Univerza v Ljubljani
Fakulteta za računalništvo in informatiko

Klarisa Trojer

Nilpotentne matrike nad antikolobarji

DIPLOMSKO DELO

INTERDISCIPLINARNI UNIVERZITETNI ŠTUDIJSKI
PROGRAM
PRVE STOPNJE
RAČUNALNIŠTVO IN MATEMATIKA

Mentor: izr. prof. dr. David Dolžan

Ljubljana, 2018

Besedilo je oblikovano z urejevalnikom besedil LaTeX.

Fakulteta za računalništvo in informatiko izdaja naslednjo nalogo:

Tematika naloge:

Kolobarju brez operacije odštevanja pravimo polkolobar. Polkolobar je antikolobar, če za poljubna elementa a in b iz $a + b = 0$ sledi $a = b = 0$. Študent naj razišče nilpotentne matrike nad antikolobarji in njihove lastnosti.

Ključna literatura: Y. Tan, On nilpotent matrices over antirings, Linear Algebra Appl. 429 (2008), no. 5–6, 1243– 1253.

Iskreno bi se rada zahvalila svojemu mentorju izr. prof. dr. Davidu Dolžanu za vse strokovne nasvete, potrpežljivost ter pomoč pri izdelavi diplomskega dela. Posebna zahvala gre tudi staršem in Patriku , ki so me podpirali skozi študij.

Kazalo

Povzetek

Naslov: Nilpotentne matrike nad antikolobarji

Avtor: Klarisa Trojer

Glavna tema diplomske naloge je opis lastnosti nilpotentnih matrik nad antikolobarji. V prvem poglavju se posvetimo abstraktnim strukturam, natančneje, grupam in polkolobarjem. Pogledamo si bomo lastnosti, ki veljajo za polgrupe, monoide in grupe, nato pa preidemo še na lastnosti polkolobarjev. Nadaljujemo s kratkim opisom zgodovine študije matrik nad polkolobarji ter podamo nekaj definicij in lem, ki jih uporabimo v nadaljevanju. Definiramo, kaj je antikolobar in obravnavamo nilpotentnost elementov in matrik, prav tako definiramo permanento ter z njo povezane permanentne minorje. Sledi poglavje, na katerega se navezuje naslov diplomske naloge, lastnosti nilpotentnih matrik. Nekaj strani namenimo še simultani nilpotenci in nilpotentnemu indeksu. V zadnjem delu pa podamo metodo, s katero ta indeks tudi poiščemo.

Ključne besede: antikolobar, nilpotentna matrika, permanenta, permanentni minor, digraf, simultana nilpotenca, nilpotentni indeks.

Abstract

Title: Nilpotent matrices over antirings

Author: Klarisa Trojer

The main goal of this thesis is to decribe the properties of nilpotent matrices over antirings. We start with the introduction of the abstract structures, more precisely, groups and semirings. We observe the properties that apply to semigroups, monoids and groups, and also the properties that apply to semirings. After a brief description of the history of previous studies done on matrices over semirings, we give some definitions and lemmas that are used later on. We define what an antiring is and talk about nilpotence of elements and matrices, we also define the permanent and the associated permanent minors. Next, we define and describe the properties of the nilpotent matrices. We also write about simultaneous nilpotency and the nilpotent index. At the end we provide a method for calculationg the nilpotent index.

Keywords: antiring, nilpotent matrix, permanent, permanent minor, digraph, simultaneously nilpotency, nilpotent index.

Poglavje 1

Uvod

Diplomska naloga obravnava algebrske strukture. Dotaknili se bomo teorije grup in predvsem teorije polkolobarjev. Pogledali si bomo uvod v to obširno področje algebre, kasneje pa se bomo osredotočili na posebno vrsto polkolobarjev, antikolobarjev. Zanimale nas bodo lastnosti matrik nad njimi.
V prvem delu bomo pobližje spoznali lastnosti grup in polkolobarjev [7], ki jih bomo potrebovali za definiranje antikolobarja in njegovih lastnosti. V naslednjem razdelku bomo najprej na kratko predstavili zgodovinski razvoj preučevanja matrik nad polkolobarji. Sledilo bo poglavje z definicijami in lemami, kjer bomo povedali, kdaj sta element in matrika nilpotentna, definirali permanento [6], omenili glavni permanenti minor ter spoznali digraf. To bo pripomoglo k razumevanju in karakterizaciji v nadaljevanju predstavljenih lastnosti nilpotentnih matrik nad antikolobarji [9, 10]. Nazadnje bomo govorili o simultani nilpotenci [11], pri kateri bomo omenili nilpotentni indeks, podana pa bo tudi metoda za iskanje le-tega.
Poleg definicij, trditev in dokazov so v delu dodani tudi zgledi, ki služijo kot ilustracija obravnavanega.
Čeprav teorija matrik nad polkolobarji velja za matematično disciplino, je pomembna tudi v računalništvu. Uporabno vrednost ima v optimizaciji, modelih diskretnih mrež in v teoriji grafov.

Poglavje 2

Algebrske strukture

Za začetek povejmo, kaj sploh so algebrske oziroma algebrajske strukture. V svetu matematike, bolj specifično v abstraktni algebri, je algebrska struktura množica z računsko operacijo, ki je definirana za elemente te množice.
Za množico ene ali večih računskih operacij, morajo veljati določene lastnosti, ki jih imenujemo aksiomi.

Primeri algebrskih struktur so grupe, polkolobarji, obsegi in mreže. Mi si bomo v nadaljevanju najprej pogledali najosnovnejšo strukturo z eno operacijo, to je grupo, potem pa bomo prešli na množice, kjer sta definirani dve računski operaciji, polkolobarje.

2.1 Polgrupe in grupe

Naj bo $S \neq \emptyset$ neprazna množica in $\cdot$ binarna operacija nad S. Potem je $(S, \cdot)$ polgrupa, če je ta operacija asociativna, kar pomeni, da velja

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \text{ za } \forall a, b, c \in S.$$

Polgrupa je komutativna, ko velja

$$a \cdot b = b \cdot a \text{ za } \forall a, b \in S.$$

Za vsako končno množico A z $|A|$ označimo kardinalno število množice A in ga imenujemo moč polgrupe $(S, \cdot)$.

Definicija 2.1. *Naj bo S polgrupa. Element $e_l \in S$ je levi nevtralni, če velja $e_l \cdot a = a$ za vsak $a \in S$. Prav tako je e_r desni nevtralni element, če velja $a \cdot e_r = a$ za vsak $a \in S$. Element $e \in S$, ki je levi in desni nevtralni v S, je nevtralni element in zadošča enačbi $e \cdot a = a \cdot e = a$ za vsak $a \in S$.*

Trditev 2.2. *Polgrupa ima največ en nevtralni element.*

Dokaz. Naj bosta e_1 in e_2 oba nevtralna elementa. Potem velja $e_1 = e_1 \cdot e_2 = e_2$. □

Opomba 2.3. Polgrupi, ki vsebuje nevtralni element, pravimo monoid.

