

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za računalništvo in informatiko

Boris Horvat

**PREDSTAVITVE GRAFOV Z
ENOTSKO RAZDALJO**

DOKTORSKA DISERTACIJA

MENTOR: prof. dr. Franc Solina
SOMENTOR: prof. dr. Tomaž Pisanski

Ljubljana, 2009

Povzetek

Disertacija opisuje probleme povezane z grafi, ki se jih da v evklidski ravnini predstaviti tako, da vozlišča predstavimo s točkami v ravnini povezave pa z daljicami dolžine ena. Probleme preučujemo tako z računalniškega (računskega) kot z matematičnega vidika. V uvodnem poglavju povzamemo do sedaj znane rezultate (predvsem matematične) teorije predstavitev grafov z enotsko razdaljo. Ob tem poenotimo terminologijo rezultatov, ki so nastajali v zadnjih petdesetih letih ter jo dopolnimo z dokazi nekaj manjših izrekov. Omenimo tudi prve poskuse generiranja majhnih grafov z enotsko razdaljo z računalnikom in predstavimo rezultate drugih avtorjev. V drugem poglavju obravnavamo najpomembnejše grafovске produkte k -razsežnih grafov z enotsko razdaljo in povzamemo rezultate iz [59]. V tretjem poglavju ovržemo napačno domnevo, da Heawoodov graf ni graf z enotsko razdaljo. V četrtem poglavju naštejemo vse, tudi degenerirane predstavitve z enotsko razdaljo Petersenovega grafa v ravnini ter obravnavamo relacije med njimi; povzamemo rezultate iz [58]. V petem poglavju opazujemo posplošene Petersenove grafe in I -grafe. Dokažemo izrek o izomorfizmih I -grafov in s tem obstoj predstavitve z enotsko razdaljo za veliko večino I -grafov. Postavimo nekaj domnev, ki jih potrdimo s pomočjo računalnika za vse I -grafe na največ 2000 vozliščih. V šestem poglavju se ukvarjamo s teorijo izračunljivosti in opazujemo težavnost problema obstoja degenerirane predstavitve grafov z enotsko razdaljo. Dokažemo, da sta odločitveni problem obstoja k -razsežne degenerirane predstavitve z enotsko razdaljo in odločitveni problem obstoja k -razsežne degenerirane koordinatizacije z enotsko razdaljo za dani graf \mathcal{NP} -polna problema. V zadnjem delu disertacije predstavimo heuristiko za "risanje" grafov z enotsko razdaljo, ki temelji na algoritmu SPE, ki ga je leta 2003 v [1] predstavil D. K. Agrafiotis. Definiramo dilacijski koeficient in predstavimo teoretično dobljene meje zanj. Teoretične rezultate primerjamo z rezultati dobljenimi z algoritmom za risanje grafov, ki temelji na simulaciji fizikalnega modela z vzmetmi in z algoritmom, ki s pomočjo lokalne optimizacije minimizira dilacijski koeficient. Sedmo poglavje povzema rezultate objavljene v [63].

Ključne besede: graf z enotsko razdaljo, predstavitev, realizacija, koordinatizacija, degenerirana predstavitev, grafovski produkti, Heawoodov graf, Petersenov graf, posplošeni Petersenovi grafi, I -grafi, \mathcal{NP} -poln problem, dilacijski koeficient, algoritem, izomorfizem grafov

