoben način. Iz definicije pride za prvi 2-stopenjski zlepek pri enostavnih vozlih $U = \{0, 1, 2, 3\}$ naslednja enačba:

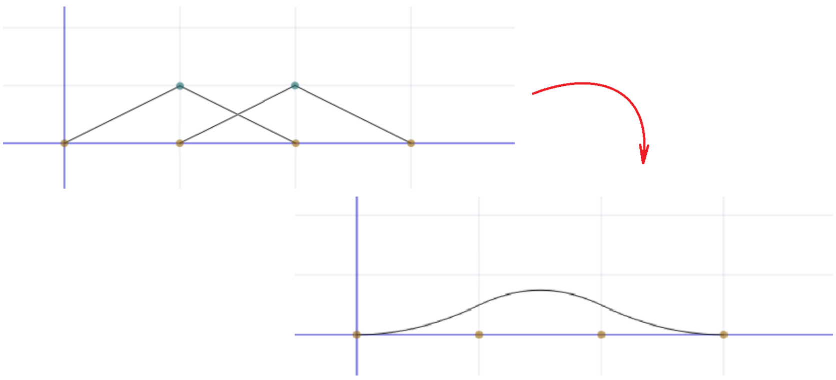
$$N_{0,2}(x) = \frac{x - u_0}{u_2 - u_0} N_{0,1}(x) + \frac{u_3 - x}{u_3 - u_1} N_{1,1}(x) \ ,$$

ter z vstavljenimi vozli:

$$N_{0,2}(x) = 0.5x N_{0,1}(x) + 0.5(3 - x) N_{1,1}(x) \ .$$

Rešitev te enačbe so 3 zaporedni polinomi, ki sestavljajo B-zlepek:

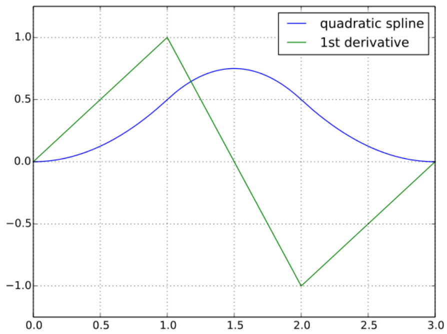
- $x \in [0, 1]$: $N_{0,2}(x) = 0.5x^2$
- $x \in [1, 2]$: $N_{0,2}(x) = 0.5x(-3 + 6x - 2x^2)$
- $x \in [2, 3]$: $N_{0,2}(x) = 0.5(3 - x)^2$



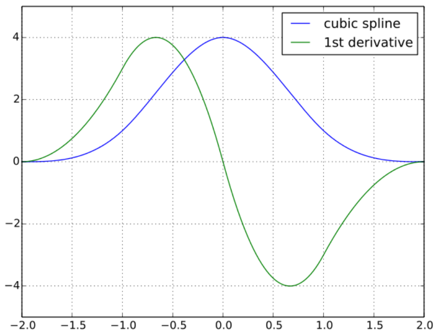
Slika 3.3: Postopek sestavljanja zlepka stopnje 2

Pri zlepku stopnje 2 se končno prikaže ukrivljenost. Ta ima stopnjo povezanosti C_1 - je zvezen in enkrat zvezno odvedljiv v vsaki točki.

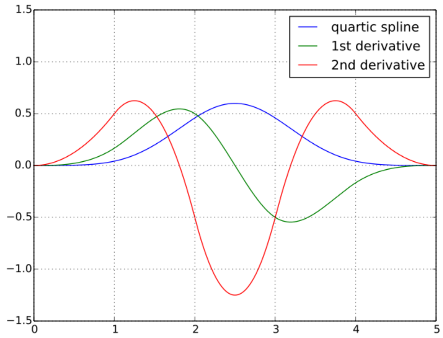
Višji B-zlepki se gradijo po istem sistemu. Vsak naslednji pa ima za 1 višjo stopnjo povezanosti, a hkrati je (predvsem zaradi rekurzivne gradnje) bolj zahteven za izračun in uporabo.



(a) B-zlepek stopnje 2



(b) B-zlepek stopnje 3



(c) B-zlepek stopnje 4

Slika 3.4: B-zlepki višjih stopenj in njihovi odvodi [14]

3.3 Kardinalnost

Kardinalnost označuje lastnost B-zlepkov, da imajo ekvidistantne vozle. To v grobem pomeni, da se vsi polinomi enako odzivajo na lokalno manipulacijo in so posledično mnogo prijetnejši za upravljanje. Dodatna dobrodošla posledica je tudi ta, da postane vektor vozlov nepotreben. Popolnoma dovolj je namreč le še število vozlov oziroma število polinomov.

3.4 Definicija

Definicija kardinalnih B-zlepkov je v bistvu le poenostavljena definicija osnovnih B-zlepkov, kjer je p stopnja zlepka [3], [14]:

$$N_{i,0}(x) = \begin{cases} 1\ ; & 0 \leq x < 1 \\ 0\ ; & sicer \end{cases} \quad ,$$
$$N_{i,p}(x) = \int_0^1 N_{i,p-1}(x-t)dt, \quad p > 1\ .$$

Različni zlepki iste stopnje so tako le zamaknjene kopije drug drugega. Če v nadaljevanju pri zlepku ne bo zapisane zaporedne številke zlepka i, se obravnava nanaša na vse zlepke določene stopnje.

3.5 Lastnosti

Kardinalni B-zlepek podeduje skoraj vse lastnosti B-zlepka, razen seveda možnosti spreminjanja razdalje med vozli. A zato pa pridobi nove, včasih še uporabnejše lastnosti - niso namreč zaman najpogosteje uporabljani zlepki.

Nekatere izmed pomembnejših lastnosti [18] so:

1. Zlepek $N_p(x)$ je neničeln na odprtem intervalu $(0, p)$.
2. $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} N_p(x-k) = 1$ za vse x.
3. Zlepek $N_p(x)$ je simetričen pri $x = \dfrac{p}{2}$, torej velja $N_p(\dfrac{p}{2}-x) = N_p(\dfrac{p}{2}+x)$.
4. Odvod zlepka je $N_p'(x) = N_{p-1}(x) - N_{p-1}(x-1)$.
5. $\int_{-\infty}^{\infty} N_p(x)dx = 1$.

Poglavje 4

Krivulje v računalniku

Zapis in shranjevanje krivulje v računalniku je v globino razdelalo prvo poglavje. Toda sam zapis je potrebno grafično prikazati, da si uporabnik lahko izgled krivulje tudi ogleda. Polinomski zapis izpostavi veliko uporabnih lastnosti krivulje, a vizualna predstavitev ni ena izmed njih.