Definicija 2.4. *Naj bo S monoid. Potem je element $a \in S$ z leve obrnljiv, če obstaja $a' \in S$, tako da velja $a' \cdot a = e$, kjer je e nevtralni element. Tak a' imenujemo levi inverz elementa a.*

Trditev 2.5. *Naj bo S polgrupa z nevtralnim elementom e in naj bo $a' \in S$ levi inverz, $a'' \in S$ pa desni inverz za nek $a \in S$. Potem velja $a' = a''$.*

Dokaz. Enakost dobimo iz
$a' = a' \cdot e = a' \cdot (a \cdot a'') = (a' \cdot a) \cdot a'' = e \cdot a'' = a''$. □

Torej ima element a iz monoida S natanko en inverz, ki ga označimo z a^{-1}, ali pa nima inverza.

Monoidu z inverzom pravimo grupa, komutativni grupi pa abelova.

Trditev 2.6. *Naj bo S polgrupa z nevtralnim elementom e in naj bo a obrnljiv element, kar pomeni, da obstaja inverz a', da velja $a \cdot a' = a' \cdot a = e$. Potem je za vsak $n \in \mathbb{Z}^+$ tudi a^n obrnljiv, kar sledi iz*

$$(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n.$$

Še več. Naj bosta elementa a in b oba obrnljiva. Potem enako velja za njun produkt $a \cdot b$, kar dobimo iz sledečega $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$.

Definicija 2.7. *Naj bo S polgrupa in $U \neq \emptyset$ podmnožica S. Množica U je zaprta za operacijo $\cdot$, če velja $u \cdot v \in U$ za vsak $u, v \in U$. Potem je U prav tako polgrupa in jo imenujemo podpolgrupa polgrupe S. Če je S in tako tudi U grupa, govorimo o podgrupi grupe S.*

2.2 Polkolobarji

Definicija 2.8. *Naj bo $S \neq \emptyset$ neprazna množica ter $+$ in $\cdot$ binarni operaciji nad S, imenovani seštevanje in množenje. Potem $(S, +, \cdot)$ imenujemo polkolobar, če veljajo naslednje trditve:*

(i) *$(S,\ +)$ je komutativna polgrupa.*

(ii) *$(S, \cdot)$ je monoid.*

(iii) *Obe operaciji sta povezani z distributivnima zakonoma:*

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \text{ in}$$
$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \text{ za } \forall a, b, c \in S.$$

V splošnem je polkolobar $(S, +, \cdot)$ komutativni, ko je komutativni monoid $(S, \cdot)$. Kadar je $(S,\ +)$ abelova grupa, je $(S, +, \cdot)$ kolobar.

Opomba 2.9.

(i) Običajno bomo kar izpustili oklepaje, tako da namesto $(a \cdot b) + (a \cdot c)$ pišemo kar $a \cdot b + a \cdot c$. Prav tako $a \cdot b$ nadomestimo z ab.

(ii) Pogosto označimo polkolobar $(S, +, \cdot)$ enostavno s S.

Tako kot pri polgrupah imenujemo kardinalno število $|S|$ moč polkolobarja S. Prav tako vse izjave, ki veljajo za polgrupe, veljajo tudi za polkolobarje.

Definicija 2.10. *Naj bo S polkolobar.*

(i) Nevtralni element monoida $(S, \cdot)$ imenujemo identiteta polkolobarja S.

(ii) Nevtralni element monoida $(S, +)$ je ničla polkolobarja S. Največkrat ga označimo z 0.

(iii) Izraz »obrnljiv« uporabljamo vedno glede na množenje za S. V splošnem, a^{-1} označuje inverz elementa $a \in S$, ki je obrnljiv v $(S, \cdot)$.

(iv) Naj ima S ničlo 0 in naj bo $a \in S$ aditivni inverz v $(S, +)$. Potem z $-a$ označimo nasprotni element elementa a.

Upoštevajmo, da je ničla polkolobarja definirana z $0 + a = a$ za vsak $a \in S$. Sedaj predvidevajmo, da $x + y = 0$ drži za neka $x, y \in S$ z ničlo 0. Potem je $y = -x$ nasprotni element elementa x in $x = -y$ nasprotni element elementa y.

Opomba 2.11. Če ima polkolobar S samo en element a, potem je a tako ničla kot tudi identiteta S.

Definicija 2.12.

(i) Za vsak polkolobar S obstaja S^*, ki je definiran kot $S^* = S \backslash \{0\}$, če ima S ničlo, sicer pa je definiran kot $S^* = S$.

(ii) Polkolobar z ničlo 0 je brez deliteljev niča, če iz $ab = 0$ vedno sledi, da je $a = 0$ ali $b = 0$. V splošnem imenujemo $a \in S$ levi delitelj niča S, če obstaja $b \neq 0 \in S$, ki zadošča $ab = 0$.

Polkolobar S je brez deliteljev niča oziroma cel, če iz $ab = 0$ sledi, da je $a = 0$ ali $b = 0$ za vsak $a, b \in S$. Taki polkolobarji nimajo ne levega ne desnega delitelja niča.

Poglavje 3

Nilpotentne matrike nad antikolobarji

3.1 Uvod

V nadaljevanju si bomo pogledali lastnosti nilpotentnih matrik nad antikolobarji, zato naprej poglejmo, kaj antikolobar sploh je.
Polkolobar S je antikolobar, če za poljubna elementa a in $b \in S$ iz $a + b = 0$ sledi, da $a = b = 0$. Antikolobarji so precej obširni. Naštejmo nekaj primerov antikolobarjev: vsaka Boolova algebra, množica nenegativnih celih števil $\mathbb{Z}^+$ z običajnimi operacijami $+$ in $\cdot$, prav tako tudi množici $\mathbb{Q}^+, \mathbb{R}^+$. Vsi tukaj našteti antikolobarji so celi.

Nad kolobarji imajo matrike veliko lepih lastnosti. Podobno teorijo so skušali razviti tudi nad polkolobarji. Poglejmo si kratko zgodovino študije matrik nad polkolobarji.
Leta 1964 je Rutherford dokazal Cayley-Hamiltonov izrek za komutativne polkolobarje brez uporabe determinante. Leta 1999 pa je Golan celovito opisal polkolobarje in matrike nad njimi.
Na začetku 60. let je veliko avtorjev preučevalo nilpontentne matrike za nekatere posebne primere antikolobarjev. Leta 1964 je Givelon dokazal, da

je $n \times n$ matrika A nilpotentna, če in samo če velja $A^n = 0$.
Hashimoto je pridobil nekaj lastnosti za posebne vrste nilpotentnih matrike. Te rezultate je nato Tan posplošil na vse nilpotentne matrike. Podal je tudi metodo računanja nilpotentnega indeksa nilpotentnih matrik, Dolžan in Oblak pa sta našla število nilpotentnih matrik nad komutativnim celim antikolobarjem.
Ren in sodelavci so pokazali, da je posebna vrsta matrike nilpotentna, če in samo če je vsak glavni permanentni minor A enak 0. Tudi to sta Ren in Zhang posplošila na ostale nilpotentne matrike.
Kot posplošitev nilpotentnih matrik je Lur s sodelavci predlagal pojem simultane nilpotence za končno število matrik in objavil nekaj njenih lastnosti.