Abstract

The doctoral thesis describes problems concerning graphs that can be represented in the Euclidean plane (or k -space) in such a way, that vertices are represented as points in the plane (k -space) and edges as line segments of unit lengths. Problems are observed from a computational and a mathematical point of view. In the first part of the thesis the (already known, mainly mathematical) theory of unit-distance graph representations is presented; at the same time the terminology of the results is unified and several propositions are proved. First computer aided attempts to generate small graphs with a unit-distance representation are discussed. In the following chapter the well-known graph products of k -dimensional unit-distance graphs are studied; the chapter summarizes the results from [59]. The third chapter disproves the wrong assumption that Heawood graph is not a unit-distance graph, by providing the unit-distance coordinatization of it. In the fourth chapter all degenerate unit-distance representations of the Petersen graph in the Euclidean plane are presented and some relationships among them are observed; see [58]. In the following chapter generalized Petersen graphs and I -graphs are observed. Necessary and sufficient conditions for two I -graphs to be isomorphic are given. As a corollary it is shown that a large subclass of I -graphs can be drawn with unit-distances in the Euclidean plane by using the representation with a rotational symmetry. Conjectures concerning unit-distance coordinatizations and highly-degenerate unit-distance representations of I -graphs are stated and verified for all I -graphs up to 2000 vertices. In the sixth chapter the decision problems that ask about the existence of a degenerate k -dimensional unit-distance representation or coordinatization of a given graph are shown to be \mathcal{NP} -complete. In the last chapter of the thesis a heuristics that draws a given graph in the Euclidean plane by minimizing the quotient of the longest and the shortest edge length is presented; see SPE algorithm in [1]. The dilation coefficient of a graph is introduced and theoretically obtained bounds for the dilation coefficient of a complete graph are given. The calculated upper bounds for the dilation coefficients of complete graphs are compared to the values obtained by three graph-drawing algorithms, see [63].

Keywords: unit-distance graph, representation, realization, coordinatization, degenerate representation, graph product, Heawood graph, Petersen graph, generalized Petersen graph, I -graph,

\mathcal{NP} -complete problem, dilation coefficient, algorithm, graph isomorphism

Izjava o avtorstvu doktorske disertacije

Podpisani *Boris Horvat*, z vpisno številko *63030387*, sem avtor doktorske disertacije z naslovom *Predstavitve grafov z enotsko razdaljo*.

S svojim podpisom zagotavljam, da:

- sem doktorsko disertacijo izdelal samostojno pod vodstvom mentorja *prof. dr. Franca Soline* in somentorstvom *prof. dr. Tomaža Pisanskega*,
- so elektronska oblika doktorske disertacije, naslov (slov., angl.), povzetek (slov., angl.) ter ključne besede (slov., angl.) identične s tiskano obliko doktorske disertacije,
- soglašam z javno objavo elektronske oblike doktorske disertacije v zbirki "Dela FRI".

V Ljubljani, 1. aprila 2009

Boris Horvat

Najlepše se zahvaljujem vsem, ki so kakorkoli pripomogli k nastanku te disertacije.

Najprej in predvsem gre zahvala mojemu (ko)mentorju prof. dr. Tomažu Pisanskemu, ker mi je omogočil zaposlitev v vlogi mladega raziskovalca na Inštitutu za matematiko, fiziko in mehaniko. V vlogi mentorja me je vodil, podpiral in spodbujal pri raziskovanju in pisanju znanstvenih člankov ter doktorske disertacije. Hvala mu tudi zato, ker je to počel iz ravno prave razdalje, da me je naučil samostojnega raziskovanja. Hvala tudi mentorju prof. dr. Francu Solini za vso podporo in pomoč.

Hvala sodelavcem, predvsem Primožu, Alenu, Arjani, Marku in Gašperju. Delo z vami (predvsem na projektih) je bilo res prijetno in zabavno. Hvala sodelavcem na Hruški, predvsem Damijanu, da ste zmogli brez mene. Beseda zahvale gre tudi vsem mojim prijateljem, predvsem za vso njihovo potrpežljivost in razumevanje ob nenehnem pomanjkanju mojega prostega časa.

Zahvala gre tudi mami Tereziji in očetu Martinu ker sta mi omogočila študij in mi stala ob strani. Zahvalil bi se rad tudi Heleni in Pavlu za njuno velikodušno pomoč pri skrbi za Niko v času pisanja te disertacije.