4.1 Risalna površina

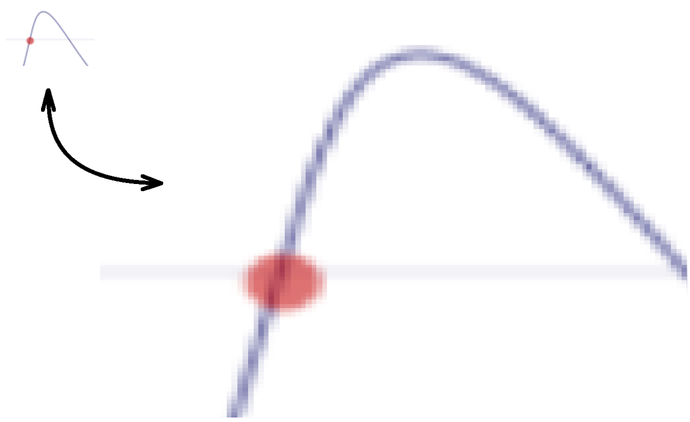
Območje za risanje se imenuje *kanvas (ang. canvas)* in označuje prostor na zaslonu, kjer lahko obstaja vizualna reprezentacija krivulj. Kot prvo je potrebno na kanvasu določiti koordinatni sistem, ki zajema koordinate in izhodišče. S tem se ustvari referenca za gibanje in obliko krivulje. Vsaki točki na kanvasu je sedaj mogoče prirediti enolične koordinatne vrednosti.

Potrebno se je zavedati, da čeravno je govora o točkah in črtah na kanvasu, so v praksi vsi ti objekti predstavljeni z njihovimi dvodimenzionalnimi različicami. Točka je na kanvasu predstavljena z majhnim polnim krogom, omejena ravna črta pa z zelo ozkim polnim pravokotnikom. Na dvodimenzionalnem kanvasu so namreč predstavljivi le dvodimenzionalni objekti.

4.2 Diskretizacija

Objekt v vektorski reprezentaciji ima lahko neskončno natančnost. Toda zaradi diskretnosti pikslov, ki sestavljajo kanvas, tega objekta ni mogoče predstaviti v neskončni natančnosti. Tu pride na vrsto postopek diskretizacije, kjer se zvezen zapis v vektorski reprezentaciji spremeni v diskreten zapis. Postopek je preprost: Za vsak piksel je mogoče določiti odstotek koliko piksla leži znotraj izbranega lika in na podlagi tega odstotka se pikslu priredi ustrezna barva. To je potrebno izračunati za vse piklse, ki vsaj delno ležijo na liku, in rezultat je vizualna predstavitev lika s piksli. Več kot je pikslov na kanvasu in na ekranu, bolj zvezen in posledično tudi gladek izgleda predstavljeni lik, kar pa je velikega pomena pri predstavitvi krivulj.

Na primer: Piksel, ki v celoti leži na črnem pravokotniku daljice, bo popolnoma črne barve. Piksel, skozi katerega teče rob daljice, pa bo sive barve ob predpostavki, da je ozadje bele barve. Odtenek sive barve pa je odvisen od količine piksla, ki leži znotraj lika. V primeru, da se v pikslu stika več likov, pa je seveda barva piksla uteženo povprečje vseh barv, ki ga sestavljajo.

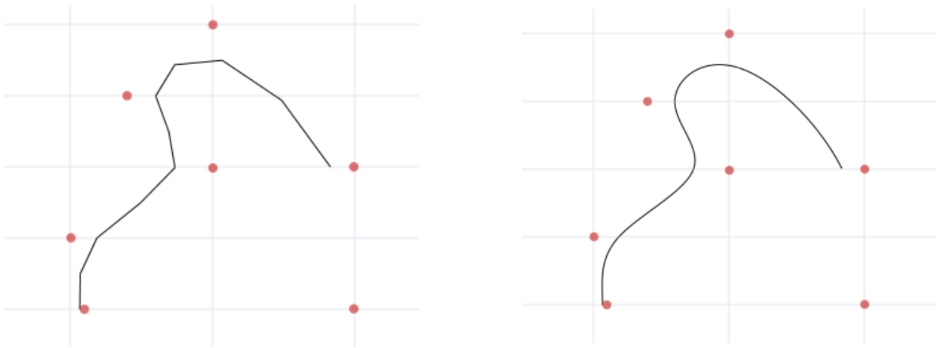


Slika 4.1: Diskretizacija krivulje

4.3 Daljice

Najpreprostejša omejena krivulja je seveda daljica in posledično tudi najlažje predstavljiva. Za svojo definicijo potrebuje le dve točki in podano debelino. Tak pravokotnik ima enostavno predstavitev in ga je posledično tudi enostavno opisati s piksli. Mnogi grafični programi imajo vgrajene funkcije za risanje daljic ravno zaradi enostavnosti in pogostosti risanja ravnih črt. Krivulja pa po drugi strani ni tako preprosta, zato jo je narisati veliko težje.

Pogosto se za opis kompleksnejših elementov uporablja preprostejše. In tako je mogoče storiti tudi pri krivuljah. Posamezno krivuljo se v praksi opiše z množico majhnih daljic in nato vsako daljico nariše na kanvas. Več kot je teh daljic, manj so opazni prelomi v njihovih stičiščih, a hkrati je risa-



(a) Majhno število daljic (b) Veliko število daljic

Slika 4.2: Narisane krivulje z različnim številom daljic

nje krivulje zahtevnejše. Potrebno je najti neko sprejemljivo razmerje med gladkostjo narisanega in računsko zahtevnostjo.

Poglavje 5

Krivulje iz kardinalnih B-zlepkov

5.1 Lokalna manipulacija

Kakor že omenjeno, lokalna manipulacija omogoča spreminjanje manjšega dela krivulje, ne da bi spremembe vplivale na bolj oddaljene dele. Pri kardinalnih B-zlepkih je najmanjši samostojen del kar posamezen polinom zlepka. Načinov za majhno spremembo polinoma je sicer kar nekaj, a način, ki najenotneje spremeni celoten polinom, je **utežitev polinoma** - množenje celotnega polinoma z določeno spremenljivko, ki se imenuje tudi *utež*. Ta v grobem določa kako močno bo v gradnji zlepka izpostavljen vpliv tega polinoma. Večja kot je utež, bolj pride vpliv tega polinoma do izraza.

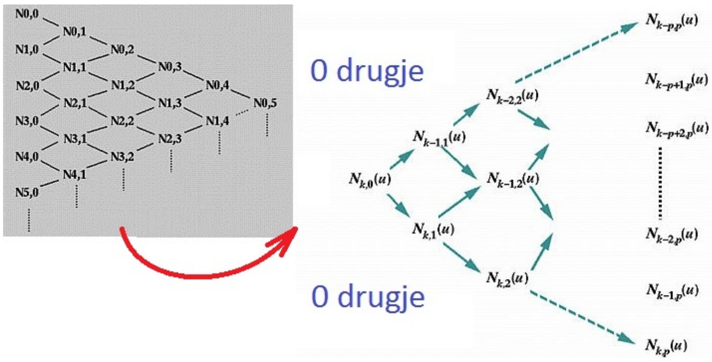
Utež je ponavadi upodobljena na kanvasu v bližini pripadajočega polinoma kot t.i. **kontrolna točka**. Premikanje te točke omogoča uporabniku zelo enostavno lokalno manipulacijo z zlepkom.