Mi se bomo osredotočili na nilpotentne matrike nad splošnejšimi antikolobarji, in sicer nad razredom komutativnih antikolobarjev brez neničelnih nilpotentnih elementov, z enoto 0 za seštevanje in enoto 1 za množenje.

3.2 Definicije in leme

V tem poglavju bomo podali nekaj definicij in lem. Uporabljali bomo N za označitev množice 1, 2, ..., n.
Množico vseh deliteljev niča v S označimo z $Z(S)$. Jasno je, da je polkolobar S cel, če in samo če je $Z(S) = \{0\}$.

Definicija 3.1. *Element a iz polkolobarja je nilpotenten, če obstaja tako naravno število k, da velja $a^k = 0$.*

Jasno je, da noben cel polkolobar nima neničelnih nilpotentnih elementov.

Naj bo S komutativni polkolobar. Z $M_{m\times n}(S)$ označimo množico $m \times n$ matrik nad polkolobarjem S, kjer sta $m, n \in N$. Element matrike $A \in M_{m\times n}(S)$, ki stoji na (i, j)-tem mestu označimo z a_{ij} ali z A_{ij}. Namesto $M_{n\times n}(S)$ pišemo kar $M_n(S)$. Za vsak $A \in M_{m\times n}(S)$ uporabimo A^T za označitev transponiranke A.

V nadaljevanju, če ne bomo rekli drugače, bo S komutativni antikolobar.

Naj bo $A \in M_n(S)$. Potence matrike A definiramo kot:

$$A^0 = I, A^l = A^{l-1}A;\ l \in N,$$

kjer je I identiteta.

Z $a_{ij}^{(l)}$ bomo označili (i, j)-ti element matrike A^l.

Matrika $A \in M_n(S)$ je nilpotentna, če velja $A^l = 0$ za kak l ≥ 1. Najmanjše število l, ki zadošča $A^l = 0$, imenujemo nilpotentni indeks in ga označimo s $h(A)$.

Definicija 3.2. *Naj bo S polkolobar in Γ neprazna podmnožica S. Γ je simultano nilpotentna, če obstaja tak k, da velja $\Gamma^k = \{0\}$, kjer je*

$$\Gamma^k = \{a_1 a_2 \dots a_k | a_i \in \Gamma, i = 1, 2, ..., k\}.$$

Najmanjše pozitivno število k, ki zadošča $\Gamma^k = \{0\}$, imenujemo simultani nilpotentni indeks Γ in ga označimo s $h(\Gamma)$.

Opomba 3.3. Če je množica Γ simultano nilpotentna, potem je vsaka neprazna podmnožica množice Γ tudi simultano nilpotentna. V splošnem, vsak element iz Γ je nilpotenten. Lahko pa obstaja takšna neprazna podmnožica $\Gamma \in S$, vsak element katere je nilpotenten, Γ pa ni simultano nilpotentna.

Poglejmo si zgled.

Zgled 3.4. Naj bo $S = ([0, 1], \vee, \cdot)$, kjer sta $a \vee b = \max\{a, b\}$ in $a \cdot b = (a + b - 1) \vee 0$ za $a, b \in [0,\ 1]$. Ni težko preveriti, da je S komutativni polkolobar z ničlo 0 in identiteto 1 (S je komutativni antikolobar). Za vsak $a \in [0,\ 1]$ vidimo, da je $a^k = (ka - k + 1)\vee\ 0$. Element a je nilpotenten, kadar velja $a^k = 0$, to pa velja samo takrat, ko je $a \leqslant 1 - \dfrac{1}{k}$. Tako je množica vseh nilpotentnih elementov enaka $[0,\ 1)$. Vzemimo množico $\Gamma = [0,\ 1)$, ki je podmnožica množice S. Recimo, da Γ ni simultano nilpotentna. Za vsako naravno število l naj bo $a_i = 1 - \frac{1}{2^i}, i = 1,\ 2,\ ...,\ l$. Tako je $a_i \in \Gamma$ in velja

$$a_1 a_2 ... a_l = (a_1 + a_2 + ... + a_{l-1} - l + 1) \vee 0$$

$$= \left(\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + ... + \left(1 - \frac{1}{2^l}\right) - l + 1\right) \vee 0$$

$$= \frac{1}{2^l} \vee 0$$

$$= \frac{1}{2^l} \neq 0.$$

Vidimo, da množica Γ ni simultano nilpotentna, čeprav je nilpotenten vsak element množice $[0,\ 1)$, torej množice Γ.

Definicija 3.5. *Naj bo $A \in M_n(S)$. Permanenta* per A *je definirana kot*

$$\text{per } A = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i \in N} a_{i\sigma(i)},$$

kjer je S_n simetrična grupa reda n.

Zgled 3.6. *Velja* per $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh + ceg + bdi + afg$ [5].

Naj bo $r \in N$ in naj bosta $U = \{i_1, i_2, ..., i_r\}, V = \{j_1, j_2, ..., j_r\} \subseteq N$, kjer so $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_r \leq n$ in $1 \leq j_1 < j_2 < ... < j_r \leq n$. Za $A \in M_n(S)$ z $A[U|V]$ označimo $r \times r$ podmatriko matrike A, katere (u, v)-ti element je $a_{i_u j_v}$, z $A(U|V)$ pa označimo $(n-r) \times (n-r)$ podmatriko matrike A, ki nastane z brisanjem vrstic $i_1, i_2, ..., i_r$ in stolpcev $j_1, j_2, ..., j_r$ matrike A. Permanento per $A[U|V]$ imenujemo permanentni minor [8] reda r. V splošnem pravimo matriki $A[U|U]$ glavna podmatrika matrike A reda r, per $A[U|U]$ pa glavni permanentni minor matrike A.

Naj bo padj $A =$ per $A(i|j)^T_{n \times n}$. Matriko padj A imenujemo permanentna adjungirana matrika matrike A [1].

Zgled 3.7. Naj bo $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Potem je padj $A =$

$$\begin{pmatrix} \text{per}\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} & \text{per}\begin{pmatrix} b & c \\ h & i \end{pmatrix} & \text{per}\begin{pmatrix} b & c \\ e & f \end{pmatrix} \\ \text{per}\begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} & \text{per}\begin{pmatrix} a & c \\ g & i \end{pmatrix} & \text{per}\begin{pmatrix} a & c \\ d & f \end{pmatrix} \\ \text{per}\begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix} & \text{per}\begin{pmatrix} a & b \\ g & h \end{pmatrix} & \text{per}\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ei+fh & bi+ch & bf+ce \\ di+fg & ai+cg & af+cd \\ dh+eg & ah+bg & ae+bd \end{pmatrix}.$$