Predvsem pa iskrena hvala Petri in Niki za vso njuno odrekanje, razumevanje, prilagajanje, potrpežljivost in podporo. Hvala vama za srečo, ljubezen, smeh in veselje s katerim napolnjujeta moje življenje. Hvala vama za to, da me vsak dan znova in znova opominjata, da tistih stvari, ki v življenju res nekaj pomenijo ne odkriješ v delu in z delom.

Kazalo

Uvod	1
1 Dimenzija in evklidska dimenzija	5
1.1 Osnovne definicije	5
1.2 O predstavitev in realizacijah	14
1.3 Predstavitve grafov z enotsko razdaljo	16
1.4 Kromatično število prostora	20
1.5 Togost in fleksibilnost	22
1.6 Znane razsežnosti grafov	27
1.6.1 Povezave z grafovskimi invariantami	33
1.6.2 Prepovedani grafi za neko dimenzijo	38
1.6.3 Poskusi generiranja grafov z enotsko razdaljo z računalnikom	40
1.7 Subdivizija povezav grafa	42
2 Produkti grafov z enotsko razdaljo	43
2.1 Kartezični produkt grafov	43
2.2 Ostali grafovski produkti	52
3 Heawoodov graf je graf z enotsko koordinatizacijo	55
3.1 Heawoodov graf	55
4 Predstavitve z enotsko razdaljo Petersenovega grafa v ravnini	61
4.1 Prepovedani podgrafi Petersenovega grafa	61

4.2	Predstavitve z enotsko razdaljo v ravnini	64
4.3	Relacije med predstavitvami Petersenovega grafa	77
5	I-grafi in enotska razdalja	81
5.1	Posplošeni Petersenovi grafi	81
5.2	I-grafi	88
5.2.1	Predstavitve I-grafov z rotacijsko simetrijo	92
5.2.2	Koordinatizacije z enotsko razdaljo in rotacijsko simetrijo	100
5.2.3	Visoko degenerirane predstavitve z enotsko razdaljo in rotacijsko simetrijo	101
6	Izračunljivost	111
6.1	Sfere	112
6.2	Problem obstoja degenerirane predstavitve grafa z enotsko razdaljo	114
6.3	Problem obstoja nedegenerirane predstavitve grafa z enotsko razdaljo	120
7	Dilacijski koeficient	123
7.1	Dilacijski koeficient	124
7.2	Energija predstavitve in algoritmi za risanje grafov v ravnini	125
7.3	Polni grafi	127
7.4	Rezultati in diskusija	135
8	Zaključek	141
	Literatura	143
	Stvarno kazalo	153

Uvod

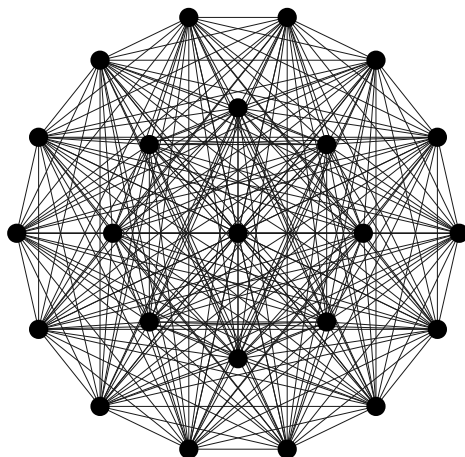
Velika prednost geometrije je v dejstvu, da lahko v njej pridejo občutki na pomoč misli in pomagajo poiskati nadaljevanje poti; zato želijo mnogi misleci predstaviti analitične probleme v geometrijski obliki. Žal pa nas naši čuti ne morejo ponesti zelo daleč ter nas zapustijo, ko želimo poleteti onstran klasičnih treh dimenzij.