Dodajanje kontrolne točke r_i za vsak B-zlepek $N_{i,p}(t)$ končno omogoči definicijo krivulje (vseh) B-zlepkov:

$$S(t) = \sum_{i=0}^{n} r_i N_{i,p}(t) \ .$$

5.2 Redefiniranje

De Boor-ov osnovni algoritem je enostaven in preprost za razumevanje, a zelo nepraktičen za uporabo. Postopek zahteva rekurziven izračun vseh vrednosti zlepkov nižje stopnje za vsako izbrano točko in nekatere izmed teh je potrebno izračunati celo večkrat. Za izračun vrednosti krivulje v točki t_0: $S(t_0)$ je potrebno za $\forall\ k = p,\ p-1,\ \ldots\ 1,\ 0$ izračunati vse vrednosti zlepkov $N_{i,k}(t_0)$, ki so neničelni v tej točki. In vse to je potrebno za izračun vrednosti v le eni sami točki. To je izredno računsko potraten način.



Slika 5.1: Gradnja koeficientov

Namesto, da se rekurzivno računajo vrednosti nižjih zlepkov, je smiselno enkrat za vselej izračunati vse zlepke neodvisno od t, ki bodo v uporabi pri gradnji izbrane krivulje. Izračun je sicer mnogo kompleksnejši, a potrebno ga je narediti le enkrat. Vse izračunane vrednosti je smiselno shraniti, saj skupaj vsebujejo potrebno in zadostno količino informacij za gradnjo krivulje.

5.3 Matrična predstavitev

Vsak polinom je popolnoma predstavljen z zaporedjem svojih koeficientov; vektor $[a_0\ a_1\ a_2\ a_3]$ je predstavitev polinoma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$. Kombinacijo polinomov pa je mogoče zapisati z matriko M velikosti $p \times p$ in vektorjem uteži posameznih polinomov $\vec{R}$, ki določajo koliko prispeva vsak polinom h gradnji odseka:

$$s = M\vec{R} = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 & \dots \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & \dots \\ \vdots & & & \vdots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Vsak odsek krivulje je določen z največ p osnovnimi polinomi, saj imajo vsi ostali polinomi na izbranem območju vrednost nič. Neničelni polinomi so deli različnih zlepkov, ki so neničelni na tem odseku, in so uteženi s kontrolnimi točkami teh zlepkov. Združeno tvorijo posamezen odsek krivulje.

Kakor že prej omenjeno, so vsi kardinalni zlepki iste stopnje enaki in posledično so enaki tudi njihovi polinomi. Edini podatek, ki razlikuje zlepke med seboj, so pripadajoče kontrolne točke. Tako je mogoče ustvariti enolično matriko M_p, ki na enoten način opisuje vpliv vseh zlepkov. Za izračun vsakega odseka pa je potrebno tej matriki pristaviti še vektor kontrolnih točk neničelnih zlepkov. Ta definicija je povsem ekvivalentna De Boor-ovi.

Več o matričnem zapisu glej [4] in [12].

PRIMER: Generiranje matrike kardinalnega kubičnega B-zlepka
Na območju $[i, i+1]$ so relevantni polinomi:

$$\begin{aligned}
y_{i-1}(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \ , \\
y_i(x) &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \ , \\
y_{i+1}(x) &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 \ , \\
y_{i+2}(x) &= d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3 \ .
\end{aligned}$$

Ti za svojo definicijo potrebujejo 16 (4×4) podatkovnih enot, ki jih je mogoče dobiti z reševanjem omejitvenih enačb. Naslednjih 15 enačb skupaj zagotavlja povezanost C_2.

$$\begin{array}{ccc}
\underline{C_0} & \underline{C_1} & \underline{C_2} \\
0 = y_{i-1}(0) & 0 = y'_{i-1}(0) & 0 = y''_{i-1}(0) \\
y_{i-1}(1) = y_i(0) & y'_{i-1}(1) = y'_i(0) & y''_{i-1}(1) = y''_i(0) \\
y_i(1) = y_{i+1}(0) & y'_i(1) = y'_{i+1}(0) & y''_i(1) = y''_{i+1}(0) \\
y_{i+1}(1) = y_{i+2}(0) & y'_{i+1}(1) = y'_{i+2}(0) & y''_{i+1}(1) = y''_{i+2}(0) \\
y_{i+2}(1) = 0 & y'_{i+2}(1) = 0 & y''_{i+2}(1) = 0
\end{array}$$

Za popolno določenost pa je potrebna še ena enačba. Določimo kar enačbo

$$1 = y_{i-1}(0) + y_i(0) + y_{i+1}(0) + y_{i+2}(0),$$

ki zagotavlja preprosto normalizacijo. Izkaže se celo, da ta normalnost velja za vsak $u \in [0, 1]$.

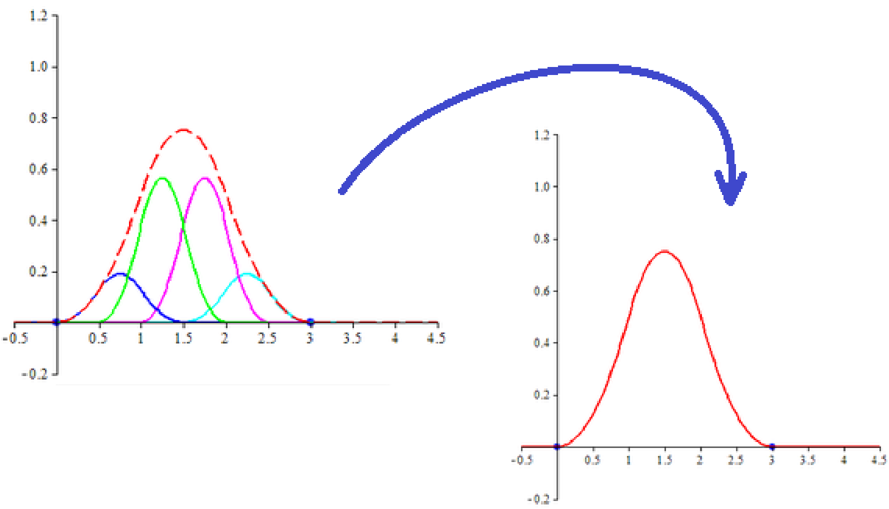
Te omejitve določijo vseh 16 koeficientov:

$$
\begin{aligned}
y_{i-1}(x) &= \frac{1}{6}x^3 \ , \\
y_i(x) &= \frac{1}{6}(1 + 3x + 3x^2 - 3x^3) \ , \\
y_{i+1}(x) &= \frac{1}{6}(4 - 6x^2 + 3x^3) \ , \\
y_{i+2}(x) &= \frac{1}{6}(1 - 3x + 3x^2 - x^3) \ .
\end{aligned}
$$