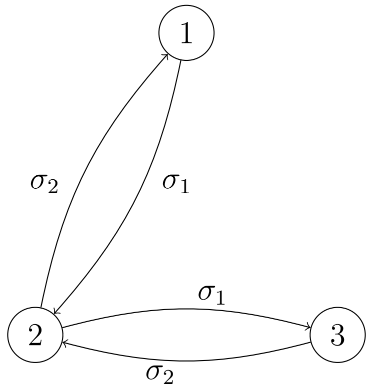
Za dano matriko A $\in M_n(S)$ definiramo digraf (usmerjeni graf) $D(A) = (V, E)$ z množico oglišč $V = \{1, ..., n\}$ in povezav $E = \{(i, j); a_{ij} \neq 0$ za vsak $i, j \in V\}$. Za vsak par (i, j), kjer je $a_{ij} \neq 0$, obstaja povezava med i in j v $D(A)$. Pot v digrafu $D(A)$ [3] je zaporedje oglišč $p = (i_0, ..., i_m)$, tako, da velja $a_{i_0 i_1} a_{i_1 i_2} ... a_{i_{m-1} i_m} \neq 0$. Število m imenujemo dolžina poti p in jo označimo z $l(p)$. Če je $i_0 = i_m$, potem je p cikel z dolžino $m - 1$. Cikel je enostaven, če velja $i_s \neq i_t$ za $s \neq t$, kjer sta $s, t \in \{0, 1, ..., m - 1\}$. Digraf $D(A)$ je acikličen, če ne vsebuje nobenega cikla.

Opomba 3.8. Če je S cel in sta $p = (i_0, ..., i_s)$ in $s = (i_s, ..., i_{s+t})$ poti v digrafu $D(A)$, potem je $r = (i_0, ..., i_s, i_{s+1}, ..., i_{s+t})$ prav tako pot v $D(A)$. Ampak to drži le za polkolobarje, ki so celi.

Zgled 3.9. Vzemimo Boolovo algebro $B = \{0, \sigma_1, \sigma_2, 1\}$, ki spada med distributivne mreže. Zato velja, da je $\sigma_1 \sigma_2 = \sigma_1 \wedge \sigma_2 = 0$ za $\sigma_1, \sigma_2 \in B$, torej antikolobar B ni cel.

Naj bo $A = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_1 & 0 \\ \sigma_2 & 0 & \sigma_1 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(B)$.

Obstajata poti $p = (1,\ 2,\ 3)$ in $q = (3,\ 2,\ 1) \in D(A)$, pot $r = (1,\ 2,\ 3,\ 2,\ 1)$ pa ne obstaja, ker je $a_{12} a_{23} a_{32} a_{21} = \sigma_1 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_2 = 0$.



Slika 3.1: Digraf

Lema 3.10. *Naj bo $A \in M_n(S)$. Potem je*

(i) per A = per (A^T).

(ii) per $A = \sum_{j\in N} a_{ij}$ *per*$A(i|j)$ *za vsak* $i \in N$.

(iii) padj A^T = (padj $A)^T$.

Dokaz.

(i) Vzemimo matriko $A \in M_n(S)$, z B pa označimo matriko A^T. Zanima nas, če je per A = per B. Naj bo $a_{rs} = b_{sr}$, kjer $1 \leq r, s \leq n$. Vidimo, da je per $B = \sum_{\sigma\in S_n} b_{1\sigma(1)}b_{2\sigma(2)} \dots b_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma\in S_n} a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}$ = per A.

(ii) Dokaz je podoben dokazu za determinanto [4].

(iii) Naj bo padj $A = (b_{ij})$ in padj $A^T = (c_{ij})$. Za vsak $i, j \in N$ opazimo, da je $A(i|j)^T = A^T(j|i)$. Po (i) je b_{ji} = per $(A(i|j))$ = per $(A(i|j)^T)$ = per $(A^T(j|i)) = c_{ji}$. □

Pri naslednjih dveh lemah bomo dokaz izpustili.

Lema 3.11. *Naj bo $A \in M_n(S)$. Če lahko B dobimo iz A z zamenjavo stolpcev ali vrstic, potem je* per A = per B.

Lema 3.12. *Naj bo S antikolobar in $A \in M_n(S)$. Potem veljajo naslednje trditve.*

(i) *$A^r \neq 0$, če in samo če digraf $D(A)$ vsebuje pot dolžine r.*

(ii) *Vsaka pot dolžine $\geq n$ v digrafu $D(A)$ vsebuje cikel.*

(iii) *Če vsebuje digraf $D(A)$ cikel, potem vsebuje enostaven cikel dolžine $\leq n-1$.*

3.3 Osnovne lastnosti nilpotentnih matrik

V tem poglavju bomo podali nekaj lastnosti in karakterizacij nilpotentnih matrik nad komutativnimi antikolobarji S.

Trditev 3.13. *Naj bo $A \in M_n(S)$. Če je vsak element matrike A nilpotenten, potem je matrika A nilpotentna.*

Dokaz. Recimo, da je A nilpotentna. Naj bo $h(a_{ij}) = k_{ij}$ za vsak $i, j \in N$ in $k = \max\{k_{ij} | i, j \in N\}$. Potem je $a_{ij}^k = 0$ za vsak $i, j \in N$. Naj bo $l = n^2 k$. Pokazali bomo, da velja $A^l = 0$.
Jasno je, da je $a_{ij}^{(l)} = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{l-1} \in N} a_{ii_1} a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_{l-1} j}$ za $i, j \in N$. Naj bo $T = a_{ii_1} a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_{l-1} j}$ sumand $a_{ij}^{(l)}$. Ker so $a_{ii_1}, a_{i_1 i_2}, ..., a_{i_{l-1} j} \in \{a_{st} | s, t \in N\}$, množica $\{a_{st} | s, t \in N\}$ pa vsebuje največ n^2 različnih elementov, obstajajo taki $t_0, t_1, ..., t_{k-1} \in \{0, 1, ..., l-1\}$, da velja $t_0 < t_1 < ... < t_{k-1}$ in $a_{i_{t_0} i_{t_0+1}} = a_{i_{t_1} i_{t_1+1}} = \cdots = a_{i_{t_{k-1}} i_{t_{k-1}+1}}$ (kjer je $l = n^2 k, i_0 = i$ in $i_l = j$). T potem vsebuje faktor $(a_{i_{t_0} i_{t_0+1}})^k$. Vendar je $(a_{i_{t_0} i_{t_0+1}})^k = 0$, torej je tudi $T = 0$. Ker smo rekli, naj bo T sumand $a_{ij}^{(l)}$, sledi, da je $a_{ij}^{(l)} = 0$. To pomeni, da je $A^l = 0$, torej je A nilpotentna. □

Trditev 3.14. *Naj bo $A \in M_n(S)$ in P permutacijska matrika reda n. Potem je A nilpotentna, če in samo če je PAP^T nilpotentna. Velja, da je $h(A) = h(PAP^T)$.*

Dokaz.
($\Rightarrow$) Naj bo $A^n = 0$. Če je (PAP^T) nilpotentna, mora veljati $(PAP^T)^n = 0$. Razpišemo $(PAP^T)^n = (PAP^T)(PAP^T)\dots(PAP^T) = PAP^TPAP^T\dots PA P^T$. Upoštevamo, da je $P^TP = I$ in tako dobimo $(PAP^T)^n = PA^nP^T$. Ker pa je $A^n = 0$, je tudi $(PAP^T)^n = 0$, torej je PAP^T nilpotentna. Velja $h(A) \leq h(PAP^T)$.
($\Leftarrow$) Naj bo PAP^T nilpotentna, torej je $(PAP^T)^n = 0$. Ker je $P^TP = I$, lahko A^n zapišemo kot $P^TPAP^TPA\dots P^TPAP^TP = P^T(PAP^T)^nP$. Ker pa je $(PAP^T)^n = 0$, sledi $A^n = 0$. Velja $h(A) \geq h(PAP^T)$, zaradi zgornje neenakosti pa je $h(A) = h(PAP^T)$. □