– Henri Poincaré, v knjigi “Science et méthode”, 1908

Molekularna mehanika predstavlja pomembno področje računsko intenzivne in matematične kemije [55, 61, 62, 69, 91, 95, 96, 97]. Z uporabo Newtonove mehanike želi zagotoviti oceno energije opazovane molekularne strukture, ki je določena z razdaljo med sosednjimi atomi (vozlišči), iz kotov med sosednjimi povezavami, iz torzijskih kotov ter iz van der Waalsovih elektrostatičnih vezi. Optimalna geometrija molekularne strukture ustreza minimalni energiji strukture. Koordinate atomov v molekuli znamo torej določiti le iz topoloških informacij o povezavah. Te ideje uporabljamo tudi za avtomatizirano risanje grafov v ravnini oziroma v prostoru, s čimer se med drugim ubadamo v diskretni matematiki in teoretičnemu računalništvu. Podobno kot pri molekularni mehaniki tudi tu minimiziramo “energijo predstavitve”; upoštevamo predvsem razdalje med sosednjimi, včasih pa tudi med nesosednjimi vozlišči. Pogosto uporabimo algoritme, ki temeljijo na metodi lokalne optimizacije, glej na primer [80].

Leta 2004 je teoretični kemik W. A. Svrcek-Seiler svoje predavanje z naslovom “0.02 € on Embedding”, ki ga imel je v okviru seminarja “2004 Winterseminar” na Bledu končal z naslednjimi vprašanji: “ ... Brez stroge matematične natančnosti bi si lahko mislili, da SPE algoritem [1] vedno ‘lepo’ nariše (nekatero) grafe, posebno če imajo veliko povezav. Zakaj je temu tako? Zakaj so objekti, če uporabljamo SPE algoritem in za velikosti vseh sosednosti (zvez) vzamemo vrednost 1, vedno narisani podobno kot 23 objektov na sliki 1? Čemu so

nekateri objekti vedno (celo rekurzivno) predstavljeni znotraj območja? Kako to, da se število objektov v notranjosti spreminja s številom objektov? Kako se spreminja?”.



Slika 1: Simetrična predstavitev $n = 23$ objektov v ravnini, ki jo dobimo, če uporabimo SPE algoritem (predstavljen v [1]) in za velikosti vseh sosednosti vzamemo vrednost 1.

Njegova vprašanja so služila kot motivacija za raziskovalno delo, ki je privedlo do rezultatov vsebovanih v tej disertaciji. Rezultati, ki jih je D. K. Agrafiotis predstavil v [1], so omogočali implementacijo enostavnega robustnega algoritma namenjenega “risanju” polnih grafov podanih z matriko razdalj v prostorih s podano dimenzijo; ta algoritem je D. K. Agrafiotis poimenoval SPE. SPE algoritem na vходу vzame matriko sosednosti (ang. proximities) med n objekti oziroma v jeziku teorije grafov matriko razdalj polnega grafa. V primeru, ko je v željeni dimenziji iz podanih razdalj mogoče narisati graf, algoritem v linearnem času vrne dober rezultat, to je predstavitev z majhno interno dimenzijo. V primeru, ko nimamo (podanih, izmerjenih, ...) vseh relacij med n objekti, pa se postavi vprašanje kako izbrati manjkajoče vrednosti. Ker želimo, da bi SPE algoritem deloval tudi ko opazujemo grafe, ki niso polni, ga spremenimo tako, da na vsakem koraku krči oziroma razteguje povezave (namesto da na vsakem koraku izbere poljubni vozlišči, lahko tudi nesosednji, in ju premakne ter tako spremeni razdaljo med njima). Pri eksperimentiranju z novim algoritmom se je izkazalo, da v primeru, ko mu za matriko razdalj podamo matriko samih enakih vrednosti, algoritem vrača simetrične predstavitve podobne tisti na sliki 1; tako kot je to opazil W. A. Svrcek-Seiler. Izkazalo se je tudi, da algoritem na grafih ki niso polni, ko za matriko razdalj vzamemo kar matriko sosednosti, te grafe pogosto nariše degenerirano; na primer Petersenov graf kot enakostranični trikotnik.