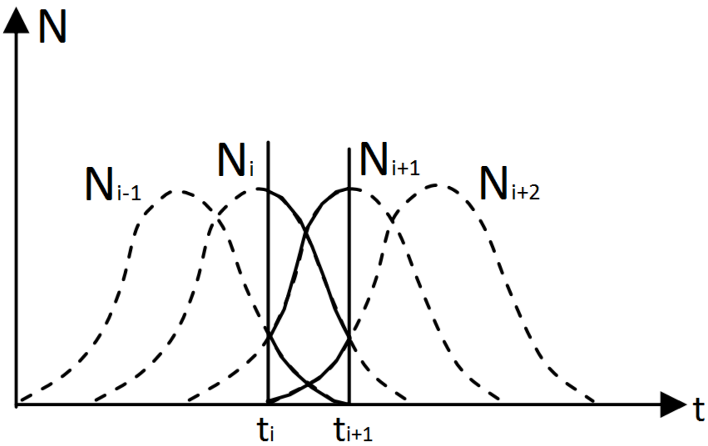
In matrika koeficientov izgleda takole:

$$
M_3 = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \ .
$$

S pomočjo te matrike je mogoče elegantno zgraditi krivuljo za vsak odsek med dvema vozloma. Slika 5.3 prikazuje sestavljanje odseka med vozloma i in $i + 1$. Vsak izmed štirih zlepkov, ki so neničelni na tem odseku, ima na tem odseku točno en polinom. Vrednosti teh štirih polinomov se uteženo seštejejo (glede na kontrolne točke zlepkov, ki jim pripadajo) in rezultat je dokončno določen odsek krivulje.



Slika 5.2: Seštevanje polinomov ustvari nov polinom



Slika 5.3: Polinomi zlepkov, ki se seštejejo v posamezen odsek krivulje (brez uteži)

Enačba odseka s_i med vozloma i in $i+1$ se glasi:

$$
\begin{aligned}
s_i(x) = & \\
&= r_{i-1}N_{i-1,3}(x) + r_iN_{i,3}(x) + r_{i+1}N_{i+1,3}(x) + r_{i+2}N_{i+2,3}(x) \\
&= r_{i-1}y_{i+2}(x) + r_iy_{i+1}(x) + r_{i+1}y_i(x) + r_{i+2}y_{i-1}(x) \\
&= \sum_{j=i-1}^{i+2} r_j y_{4-j}(x) \ .
\end{aligned}
$$

Iz slike 5.3 in enačbe odseka s_i je razvidno, da h enačbi odseka prispevajo: zadnji polinom prvega izmed štirih zlepkov, predzadnji polinom drugega zlepka, ... in prvi polinom zadnjega zlepka. Osnovna formula sicer ustvari polinome vseh zlepkov na enak način, a vsak zlepek je lahko utežen z različno utežjo, kar ga naredi različnega od ostalih. Upoštevajoč obratno zaporedje uporabe posameznih polinomov zlepkov pri gradnji krivulje, je potrebno popraviti tudi matriko koeficientov [4].

Stolpcem je potrebno le zamenjati vrstni red in to se doseže s prezrcaljenjem matrike M_3 preko navpične osi. Nova matrika M_3 je tako:

$$
M_3 = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \ .
$$

Odsek s_i med vozloma i in $i+1$ je sedaj mogoče izračunati tudi s pomočjo matrike:

$$s_i(x) = XM_3\vec{R} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{i-1} \\ r_i \\ r_{i+1} \\ r_{i+2} \end{bmatrix} .$$

Splošno

Zapis krivulje z matriko M je mogoče posplošiti na zlepke katere koli stopnje.

Matrika za krivuljo stopnje p je velikosti $(p+1)$ krat $(p+1)$ in člen $M_{i,j}$ je zapisan z enačbo:

$$M_p = \begin{bmatrix} M_{i,j} \end{bmatrix} = \left[\frac{1}{p!} \binom{p}{i} \sum_{m=j}^{p} (p-m)^i (-1)^{m-j} \binom{p+1}{m-j} \right] ,$$

kjer je $\binom{i}{j}$ binomski koeficient: $\binom{i}{j} = \dfrac{i!}{j!(i-j)!}$.

S $p+1$ kontrolnimi točkami v vektorju

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} R_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_i, r_{i+1}, \ \dots \ r_{i+p} \end{bmatrix}^T$$

in vektorjem potenciranih vrednosti

$$X = \begin{bmatrix} 1, x, x^2, \ \dots \ x^p \end{bmatrix}$$

je tako mogoče izračunati posamezen odsek zlepljene krivulje:

$$s_i(x) = XM_p\vec{R} \ .$$

Krivuljo vsake stopnje kardinalnih B-zlepkov je tako mogoče izračunati in narisati zelo preprosto. Najzahtevnejši del je izračun matrike, a na srečo se le-ta nikdar ne spreminja, zato jo je potrebno izračunati le enkrat za risanje vseh nadaljnjih krivulj.

$$M_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrika krivulje stopnje 1

$$M_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 9 & -3 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Matrika krivulje stopnje 2

$$M_3 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrika krivulje stopnje 3

$$M_4 = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 625 & -655 & 155 & -5 & 0 \\ -500 & 780 & -300 & 20 & 0 \\ 150 & -330 & 210 & -30 & 0 \\ -20 & 60 & -60 & 20 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrika krivulje stopnje 4

Slika 5.4: Izračunane matrike krivulj najpogostejših stopenj

5.4 Konca krivulje

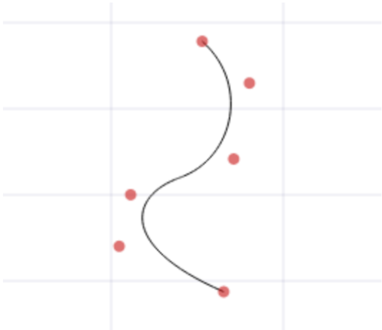
Očitno je, da do sedaj naštete definicije ne morejo veljati za konce krivulj. Tam namreč primanjkuje zlepkov, ki bi jih lahko združili v odseke zlepljene krivulje. Po definiciji odsek krivulje potrebuje p zlepkov oziroma p polinomov, vsakega iz svojega zlepka, pri čemer je p stopnja krivulje; tega pa ni mogoče zagotoviti na koncih krivulje. Tako je nujno prilagoditi definicijo tudi za robne primere.

Najpogosteje uporabljan način je kar ta, da na odsekih med vozli u_0 in u_{p-1} ter med u_{k-p+2} in u_{k+1} (na vektorju vozlov $U = \{u_0, u_1, ...u_k, u_{k+1}\}$, kjer je k število zlepkov v krivulji), krivulja preprosto ni definirana, oziroma ima vrednost nič.