Trditev 3.15. *Če je $A \in M_n(S)$ strogo zgornje (oziroma strogo spodnje) trikotna matrika, potem je A nilpotentna.*

Dokaz. Vzemimo strogo zgornje trikotno matriko $A \in M_n(S)$. Opazimo, da se z večanjem potence zmanjšuje število neničelnih elementov, pri A^n pa je matrika ničelna, torej je $A^n = 0$. □

Trditev 3.16. *Če sta $A \in M_m(S)$ in $B \in M_n(S)$ nilpotentni matriki, potem je nilpotentna tudi matrika $D = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$.*

Dokaz. Ker sta A in B nilpotentni, obstajata taka k_1, k_2, da velja $A^{k_1} = 0$ in $B^{k_2} = 0$. Naj bo $k = \max\{k_1, k_2\}$. Potem je $D^k = \begin{bmatrix} A^k & * \\ 0 & B^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ strogo zgornje trikotna matrika, torej je D nilpotentna. □

Posledica 3.17. *Naj bodo $A_{ij} \in M_{n_i \times m_j}(S)$ matrike, $A_{ii} \in M_{n_i}(S)$ pa nilpotentne matrike za vsak $i \in \{1, 2, ..., r\}$, potem je matrika $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1r} \\ 0 & A_{22} & \dots & A_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{rr} \end{bmatrix}$ prav tako nilpotentna.*

Lema 3.18. *Naj S nima nobenega neničelnega nilpotentnega elementa in naj bo $A = (a_{ij}) \in M_n(S)$ nilpotentna. Potem velja, da je $a_{i_0i_1}a_{i_1i_2}\dots a_{i_{m-1}i_0} = 0$ za vsak $m > 1$ in $i_0, ..., i_m \in N$.*

Dokaz. Naj bo A nilpotentna. Potem je $A^k = 0$ in tako tudi $A^{mk} = (A^k)^m = 0$ za neka k in $m > 1 \in N$. Iz $a^{(mk)}_{i_0 i_0} = 0$ sledi, da je tudi $(a_{i_0 i_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_{m-1} i_0})^k = 0$ (ker je $a_{i_0 i_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_{m-1} i_0}$ sumand $a^{(m)}_{i_0 i_0}$). Ker S nima nobenega neničelnega nilpotentnega elementa, sledi, da je $a_{i_0 i_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_{m-1} i_0} = 0$. □

Trditev 3.19. *Naj bo $A \in M_n(S)$. Potem velja, da*

(i) je A nilpotentna, če je digraf $D(A)$ acikličen;

(ii) je digraf $D(A)$ acikličen, če nima S nobenega neničelnega nilpotentnega elementa in je A nilpotentna.

Dokaz.

(i) Recimo, da A ni nilpotentna. Potem velja $A^n \neq 0$. Po Lemi 3.12(i) ima digraf $D(A)$ pot dolžine n in po Lemi 3.12(ii) sledi, da $D(A)$ vsebuje cikel, kar vodi do protislovja. Torej je A nilpotentna.

(ii) Recimo, da v digrafu $D(A)$ obstaja cikel $(i_0, i_1, ..., i_{m-1}, i_0)$. Potem velja $a_{i_0 i_1} a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_{m-1} i_0} \neq 0$. Po Lemi 3.18 sledi, da matrika A ni nilpotentna (saj S nima nobenega neničelnega nilpotentnega elementa). To pa je protislovje. □

Trditev 3.20. *Naj bo $A \in M_n(S)$. Če so $a^{(k)}_{ii} = 0$ za vsak $i, k \in N$, potem je $A^n = 0$, kjer je $A^k = (a^{(k)}_{ij})$.*

Dokaz. Naj matrika A ne bo nilpotentna, torej $A^n \neq 0$. Po Lemi 3.12 sledi, da ima digraf $D(A)$ cikel p z dolžino $\leq n$. Naj bo $p = (i_0, i_1, ..., i_{k-1}, i_0)$, kjer je $k = l(p)$. Potem je $a_{i_0 i_1} a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_{k-1} i_0} \neq 0$, iz česar sledi, da je $a^{(k)}_{i_0 i_0} \neq 0$. Torej, mora biti matrika A nilpotentna. □

Trditev 3.21. *Naj bo $A \in M_n(S)$. Če so vsi glavni permanentni minorji matrike A enaki 0, potem je $A^n = 0$.*

Dokaz. Naj bo $A^n \neq 0$. Potem po Lemi 3.12 digraf $D(A)$ vsebuje enostaven cikel dolžine $\leq n-1$, recimo $(i_0, ..., i_{k-1}, i_0)$, kjer je $1 \leq k \leq n-1$. Od tod sledi, da je $a_{i_0 i_1} a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_{k-1} i_0} \neq 0$ in da so $i_0, i_1, ..., i_{k-1}$ paroma različni. Tako je tudi per $A[i_0, i_1, ..., i_{k-1} | i_0, i_1, ..., i_{k-1}] \neq 0$ (ker je produkt $a_{i_0 i_1} a_{i_1 i_2} ... a_{i_{k-1} i_0}$ sumand glavnega permanentnega minorja per $A[i_0, i_1, ..., i_{k-1} | i_0, i_1, ..., i_{k-1}]$). To je protislovje. □

Trditev 3.22. *Če S nima nobenega neničelnega nilpotentnega elementa in je $A \in M_n(S)$ nilpotentna, potem je*

(i) $a_{i_0 i_1} a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_m i_0} = 0$ *za vsa pozitivna cela števila m in katerekoli $i_0, i_1, ...,$ $i_m \in N$;*

(ii) per A = *0.*

Dokaz.

(i) Sledi po Trditvi 3.19(*ii*).

(ii) Recimo, da je per $A \neq 0$. Potem obstaja tak $\sigma \in S_n$, da $a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ $\neq 0$ (ker je $a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ sumand permanente). Ker je $\sigma^m(1) \in N$ za vsako pozitivno število m, obstajata taka $s, t \in N \cup \{0\}$, da sta $s < t$ in $\sigma^s(1) = \sigma^t(1)$ ter, da so $\sigma^s(1), \sigma^{s+1}(1), ..., \sigma^{t-1}(1)$ paroma različni ($\sigma^0(1) = 1$). Potem je $a_{\sigma^s(1)\sigma^{s+1}(1)} \cdots a_{\sigma^{t-1}(1)\sigma^s(1)} \neq 0$ (ker je $a_{\sigma^s(1)\sigma^{s+1}(1)} \cdots a_{\sigma^{t-1}(1)\sigma^s(1)}$ faktor $a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$) in tako ima digraf $D(A)$ cikel $(\sigma^s(1), ..., \sigma^{t-1}(1), \sigma^s(1))$. Po Trditvi 3.19(*ii*) A ni nilpotentna. To vodi v protislovje. □

Izrek 3.23. *Za vsako matriko $A \in M_n(S)$ so sledeče izjave ekvivalentne.*

(i) A je nilpotentna.