Pri raziskovanju razlogov za ta pojava smo kmalu naleteli na kratek članek [33], kjer so P. Erdős, F. Harary in W. T. Tutte predlagali “naravno” geometrijsko predstavitev grafa, pri

kateri so grafi predstavljeni v evklidski ravnini (k -dimenzionalnem evklidskem prostoru) tako, da so povezave predstavljene z daljicami dolžine ena. Grafu, ki ima tako predstavitev, pravimo (k -razsežen) graf z enotsko razdaljo. Drugi avtorji [12, 74, 79] so predlagali, da nesosednja vozlišča grafa ne smejo biti predstavljena s točkami, ki so na razdalji ena; grafu, ki ima tako (striktno) predstavitev pravimo (k -razsežen) graf z enotsko koordinatizacijo. Problem ali je dani graf graf z enotsko razdaljo je seveda povezan z znanim skoraj 60 let nerešenim problemom kromatičnega števila ravnine, ki so ga neodvisno od drugih vsak zase izpostavili: E. Nelson in J. R. Isbell, H. Hadwiger ter P. Erdős [25, 83]. Ob raziskovanju grafov z enotsko razdaljo zelo hitro naletimo še na druge znane probleme, ki izhajajo iz še vedno nerešenih (večinoma Erdösevih) problemov: problem kromatičnega števila prostora, problem števila različnih razdalj med n točkami v ravnini oziroma v prostoru, dimenzija grafa, evklidska dimenzija grafa, problem kromatičnega števila sfere, minimalni prepovedani grafi z enotsko razdaljo, maksimalni grafi z enotsko razdaljo, ... [12, 16, 29, 33, 100, 106, 111, 112]. Nekateri avtorji so se ukvarjali s problemi grafov z enotsko razdaljo tudi z računalniškega oziroma računskega vidika [13, 16, 18, 51, 101].

Ob prebiranju literature se je izkazalo, da so številni avtorji pogosto uporabljali isto poimenovanje za različne pojme, spet drugje pa različna poimenovanja za iste pojme. Zato je bilo potrebno nekatere pojme na novo definirati. Najbolj znani rezultati povezani z opazovanimi problemi so v skladu z natančnimi definicijami opisani v prvem poglavju.

Disertacija vsebuje več tem, ki so povezane s problemi grafov z enotsko razdaljo. Prva se navezuje na vprašanje ali je opazovani graf graf z enotsko razdaljo oziroma graf z enotsko koordinatizacijo; vprašamo se lahko tudi ali je predstavitev z enotsko razdaljo, če obstaja, visoko degenerirana. Druga tema obravnava togost oziroma fleksibilnost predstavitve z enotsko razdaljo [76, 77, 78]. Ti temi obravnavamo v drugem, tretjem, četrtem in petem poglavju. V petem poglavju posplošimo rezultat iz [33] na veliko večino I-grafov, ki posplošujejo posplošene Petersenove grafe med katere spada tudi Petersenov graf $G(5, 2)$ obravnavan v [33]. Tretja tema sprašuje kako grafske operacije ohranjajo lastnost obstoja predstavitve z enotsko razdaljo; z njo se ukvarjamo v drugem poglavju, kjer dokažemo, da kartezični produkt grafov ohranja predstavitve (celo realizacije) z enotsko razdaljo. V tretjem poglavju dokažemo, da je Heawoodov graf graf z enotsko koordinatizacijo in zato tudi graf z enotsko razdaljo. S tem odgovorimo na vprašanje R. Hochberga [52] in ovržemo njegov nekaj let star in nedokončan poskus, v katerem je želel razviti računalniški program, ki bi dokazal, da Heawoodov graf ni graf z enotsko razdaljo. Kasneje se je izkazalo, da smo pri reševanju problema (neodvisno) uporabili podobno idejo kot M. A. Harris v drugem nedokončanem prispevku na to temo [47]. Naslednja tema sprašuje po tem, kako težak je v teoretičnem pomenu odločitveni problem ob-