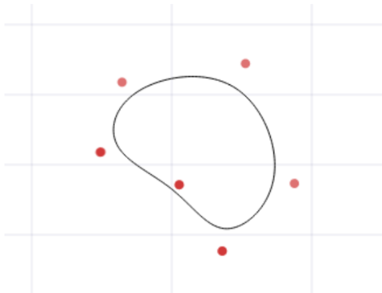
Definicija krivulje

i-ti odsek krivulje: $s_i(x)$ stopnje p je definiran v prejšnjem poglavju. Krivulja pa je preprosto združitev/vsota teh odsekov (C_2 povezanost sledi iz definicije):

$$S(x) = \sum_{i=p-1}^{k-p+1} s_i(x) \ .$$



(a) Zduževanje robih vozlov



(b) Sklenitev koncev krivulje

Slika 5.5: Triki za urejanje koncev krivulje

Trik

Krivulja lahko sploh ne obstaja, če ni določenih dovolj vozlov in posledično zlepkov. Da pa se uporabnik izogne definiranju "dodatnih" vozlov na robovih, ki na pogled ne vplivajo bistveno na izgled krivulje, obstaja preprost trik: *Prvi in zadnji vozel se preprosto ponovita* $p-1$*-krat, uteži/kontrolne točke dodatnih zlepkov "med temi vozli" pa se določijo na* 0. Iz matematične definicije odsekov je razvidno, da ti dodatni zlepki ne vplivajo na gradnjo odsekov, ki so tako določeni le s kombinacijo zlepkov, ki so bili že poprej definirani na tem območju.

Ta preprost trik odstrani potrebo po določevanju dodatnih vozlov in kontrolnih točk, hkrati pa tudi bistveno ne omeji generiranja krivulje. Krivulji pa doda še eno zelo zaželjeno lastnost: interpolacijo končnih točk. Vsak zlepek ima vrednost 0 v svojih robnih vozlih, zato ima tudi krivulja, katere konec določa en sam zlepek, na svojem koncu vrednost 0. V praksi to pomeni, da se krivulja elegantno zaključi v svoji zadnji kontrolni točki, katere vrednost je določena z 0.

Popolna zanka

Drugi izmed načinov kako elegantno rešiti problem "dodatnih" robnih vozlov, je s preprosto povezavo krivulje v popolno sklenjeno zanko. Manjkajoče zlepke na koncu krivulje nadomestijo zlepki z začetka krivulje z indeksi po modulu k : $s_{i>k} = s_{i-k}$. Tako definirana krivulja združi svoj zadnji konec s sprednjim in postane popolnoma sklenjena. Ker je v celoti ustvarjena po ustrezni definiciji, velja lastnost C_2 po vsej njeni dolžini.

Sedaj so definirani vsi potrebni elementi za generiranje posameznih zlepkov in združevanje teh zlepkov v krivuljo. Za dejansko generiranje krivulj je potrebna le še implementacija definiranega sistema.

Poglavje 6

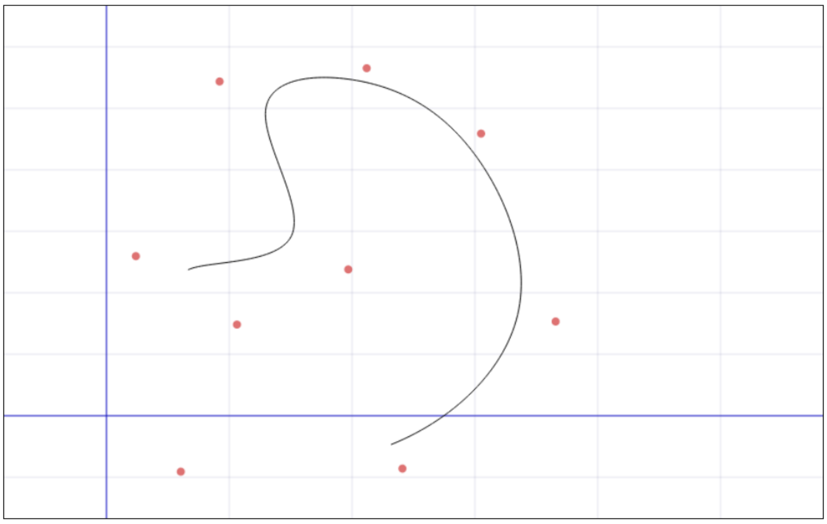
Generator krivulj

V okviru te diplomske naloge je bil sprogramiran tudi generator krivulj. To je grafični program, ki omogoča uporabnikom ustvarjanje in prilagajanje krivulj po svojih željah. Ima pestro izbiro različnih načinov za generiranje krivulj in iz tega stališča se lahko postavi ob bok različnim uspešnim grafičnim urejevalnikom vektorskih slik. A bolj kot dejanskemu grafičnemu oblikovanju, je ta program namenjen izobraževanju o generiranju krivulj. Podpira različne tipe krivulj in ima široko paleto opcij za prilagajanje le teh. Tako lahko uporabnik iz prve roke vidi, preizkusi in lažje razume kako so krivulje zgrajene in kako se obnašajo pri manipulacijah. Ta učni pripomoček je zelo uporaben za vse, ki se želijo na enostaven način izobraziti o krivuljah.

Program je napisan v programskih jezikih *JavaScript* (pomembna dokumentacija [9]) in *HTML*, ter deluje v okolju spletnih brskalnikov. Pri izdelavi niso bile uporabljene nobene zunanje knjižnice in vsa koda je napisana izključno za ta program in diplomsko nalogo.

Osnovni tip krivulj so seveda kardinalni B-zlepki. Program pa podpira še nekatere druge tipe krivulj za lažje izkustveno razumevanje težav pri gradnji krivulj s preveč preprostimi tipi.

Večina slik v tej diplomski nalogi je ustvarjena prav s tem programom.



Slika 6.1: Preprosta krivulja

6.1 Opis komponent

Nastavitve

Tik pod vrhom se nahaja vrstica za izbor tipa krivulje. Podprtih je kar nekaj različnih tipov in vsak izmed njih ima svoje značilnosti. Ob izboru tipov, kjer je krivulja zlepljena, se poleg pojavijo še dodatne nastavitve kot je število zlepkov in barvanje odsekov (za lažje razumevanje).

Kanvas

Kanvas je površina, kjer je ustvarjena krivulja predstavljena. V ozadju je narisana koordinatna mreža z enotnimi vrednostmi. Vsaka cela vrednost na koordinatni osi je označena s tanjšo premico, ki je pravokotna na to koordinatno os. Referenca posameznih vrednosti obeh osi se izkaže za uporabno pri razumevanju polinomskih zapisov posameznih krivulj, saj koordinatne vrednosti popolnoma ustrezajo polinomskim. Skala na vsaki osi je linearna, a ni nujno enaka na obeh oseh. Koordinatni osi se stikata v koordinatni točki $(0, 0)$. Ti elementi sestavljajo osnovno ogrodje koordinatnega sistema, kjer je narisana krivulja.

Na to ogrodje pa se po uporabnikovih željah razporedijo še kontrolne točke in narisana krivulja. Kontrolne točke imajo lahko različne pomene za različne tipe krivulj. Za nekatere služijo kot **interpolacijske točke**, skozi katere more potekati krivulja. Za druge pa služijo kot **utežne točke**, ki le rahlo spremenijo naravni potek krivulje. Vse pa so **kontrolne točke**, saj prispevajo informacije, ki na tak ali drugačen način določijo potek krivulje.