(ii) Vse glavne podmatrike A so nilpotentne.

(iii) Vsi glavni permanentni minorji A so 0.

(iv) $A^n = 0$.

(v) Za vsak $k \in N$ *so vsi glavni diagonalni elementi matrike* A^k *enaki 0.*

Dokaz.

$(i) \implies (ii)$ Za vse $r \in N$ naj bo $B = A[i_0, i_1, ..., i_r | i_0, i_1, ..., i_r]$ glavna podmatrika matrike A reda r. Potem je digraf $D(B)$ poddigraf digrafa $D(A)$. Ker je A nilpotentna, je $D(A)$ acikličen (po Trditvi 3.19(ii)), prav tako tudi $D(B)$. Po Trditvi 3.19(i) je B nilpotentna.

$(ii) \implies (iii)$ Sledi po Trditvi 3.22(ii).

$(iii) \implies (iv)$ Sledi po Trditvi 3.21.

$(iv) \implies (v)$ Enostavno preverimo po Trditvi 3.22(i).

$(v) \implies (i)$ Sledi po Trditvi 3.20. □

Če S nima nobenega neničelnega nilpotentnega elementa in če je $A \in M_n(S)$ nilpotentna, potem velja, da je $A^n = 0$ (oziroma $h(A) \leq n$). Ampak to ne velja za vse nilpotentne matrike nad splošnim komutativnim antikolobarjem.

Zgled 3.24. Naj bo S komutativni antikolobar iz Zgleda 3.4. Naj bo $A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.7 \\ 0.9 & 0.6 \end{bmatrix} \in M_2(S)$. Poglejmo, kaj dobimo.

$$
\begin{aligned}
A^2 &= \begin{bmatrix} 0.8 & 0.7 \\ 0.9 & 0.6 \end{bmatrix}^2 \\
&= \begin{bmatrix} ((0.8+0.8-1) \vee 0) \vee ((0.7+0.9-1) \vee 0) & ((0.9+0.8-1) \vee 0) \vee ((0.6+0.9-1) \vee 0) \\ ((0.8+0.7-1) \vee 0) \vee ((0.7+0.6-1) \vee 0) & ((0.9+0.7-1) \vee 0) \vee ((0.6+0.6-1) \vee 0) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix}, A^4 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}, A^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.1 & 0 \end{bmatrix}, A^6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Vidimo, da $A^2 \neq 0$ in da je $h(A) = 6 < 2$.

3.4 Simultana nilpotenca in nilpotentni indeks

V tem poglavju bomo govorili o nilpotentnem indeksu in povedali potreben in zadosten pogoj, da je $n \times n$ nilpotentna matrika nad komutativnim antikolobarjem nilpotentnega indeksa r, kjer je $2 \leq r \leq n$. Podali bomo metodo za računanje nilpotentega indeksa katerekoli nilpotentne matrike nad komutativnim celim antikolobarjem.

Definicija 3.25. *Za $A \in M_n(S)$ naj bo $Q_r(A) = \{A[U|V]; |U| = |V| = r$ in $|U \cup V| = r+1\}$.*

Izrek 3.26. *Če S nima nobenega neničelnega nilpotentnega elementa in je $A \in M_n(S)$ nilpotentna matrika, potem za vsak r, kjer je $1 \leq r \leq n-1$, velja $A^r = 0$, če in samo če je* per *$B = 0$ za vsak $B \in Q_r(A)$.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Naj bosta $A^r = 0$ in $B \in Q_r(A)$. Po Trditvi 3.14 lahko domnevamo, da je $B = A[1, 2, ..., r|j_1, j_2, ..., j_r]$, kjer so $j_1, j_2, ..., j_r \in N$ paroma različni (P naj bo taka permutacijska matrika, ki preslika ustrezne vrstice na prvih r vrstic). Ker je $|\{1,\ 2,\ ...,\ \mathrm{r}\} \cup \{j_1, j_2, ..., j_r\}| = r + 1$, obstaja tak $i_0 \in \{1,\ 2,\ ...,\ \mathrm{r}\}$ in tak $j_s \in \{j_1, j_2, ..., j_r\}$, da sta $i_0 \notin \{j_1, j_2, ..., j_r\}$ in $j_s \notin \{1,\ 2,\ ...,\ \mathrm{r}\}$. Po Lemi 3.11 lahko domnevamo, da je $j_s = j_r$. Potem je $\{1, ..., i_0-1, i_0+1, ..., r\} = \{j_1, j_2, ..., j_{r-1}\}$ in $j_r > r$. Jasno je, da je per $B = \sum_{\sigma \in F} a_{1\sigma(1)} \dots a_{r\sigma(r)}$, kjer je F množica vseh bijekcij iz množice $\{1, 2, ..., r\}$ v množico $\{1, ..., i_0 - 1, i_0 + 1, ..., r, j_r\}$.
Naj bo per $B \neq 0$. Potem obstaja tak $\sigma \in F$, da je¸ $a_{1\sigma(1)} \dots a_{i_0\sigma(i_0)} \dots a_{r\sigma(r)} \neq 0$ (ker je $a_{1\sigma(1)} \dots a_{i_0\sigma(i_0)} \dots a_{r\sigma(r)}$ sumand $\sum_{\sigma \in F} a_{1\sigma(1)} \dots a_{r\sigma(r)}$). Če je $\sigma(i_0) \neq j_r$, potem je $\sigma(i_0) \in \{j_1, ..., j_{r-1}\} = \{1, ..., i_0-1, i_0+1, ..., r\}$. Tako obstaja tak $i_1 \in \{1, ..., i_0 - 1, i_0 + 1, ..., r\}$, da je $\sigma(i_0) = i_1$. Prav tako, če je $\sigma(i_1) \neq j_r$, je $\sigma(i_1) \in \{j_1, j_2, ..., j_{r-1}\}$ in obstaja tak $i_2 \in \{1, ..., i_0 - 1, i_0 + 1, ..., r\}$, da je $\sigma(i_1) = i_2$. Tako nadaljujemo, dokler ne najdemo takega i_s, kjer je $0 \leq s \leq r$, da velja $\sigma(i_s) = j_r$. V splošnem, če je $\sigma(i_{t-1}) \neq j_r$, je $\sigma(i_{t-1}) \in \{j_1, j_2, ..., j_{r-1}\}$ $(t \geq 1)$ in obstaja tak $i_t \in \{1, ..., i_0-1, i_0+1, ..., r\}$,

da je $\sigma(i_{t-1}) = i_t$. Pravzaprav, če velja $i_t \neq j_r$ za vsak t, potem morata obstajati taki dve števili u in v, da bo $i_u = i_v (u < v)$. Torej ima digraf $D(A)$ cikel $(i_u, i_{u+1}, ..., i_{v-1}, i_u)$, kar pa vodi v protislovje. Števila $i_0, i_1, ..., i_m$ morajo biti paroma različna, saj ima drugače digraf D(A) cikel.
V nadaljevanju bomo pokazali, da velja $m = r$.