stoja degenerirane predstavitve oziroma koordinatizacije z enotsko razdaljo. Na ti vprašanji odgovorimo v šestem poglavju. Zadnja tema se ukvarja s konstrukcijo hitrega algoritma za risanje grafov z enotsko razdaljo v ravnini in poskuša nadgraditi algoritem SPE [1]. Postavi se tudi vprašanje, kako izbrati mero za kvaliteto predstavitve, kakšni sta zgornja in spodnja meja zanj ter kako dobri so standardni algoritmi za risanje grafov v ravnini v primerjavi s teoretično dobljenima mejama. Na ta vprašanja odgovorimo v sedmem poglavju in teorijo povežemo s še enim znanim problemom, to je problemom pakiranja z enotskimi krogi (Circular packing problem). Hevristični algoritem uporabimo pri konstrukciji predstavitve Heawoodovega grafa v ravnini, ki je bila zelo blizu predstavitvi z enotsko razdaljo, glej tretje poglavje.

Glavni poudarek tega dela je na proučevanju lastnosti predstavitev grafov z enotsko razdaljo, kljub temu pa je v zadnjem poglavju W. A. Svrcek-Seilerju na vsa njegova vprašanja tudi odgovorjeno.

Pri računanju avtomorfizmov, epimorfizmov, konstruiranju delno urejene množice skrčenih grafov četrtega poglavja, potrjevanju domnev petega poglavja, delu z grafi, risanju grafov in implementaciji algoritmov zadnjega poglavja je bil v veliko pomoč programski paket VEGA [93, 94, 99], ki nadgrajuje programsko okolje MATHEMATICA.

Poglavje 1

Dimenzija in evklidska dimenzija

Očarljiv problem ..., ki povezuje ideje teorije množic, kombinatorike, teorije mere in metrične geometrije.

– H. T. Croft, K. J. Falconer in R. K. Guy v knjigi “Unsolved Problems in Geometry”, 1991, o problemu kromatičnega števila ravnine

V tem poglavju pregledamo lastnosti k -razsežnih grafov z enotsko razdaljo in k -razsežnih grafov z enotsko koordinatizacijo s poudarkom na grafih, ki jih je mogoče z enotsko razdaljo narisati v evklidski ravnini.

1.1 Osnovne definicije

Graf je urejen par $G = (V, E)$, kjer je V neprazna množica vozlišč, E množica povezav in kjer je vsaka povezava $e \in E$ par vozlišč $e = (u, v)$, $u, v \in V$. V primeru, da so povezave grafa urejeni pari vozlišč, grafu pravimo *usmerjen*, v nasprotnem primeru pa *neusmerjen* graf. Množici V in E pogosto označimo z $V(G)$ in $E(G)$, povezavo $e = (u, v)$ pa z $e = u \sim v$. Vozliščema u, v neusmerjene povezave $e = (u, v)$ pravimo *krajišči* povezave e , vozliščema u, v usmerjene povezave $e = (u, v)$ pa *začetno* in *končno krajišče* povezave e . Če v grafu obstajata dve različni povezavi z istima krajiščema, pravimo, da ima graf *večkratne povezave*. Povezavi $e = (u, u)$, $u \in V$ rečemo *zanka*. Če v grafu G obstaja povezava $e = (u, v)$, pravimo, da sta u in v *sosednji vozlišči* v G oziroma kar *sosedi*. *Obtežen* graf je graf, v katerem ima vsaka povezava podano numerično vrednost, oz. kot včasih rečemo, *težo*. Graf v katerem povezave

niso obtežene imenujemo *neobtežen* graf. Neobtežen neusmerjen graf je *enostaven*, če nima zank in večkratnih povezav. Pravimo da je graf *končen*, če vsebuje končno število vozlišč, ter *števen* če je množica vozlišč števna množica. Vsi grafi bodo, razen če bo posebej omenjeno drugače, končni in enostavni.