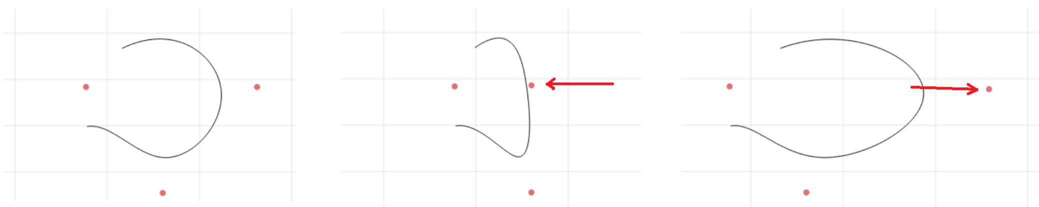
Kontrolne točke so tudi edini elementi na kanvasu, ki jih uporabnik lahko upravlja. A hkrati so tudi edini potrebni elementi, saj omogočajo popolen nadzor nad upravljanjem s krivuljo. Prirejene so za upravljanje z miškinim kazalcem:

1. *Klik na točko in vlečenje* spremeni pozicijo točke in posledično tudi spremeni potek krivulje vsaj v bližnji okolici.

2. *Klik na prazno območje* doda še eno točko na konec krivulje. Zlepljena krivulja se tako podaljša za en odsek.

3. *Klik na točko (brez vlečenja)* odstrani to točko in zmanjša zlepljeno krivuljo za en odsek. Vse ostale točke pa se zamaknejo in popravijo izgled krivulje.

S pomočjo teh ukazov lahko uporabnik popolnoma ureja in prilagaja krivuljo iz kardinalnih B-zlepkov in tudi krivulje nekaterih drugih tipov v kakršno koli kombinacijo. Krivulja se samodejno ustrezno posodobi pri vsaki uporabnikovi akciji, tudi pri tistih izven kanvasa. Pri akcijah, ki vključujejo vlečenje, se krivulja posodobi za vsak piksel premika posebej.



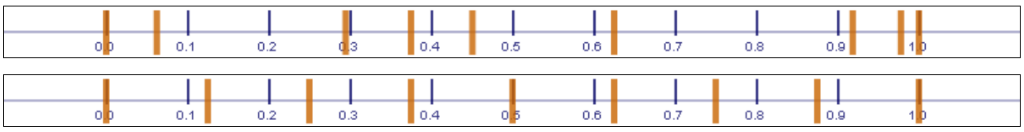
Slika 6.2: Lokalna manipulacija s premikanjem kontrolne točke

Kanvas vozlov

Pri izbiri sestavljenega tipa krivulje, ki omogoča spreminjanje vozlov, se pod kanvasom pojavi še kanvas vozlov. Ogrodje tega kanvasa sestavlja premica z določenimi vrednostmi, ki so linearno naraščajoče razporejene vzdolž nje. Ta skala se samodejno posodablja tako, da so vse vrednosti vozlov zmeraj v vidnem območju. Torej, če se poljuben vozel pomakne izven območja kanvasa vozlov, se skala prilagodi tako, da je tudi ta vozel v vidnem območju.

Vozel je na tem kanvasu prikazan s pravokotnikom, ki s svojo sredino označuje vrednost tega vozla. Število vozlov je za eno večje od števila zlepkov in se avtomatsko posodablja s spreminjanjem števila kontrolnih točk. Razdalja med vozloma i in $i + 1$ določa velikost odseka i zlepljene krivulje. Vsak vozel lahko uporabnik klikne in povleče z miškinim kazalcem ter tako po želji spreminja njegov položaj vzdolž premice. Vozel se lahko premika le na območju med sosednjima vozloma, saj je zahtevano, da je zaporedje vozlov nepadajoče. V nasprotnem primeru bi bila lahko velikost določenega odseka negativna, kar pa bi najverjetneje uničilo povezanost krivulje. Velikost vsakega odseka krivulje je tako nujno nenegativna.

Predstavljena je kot razmerje razdalje med dvema sosednjima vozloma glede na velikost celotne krivulje. Tako je v grobem mogoče reči, da vozli določajo kakšen odstotek krivulje bo zasedel posamezen odsek. Daljši kot je odsek, bolj se pozna njegov vpliv na potek krivulje. Podobno velja, da manjši odseki tvorijo le majhen del krivulje in odseki velikosti 0 popolnoma izginejo iz krivulje. V okolici teh ničelnih odsekov lahko krivulja popolnoma izgubi svojo povezanost.

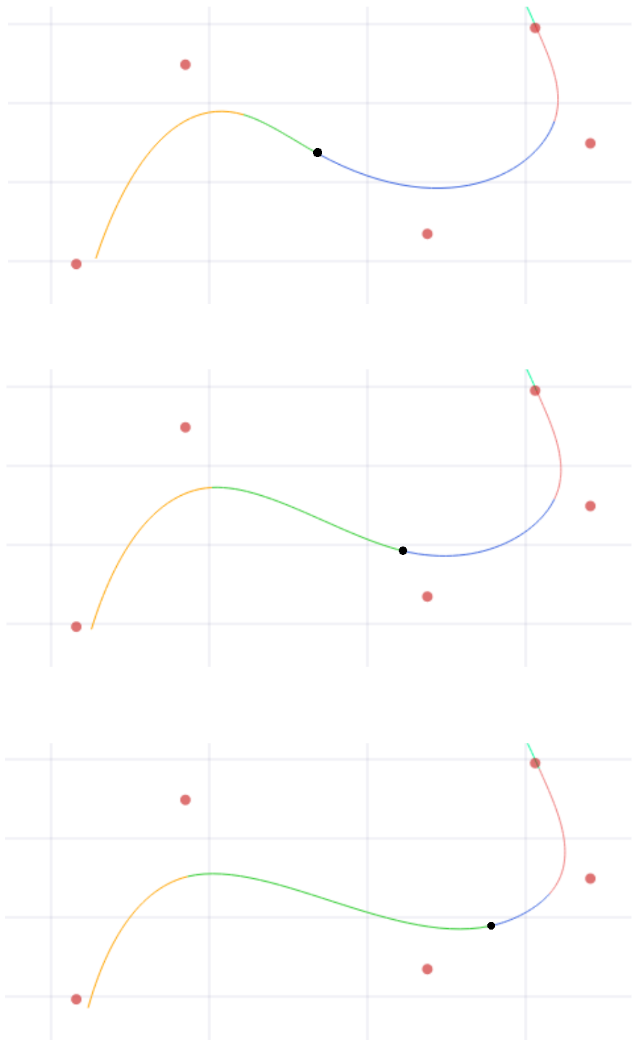


Slika 6.3: Vektor vozlov krivulje iz B-zlepkov (zgoraj) in vektor vozlov krivulje iz kardinalnih B-zlepkov (spodaj)