Recimo, da je $m < r$. Naj bo $\{k_1, ..., k_{r-m}\} = \{1, 2, ..., r\} \backslash \{i_0, i_1, ..., i_{m-1}\}$. Potem

$$\begin{aligned}\{\sigma(k_1), ..., \sigma(k_{r-m})\} &= \{\sigma(1), ..., \sigma(r)\} \backslash \{\sigma(i_0), \sigma(i_1), ..., \sigma(i_{m-1})\} \\ &= \{1, 2, ..., i_0 - 1, i_0 + 1, ..., r, j_r\} \backslash \{i_1, i_2, ..., i_{m-1}, i_m\} \\ &= \{1, 2, ..., r, j_r\} \backslash \{i_0, i_1, ..., i_{m-1}, j_r\} (\text{ker je } j_r = i_m) \\ &= \{1, 2, ..., r\} \backslash \{i_0, i_1, ..., i_{m-1}\} \\ &= \{k_1, k_2, ..., k_{r-m}\}.\end{aligned}$$

Zato lahko produkt $T = a_{k_1\sigma(k_1)} \dots a_{k_{r-m}\sigma(k_{r-m})}$ zapišemo kot sumand per $A[k_1, ..., k_{r-m} | k_1, ..., k_{r-m}]$. Ampak po Izreku 3.22 sledi, da je per $A[k_1, ..., k_{r-m} | k_1, ..., k_{r-m}] = 0$. Sledi T = 0 in prav tako $a_{1\sigma(1)} \dots a_{r\sigma(r)} = 0$. To pa je protislovje, torej je $m = r$.
Ker so $i_1, i_2, ..., i_{r-1} \in \{1, ..., i_0 - 1, i_0 + 1, ..., r\}$ in ker so ta števila paroma različna, je $\{i_1, ..., i_{r-1}\} = \{1, ..., i_0 - 1, i_0 + 1, ..., r\}$ in tako $\{i_0, i_1, ..., i_{r-1}\} = \{1, 2, ..., r\}$. Potem je

$$0 \neq a_{1\sigma(1)} \dots a_{r\sigma(r)} = a_{i_0\sigma(i_0)} a_{i_1\sigma(i_1)} \dots a_{i_{r-1}\sigma(i_{r-1})} = a_{i_0 i_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_{r-1} i_r},$$

kar pomeni, da ima digraf $D(A)$ pot $p = (i_0, i_1, ..., i_r)$ dolžine r in tako $A^r \neq 0$ (po Lemi 3.12(i)). S tem pridemo do protislovja, torej je per $B = 0$.

($\Leftarrow$) Recimo, da je $A^r \neq 0$. Potem digraf D(A) vsebuje pot $p = (i_0, i_1, ..., i_r)$ (po Lemi 3.12(i)). Ker je A nilpotentna, je digraf $D(A)$ acikličen in so tako števila $i_0, i_1, ..., i_r$ paroma različna. Prav tako je $T = a_{i_0 i_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_{r-1} i_r} \neq 0$. Potem je per $A[i_0, i_1, ..., i_{r-1} | i_1, i_2, ..., i_r] \neq 0$, ker je T sumand per $A[i_0, i_1, ..., i_{r-1} | i_1, i_2, ..., i_r]$. Vendar je per $A[i_0, i_1, ..., i_{r-1} | i_1, i_2, ..., i_r] \in Q_r(A)$. To vodi v protislovje. □

Po Izreku 3.26 sledi

Izrek 3.27. *Če S nima nobenega neničelnega nilpotentnega elementa in je $A \in M_n(S)$ nilpotentna matrika, potem je $h(A) = r$, če in samo če je* per *$B = 0$ za vsak $B \in Q_r(A)$ in je* per *$C \neq 0$ za $C \in Q_{r-1}(A)$, kjer velja $2 \leq r \leq n-1$.*

Izrek 3.28. *Če S nima nobenega neničelnega nilpotentnega elementa in je $A \in M_n(S)$ nilpotentna matrika, potem je $h(A) = n$, če in samo če je* padj *$A \neq 0$.*

Dokaz.
($\Rightarrow$) Naj bo $h(A) = n$. Če je padj $A = 0$, potem je per $A(i|j) = 0$ za vsak $i, j \in N$ in prav tako je tudi per $B = 0$ za vsak $B \in Q_{n-1}(A)$. Po Izreku 3.24 velja, da je $A^{n-1} = 0$ in $h(A) \leq n-1$. To je protislovje. Zato je padj $A \neq 0$.
($\Leftarrow$) Naj bo padj $A \neq 0$. Če je $h(A) < n$, potem je $A^{(n-1)} = 0$. Po Izreku 3.24 sledi, da je per $B = 0$ za vsak $B \in Q_{n-1}(A)$. Za vsak $i, j \in$ N ob pogoju, da je $i = j$, velja, da je per $A(i|i) = 0$ (po Izreku 3.22), če pa je $i \neq j$, potem sta $A(i|j) = A[1, ..., i-1, i+1, ..., n|1, ..., j-1, j+1, ..., n] \in Q_{n-1}(A)$ in per $A(i|j) = 0$. Zato je padj $A = 0$. To je protislovje. Velja torej, da je $h(A) = n$. □

Lema 3.29. *Če je S cel in je $A \in M_n(S)$ nilpotentna matrika, potem obstaja $n \times n$ permutacijska matrika P, da je $P^T AP$ strogo zgornje trikotna matrika.*

Dokaz. Izrek 3.25 nam pove, da če je S cel in je $A \in M_n(S)$ nilpotentna, vsebuje A vsaj eno ničelno vrstico. Naj bo P permutacijska matrika, ki zamenja i-to vrstico z zadnjo, kjer je i-ta vrstica ničelna. Prav tako zamenja tudi i-ti stolpec z zadnjim. Postopek ponovimo na matriki brez zadnje vrstice in stolpca. Tako nadaljujemo, dokler ne dobimo strogo zgornje trikotne matrike. □

Zgled 3.30. *Naj bo* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *S preoblikovanjem dobimo:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Opomba 3.31. Po Lemi 3.29 sledi, da ima A vsaj eno ničelno vrstico, če je S cel in je $A \in M_n(S)$ nilpotentna.

Opomba 3.32. Pogoj v Lemi 3.27., da je S cel, je nujen. Za primer vzemimo antikolobar iz Zgleda 3.9. Antikolobar je cel, samo če velja $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_1 \wedge \sigma_2 = 0$. Naj bo $A = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(B)$. Potem je A nilpotentna, ko je $A^2 = 0$. Ampak za katerokoli 2×2 permutacijsko matriko P, P^TAP ni strogo zgornje trikotna matrika.