Podgraf grafa G je graf na podmnožici vozlišč in podmnožici povezav grafa G . Pravimo tudi, da G vsebuje svoje podgrafe. *Pravi podgraf* grafa G je podgraf grafa G , ki je različen od G . *Induciran podgraf* $G[U]$ grafa G na množici vozlišč $U \subseteq V(G)$ je tak podgraf grafa G , ki ima za povezave natanko vse povezave grafa G , ki imajo obe krajišči v množici U . Maksimalnemu povezanemu podgrafu grafa pravimo tudi *komponenta*.

Če velja, da sta poljubni vozlišči iz $G[U]$ sosednji, potem pravimo, da je $G[U]$ *klika*. Maksimalna klika $\omega(G)$ v grafu G je klika, ki vsebuje največ vozlišč med vsemi klikami grafa G . Vsak graf z vsaj eno povezavo ima netrivialno kliko. Naj bo G graf in naj $S \subseteq V(G)$. Če za vsak par vozlišč $u, v \in S$ drži, da $u \sim v \notin E(G)$, potem pravimo, da je S *neodvisna množica*.

Prerezno vozlišče grafa G je tako vozlišče $v \in V(G)$, za katero velja, da induciran podgraf $G[V(G) \setminus \{v\}]$ grafa G razpade na več komponent. *Blok* B v grafu G je maksimalni povezan podgraf grafa G brez prereznih vozlišč v B . Bloku, ki vsebuje le eno vozlišče pravimo *privesek*, bloku, ki je enak poti na b vozliščih pa *niz* na b vozliščih. Bloku, ki je z ostalim delom grafa povezan le preko enega prereznega vozlišča, pravimo *viseča komponenta*. Grafu, ki ima prerezno vozlišče pravimo *ločljiv* graf. Grafu, ki ni ločljiv pravimo *neločljiv*. Znano je, da vsebuje vsak blok B ločljivega grafa G prerezno vozlišče v grafa G in da v grafu G ni povezav med $V(B) \setminus \{v\}$ ter $V(G) \setminus V(B)$. Neformalno lahko rečemo, da ima graf drevesno strukturo sestavljeno iz blokov.

Številu sosedov vozlišča $v \in V(G)$ grafa G pravimo *stopnja vozlišča*; označimo ga z $\delta(v)$. *Stopnja grafa* $\Delta(G)$ je maksimalna stopnja vozlišča grafa G . Če imajo vsa vozlišča grafa stopnjo k , pravimo da je graf *k -regularen*. Pravimo, da je graf G *k -degeneriran*, če ima vsak induciran podgraf H grafa G vozlišče stopnje $\leq k$. Na primer, vsako drevo je 1-degenerirano. *Degeneriranost* $d(G)$ grafa G je najmanjše tako naravno število k , za katero je G k -degeneriran; torej velja, $k = \max_{H \subseteq G} \Delta(H)$. Za graf pravimo, da je *k -povezan*, če ne obstaja $k - 1$ vozlišč, ki bi jih odstranili z grafa in bi povzročila, da bi graf razpadel na vsaj dve komponenti.

Naj bo G graf in $e \in E(G)$ njegova povezava. Graf, ki ga dobimo iz G , tako da odstranimo povezavo e , označimo z G^e . Če je vseeno katero povezavo odstranimo, pišemo G^- . *Subdivizija povezave* $u \sim v$ je pot na treh vozliščih $u \sim w \sim v$ (na povezavo $u \sim v$ med krajišči u in v dodamo novo vozlišče w). *Subdivizija grafa* G je graf, ki ga dobimo iz G z zaporedjem subdivizij povezav. Pravimo, da sta dva grafa *homeomorfna*, če ju lahko dobimo iz istega grafa

z zaporedjem subdivizij povezav. Če lahko iz grafa G s ponavljajočim brisanjem povezav ter krčenjem povezav dobimo graf G_1 , pravimo, da je graf G_1 *minor* grafa G .