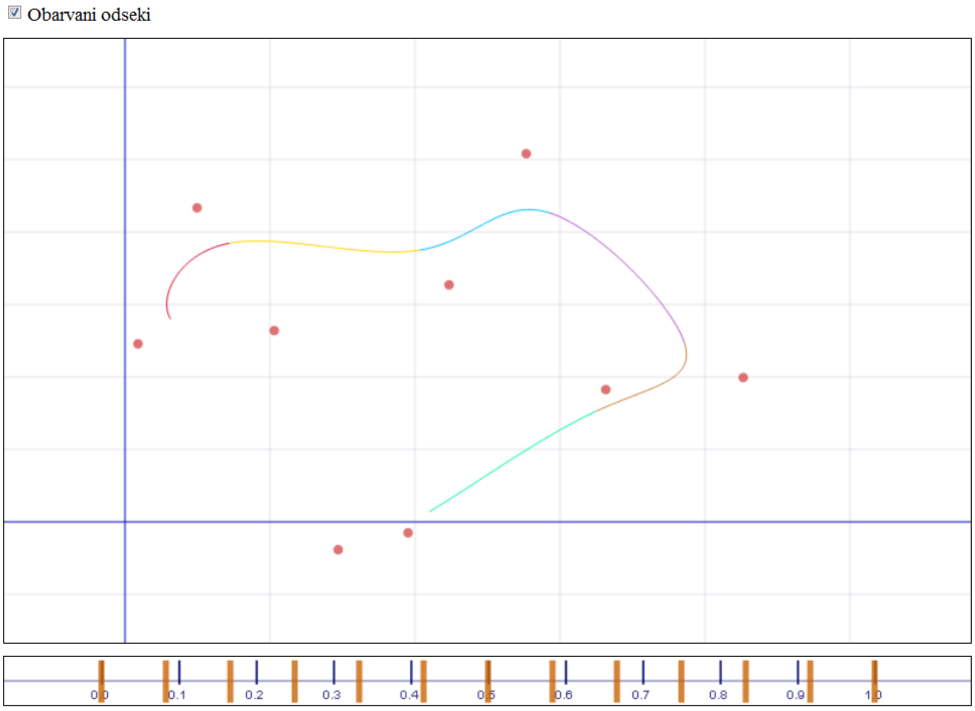
Tabela polinomov

Zadnja komponenta generatorja krivulj je *tabela polinomov*, ki predstavlja pripadajoči polinomski zapis ustvarjene krivulje. V primeru, da je krivulja zgrajena iz več polinomov, vsaka vrstica v tabeli opisuje en odsek krivulje, ki je popolnoma določen s polinomom in območjem na katerem je definiran. Tako lahko uporabnik enostavno primerja minimalen zapis, ki popolnoma opiše krivuljo in je zadosten za upodobitev le-te, in iz prve roke vidi povezavo med kompleksnostjo krivulje in njenega zapisa.

Ta tabela je dodana vrednost tega programa, saj je nima noben izmed podobnih programov, ki jih je mogoče najti na spletu. Koda za generiranje te tabele je za intervale prirejena iz definicij posameznih krivulj.



Slika 6.4: Slike prikazujejo spreminjanje zelenega in modrega odseka krivulje ob spreminjanju vozla ned njima (pri tem se rahlo spreminja tudi sama podoba krivulje)



Zapis krivulje

u ∈ [0.25, 0.33] :	x(u) = - 4.79 u^3 + 100.59 u^2 - 52.59 u^1 + 7.25 y(u) = - 1440 u^3 + 1228.31 u^2 - 333.99 u^1 + 32.03
u ∈ [0.33, 0.42] :	x(u) = - 730.48 u^3 + 826.28 u^2 - 294.49 u^1 + 34.13 y(u) = 1674.42 u^3 - 1886.11 u^2 + 704.15 u^1 - 83.32
u ∈ [0.42, 0.50] :	x(u) = 625.10 u^3 - 868.19 u^2 + 411.54 u^1 - 63.93 y(u) = - 2238.94 u^3 + 3005.58 u^2 - 1334.05 u^1 + 199.76
u ∈ [0.50, 0.58] :	x(u) = - 981.95 u^3 + 1542.39 u^2 - 793.75 u^1 + 136.95 y(u) = 2253.29 u^3 - 3732.76 u^2 + 2035.12 u^1 - 361.76
u ∈ [0.58, 0.67] :	x(u) = 584.38 u^3 - 1198.7 u^2 + 805.22 u^1 - 173.96 y(u) = - 1363.46 u^3 + 2596.54 u^2 - 1656.98 u^1 + 356.14
u ∈ [0.67, 0.75] :	x(u) = 373.62 u^3 - 777.18 u^2 + 524.21 u^1 - 111.51 y(u) = 1023.79 u^3 - 2177.94 u^2 + 1526.01 u^1 - 351.19

Slika 6.5: Obarvani odseki kardinalne krivulje B-zlepkov s pripadajočo tabelo polinomov

6.2 Tipi krivulj

Generator krivulj podpira naslednje tipe krivulj:

- *En sam ekspliciten polinom*
  Celotno krivulja je zapisana s pomočjo enega eksplicitnega polinoma. Polinom je definiran kot najenostavnejša (polinom je najnižje stopnje) interpolacija vseh podanih točk. Kakor je bilo v prvem poglavju omenjeno, ima tudi ta polinom nekatere pomanjkljivosti, ki mu onemogočajo interpolacijo dveh točk na isti vrednosti x-osi z različnima vrednostima na y-osi. V takšnih primerih program odpove in preneha z ustvarjanjem nemogočega polinoma.

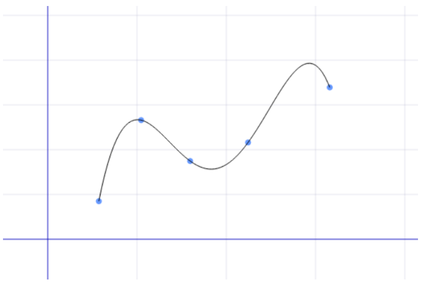
- *En sam parametričen polinom*
  Celotna krivulja je zapisana v enem parametričnem polinomu. Podobno kot v prejšnjem primeru, tudi tu polinom najnižje možne stopnje interpolira vse podane točke. Le da ta polinom nima omejitev in obstaja pri kakršni koli izbiri točk.

- *B-zlepki in kardinalni B-zlepki*
  Krivulja je generirana po prirejeni definiciji s pomočjo matrike za podano stopnjo. Vsak odsek je nadalje še ločeno zgrajen iz standardne definicije, prirejene za intervale, in polinomsko opisan v tabeli polinomov na dnu.
  Kardinalnost krivulje je zagotovljena s preprostim enakomernim razvrščanjem vozlov. Ob osvežitvi programa, so vsi vozli enakomerno razporejeni in program poskrbi, da razmiki med njimi ostanejo enaki tudi ob dodajanju in odvzemanju zlepkov iz krivulje. Tako se kardinalnost izgubi le v primeru, ko uporabnik sam spremeni pozicijo vozlov. V takih primerih se krivulji lahko povrne kardinalnost preprosto s klikom na gumb, ki razporedi vozle v enakomerne presledke.