Naj bosta $A \in M_n(S)$ in $U = \{i \in N | A_{i*} = 0\}$, kjer je A_{i*} i-ta vrstica A. Definiramo $\Delta(A) = A(U|U)$. Nadalje, definirajmo še, da sta $\Delta_0(A) = A$ in $\Delta_k(A) = \Delta(\Delta_{k-1}(A))$ za $k = 1, 2, 3, ...$

Lema 3.33. *Če je S cel in za $A \in M_n(S)$ velja, da je $A \neq 0$, potem je*

(i) $A^r = 0$, če in samo če je $(\Delta(A))^{r-1} = 0$;

(ii) $h(\Delta(A)) = h(A) - 1$, če je A nilpotentna.

Dokaz.

(i) ($\Leftarrow$) Naj bo $((\Delta(A))^{r-1} = 0$. Predpostavimo, da je $A^r \neq 0$. Potem digraf $D(A)$ vsebuje pot $P = (i_0, i_1, ..., i_r)$ dolžine r (po Lemi 3.12(i)). Jasno je, da velja $i_0, i_1, ..., i_{r-1} \notin U$. Potem je $P_1 = (i_0, i_r, ..., i_{r-1})$ pot dolžine $r - 1$ v digrafu $D(\Delta(A))$, in zato je $(\Delta(A))^{r-1} \neq 0$ (po Lemi 3.12(i). To je protislovje.

($\Rightarrow$) Naj bo $A^r = 0$. Predpostavimo, da je $(\Delta(A))^{r-1} \neq 0$. Potem obstajajo taki $j_0, j_1, ..., j_{r-1} \in N \backslash U$, da je $P_2 = (j_0, j_1, ..., j_{r-1})$ pot dolžine $r-1$ v digrafu $D(\Delta(A))$. Ker $j_{r-1} \notin U$, je $A_{j_{r-1}*} \neq 0$ in tako obstaja tak $j_r \in N$, da velja $a_{j_{r-1}j_r} \neq 0$. Tako je $P_3 = (j_0, j_1, ..., j_{r-1}, j_r)$ pot dolžine r v digrafu $D(A)$ (ker je S cel). Potem je $A^r \neq 0$. To je protislovno z $A^r = 0$ in dokazuje (i).

(ii) Naj bo $h(A) = r$. Potem je $A^r = 0$ in $A^{r-1} \neq 0$. Po (i) velja, da je $(\Delta(A))^{r-1} = 0$ in $(\Delta(A))^{r-2} \neq 0$. Tako je $h(\Delta(A)) = r - 1 = h(A) - 1$. To dokazuje (ii). □

Izrek 3.34. *Če je S cel in je $A \in M_n(S)$ ter velja $A \neq 0$, potem sta sledeči trditvi ekvivalenti.*

(i) A je nilpotentna in $h(A) = r$.

(ii) $\Delta_{r-1}(A) = 0$ in $\Delta_{r-2}(A) \neq 0$.

Dokaz.
$(i) \implies (ii)$ Po Lemi 3.33(ii) velja, da $h(\Delta_k(A)) = h(A) - k$ za vsak k, kjer $1 \leq k \leq h(A) - 1$, če je A nilpotentna. Naj bo $h(A) = r$. Potem sta $h(\Delta_{r-1}(A)) = r - (r-1) = 1$ in $h(\Delta_{r-2}(A)) = r - (r-2) = 2$ in tako $\Delta_{r-1}(A) = 0$ in $\Delta_{r-2}(A) \neq 0$.
$(ii) \implies (i)$ Če je $\Delta_{r-1}(A) = 0$ in $\Delta_{r-2}(A) \neq 0$, potem je $\Delta_{r-1}(A)$ nilpotentna in $h(\Delta_{r-1}(A)) = 1$. Po Lemi 3.33(i) velja, da so $\Delta_{r-2}(A), \Delta_{r-3}(A), ..., \Delta_1(A)$ nilpotentne matrike. Potem je $h(A) = (r-1) + h(\Delta_{r-1}(A)) = (r-1) + 1 = r$. To dokončuje dokaz. □

Izrek 3.31 podaja kriterij za nilpotentnost matrik in metodo računanja nilpotentnega indeksa nilpotentnih matrik nad komutativnim celim antikolobarjem: za vsako $n \times n$ matriko A ($A \neq 0$) nad komutativnim celim antikolobarjem S izračunaj matrike $\Delta_k(A), k = 1, 2, ...$ Če obstaja pozitivno število

r, da sta $\Delta_{r-1}(A) = 0$ in $\Delta_{r-2}(A) \neq 0$, potem je A nilpotentna in $h(A) = r$. Drugače A ni nilpotentna.

Zgled 3.35. Vzemimo matriki $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ nad komutativnim celim antikolobarjem $\mathbb{Z}^+$. Izračunamo $\Delta_1(A) = \Delta(A) = A(4|4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$, $\Delta_2(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$ in $\Delta_3(A) = [0]$. Tako je A nilpotentna in $h(A) = 4$. Vendar sta $\Delta_1(B) = \Delta(B) = B(4|4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$ in $\Delta_2(B) = \Delta_1(B)(2|2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$ in tako B ni nilpotenta.

Metoda pride do izraza še posebej pri velikih matrikah, ker z računanjem potenc le-teh porabimo veliko časa. Recimo, da je $h(A) = r$. Potem za računanje potenc matrike $A \in M_n(S)$ potrebujemo rn^3 operacij (množenje matrik ima časovno zahtevnost $\mathcal{O}(n^3)$), za računanje delt pa rn^2 operacij.

Literatura

[1] Adjugate matrix. Dosegljivo: https://en.wikipedia.org/wiki/Adjugate_matrix. [Dostopano 25. 8. 2018].

[2] Determinant of Transpose. Dosegljivo: https://proofwiki.org/wiki/Determinant_of_Transpose. [Dostopano 13. 9. 2018].

[3] Digraf. Dosegljivo: https://www.cs.odu.edu/~cs381/cs381content/digraph/definition.html. [Dostopano 23. 5. 2018].

[4] Laplace expansion of the determinant. Dosegljivo: http://calvino.polito.it/~adiscala/didattica/Lingotto/2009/English/Lectures/EN-LeLing12.pdf. [Dostopano 17. 9. 2018].

[5] Permanent. Dosegljivo: https://en.wikipedia.org/wiki/Permanent_(mathematics). [Dostopano 16. 6. 2018].

[6] Song-Chol Han, Hong-Xing Li, and Jia-Yin Wang. On nilpotent incline matrices. In *Linear Algebra Appl.*, volume 406, pages 201–2017. Elsevier, 2005.

[7] Udo Hebisch and Hanns Joachim Weinert. *Semirings, Algebraic Theory and Applications in Computer Science*. B. G. Teubner, 1998.

[8] Minor. Dosegljivo: http://mathworld.wolfram.com/Minor.html. [Dostopano: 16. 5. 2018].

[9] Yi-Jia Tan. On nilpotency of matrices over antirings. In *Linear Algebra Appl.*, volume 433, pages 1541–1554. Elsevier, 2010.

[10] Yijia Tan. On nilpotent matrices over antirings. In *Linear Algebra Appl.*, volume 64, pages 1243–1253. Elsevier, 2008.

[11] Jituan Zhou and Linzhang Lu. On simultaneously nilpotent antiring matrices. In *Computers And Mathematics with Appl.*, volume 64, pages 2912–2916. Elsevier, 2012.