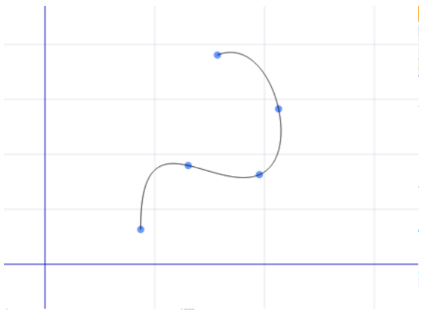
  - *Eksplicitni B-zlepki*
    Ta tip krivulje uporablja B-zlepke, ki so določeni vzdolž abscisne osi, njihova vrednost pa je prikazana v ordinatni smeri. Sestavljajo jih eksplicitni polinomi, zato tudi ne morejo upodobiti kompleksnih krivulj v ravnini. So pa izredno uporabni za prikaz kako se posamezni B-zlepki združijo v krivuljo in kako kontrolne točke vplivajo na posamezne zlepke, ker se le-te lahko premikajo

izključno vzdolž ordinatne osi.

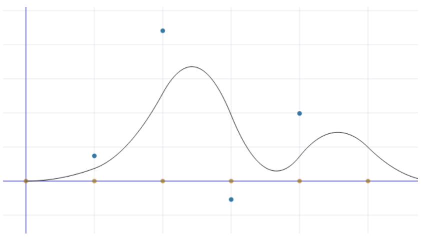
– *Parametrični B-zlepki*
  Te B-zlepke sestavljajo parametrični polinomi, ki jih je mogoče spreminjati tako v abscisni kot v ordinatni smeri in tako ustvariti vse mogoče krivulje v ravnini. Ti zlepki so dejansko namenjeni generiranju kompleksnih krivulj.



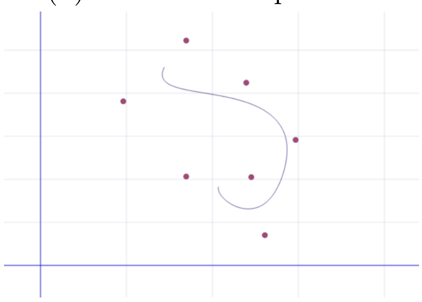
(a) Eksplicitna polinom



(b) Parametričen polinom



(c) B-zlepki v 1 dimenziji



(d) B-zlepki v 2 dimenzijah

Slika 6.6: Različni tipi krivulj, ki jih program podpira

Poglavje 7

Sklep

Namen tega diplomskega dela je, kakor opisano v uvodu, raziskava področja računalniških krivulj in kardinalnih B-zlepkov, ter predstavitev zbranega znanja za čim lažje razumevanje področja. Zaželjeno je, da je bralec teh strani pridobil vsaj okvirno idejo o problematiki zapisov grafičnih elementov in o njenih rešitvah, ter o pomembnosti kardinalnih B-zlepkov in elegantnosti, s katero zmorejo opisati poljubno krivuljo. Za pomoč pri razumevanju, pa je bil v okviru tega diplomskega dela razvit tudi spletni program za generiranje krivulj. Slednji omogoča uporabniku na zabaven način iz prve roke izkusiti težave pri generiranju krivulj s preprostimi zapisi in čudovite lastnosti kardinalnih B-zlepkov, ki omogočajo enostavno generiranje krivulj.

Toda vse to znanje je šele vrh ledene gore, ki se razteza na mnoga področja. Kljub temu, da je bilo znotraj tega diplomskega dela predstavljenih veliko različnih tipov zlepkov, je potrebno vedeti, da jih obstaja še mnogo. Večina jih je, za razliko od naštetih, bolj specializirana za različna področja. Na primer: *Poliharmonični zlepki (polyharmonic splines)* so odlični za aproksimacijo razpršenih podatkov v več dimenzijah, a manj primerni za oblikovanje spiral. Način gradnje krivulj pri vseh tipih zlepkov pa ostaja v osnovi enak: *manjše "krivulje" se sestavijo v večje.*

Poleg različnih tipov pa obstaja še druga smer razvoja zlepkov: večdimenzionalnost. Kardinalni B-zlepki lahko opišejo tudi ukrivljene ploskve in celo ukrivljene predmete poljubnih dimenzij. Teorija v osnovi ostaja enaka, le da namesto enodimenzionalnih črt, zlepke oblikujejo večdimenzionalni objekti.

Uporabnost kardinalnih B-zlepkov pa seveda ni omejena le na grafično oblikovanje krivulj, pač pa se aktivno uporabljajo pri oblikovanju različnih plovil za zagotavljanje aero- in hidrodinamike. Pri procesiranju signalov pa so že leta nepogrešljiv pripomoček.

Resnično upam, da je ta diplomska naloga izpolnila svoj namen in bralcu podarila vsaj osnovni občutek o vsem potrebnem dogajanju v ozadju, ki omogoča da se na računalniškem zaslonu prikaže tako osnoven lik kot je krivulja.

Literatura

[1] John C Beatty and Brian A Barsky. *An introduction to splines for use in computer graphics and geometric modeling*. Morgan Kaufmann, 1995.

[2] Karthik Bindiganavle. An optimal approach to geometric trimming of b-spline surfaces. Master's thesis, Virginia Tech, Mechanical Engineering, 4 2000. Master's Thesis.

[3] E.W. Cheney and W.A. Light. *A Course in Approximation Theory*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 2000.

[4] James Craig. Supplemental notes. Lecturer's notes, 2004. [Online; accessed 03-Aug-2015].

[5] Carl De Boor. *A practical guide to splines*, volume 27. Springer-Verlag New York, 1978.

[6] Neil Dodgson. Advanced graphics and hci. Lecture notes, 11 2000. [Online; accessed 12-July-2015].

[7] Volk Grahn et Wolters. Nurbs and vrml. *Blaxxun Interactive*, 2000.

[8] Feiner et Huges Foley, VanDam. *Computer Graphics: Principles and Practice - 2nd edition*. Addison-Wesley, 1996.

[9] Mozilla Foundationl. Canvas tutorial, 2015. [Online; accessed 24-July-2015].

[10] Howard J. Hamilton. Uniform cubic b-spline curves. Lecturer's notes, 2003. [Online; accessed 24-July-2015].

[11] Donald H. House. Spline curves. Lecturer's notes for course Computer Graphics, 4 2014. [Online; accessed 12-July-2015].

[12] Gradimir V. Milovanović and Zlatko Udovičić. Calculation of coefficients of a cardinal b-spline. *Applied Mathematics Letters*, 23(11):1346 – 1350, 2010.

[13] Hartmut Prautzsch, Wolfgang Boehm, and Marco Paluszny. *Bézier and B-spline techniques.* Springer, 2002.

[14] Wikipedia. B-spline — wikipedia, the free encyclopedia, 2015. [Online; accessed 24-July-2015].

[15] Wikipedia. Bézier curve — wikipedia, the free encyclopedia, 2015. [Online; accessed 25-July-2015].

[16] Wikipedia. Smoothness — wikipedia, the free encyclopedia, 2015. [Online; accessed 25-July-2015].

[17] Wikipedia. Spline (mathematics) — wikipedia, the free encyclopedia, 2015. [Online; accessed 24-July-2015].

[18] Wikipedia. Spline wavelet — wikipedia, the free encyclopedia, 2015. [Online; accessed 10-August-2015].

[19] Wikipedija. Zlepek — wikipedija, prosta enciklopedija, 2015. [Online; accessed 24-July-2015].