Če je G graf, potem z \overline{G} označimo njegov *komplement*, to je graf na množici vozlišč $V(G)$, za katerega velja $u \sim v \in E(\overline{G}) \iff u \sim v \notin E(G)$. *Unija* $G_1 \cup G_2$ grafov G_1 in G_2 je graf z množico vozlišč $V(G_1) \cup V(G_2)$ in množico povezav $E(G_1) \cup E(G_2)$. *Disjunktna unija* grafov G_1 in G_2 , označevali jo bomo z $G_1 \tilde{\cup} G_2$, je graf, ki ga dobimo z unijo grafov G_1 in G_2 z disjunktima množicama vozlišč $V(G_1)$ in $V(G_2)$. *Spoj* (oz. stik) $G_1 * G_2$ disjunktih (ločenih) grafov G_1 in G_2 je graf, ki vsebuje oba grafa G_1 in G_2 ter vse povezave, ki povezujejo eno vozlišče grafa G_1 ter eno vozlišče grafa G_2 .

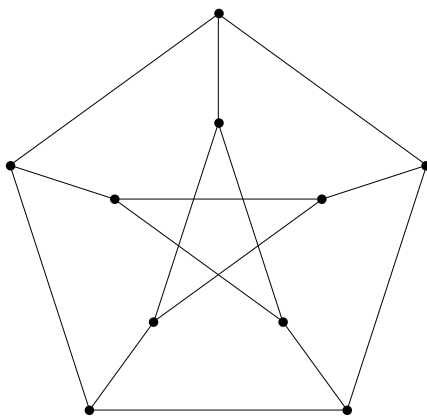
Naslednje grafovske operacije bomo definirali kot v knjigi [65]. *Kartezični produkt* $G_1 \square G_2$ grafov G_1 in G_2 je graf z vozlišči $V(G_1) \times V(G_2)$ in množico povezav $E(G_1 \square G_2) = \{(a, b) \sim (c, d) \mid (a = c \wedge b \sim d \in E(G_2)) \vee (a \sim c \in E(G_1) \wedge b = d)\}$. *Tenzorski (oziroma direktni) produkt* $G_1 \times G_2$ grafov G_1 in G_2 je graf z množico vozlišč $V(G_1 \times G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$ in množico povezav $E(G_1 \times G_2) = \{(a, b) \sim (c, d) \mid (a \sim c \in E(G_1) \wedge b \sim d \in E(G_2))\}$. *Krepki produkt* $G_1 \boxtimes G_2$ grafov G_1 in G_2 je graf z množico vozlišč $V(G_1 \boxtimes G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$ in množico povezav $E(G_1 \boxtimes G_2) = E(G_1 \square G_2) \cup E(G_1 \times G_2)$. *Leksikografski produkt* $G_1 \circ G_2$ grafov G_1 in G_2 je graf z množico vozlišč $V(G_1 \circ G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$ in množico povezav $E(G_1 \circ G_2) = \{(a, b) \sim (c, d) \mid a \sim c \in E(G_1) \vee (a = c \wedge b \sim d \in E(G_2))\}$.

Naj bo G_1 graf z n vozlišči. *Korona produkt* (oz. klin) $G_1 \vee G_2$ grafov G_1 in G_2 , je graf, ki ga dobimo, če vzamemo eno kopijo grafa G_1 in n kopij grafa G_2 , ter za vsak i , $1 \leq i \leq n$ dodamo povezave med i -tim vozliščem grafa G_1 in vsemi vozlišči i -te kopije grafa G_2 . Če je $G = G_1 \cup G_2$ in $V(G_1) \cap V(G_2) = \{v\}$, pravimo, da graf G dobimo s *kopiranjem* grafov G_1 in G_2 na prerezno vozlišče $v \in V(G)$.

Kot je v navadi bomo grafu na n vozliščih z vsemi možnimi povezavami rekli *poln graf* na n vozliščih in ga bomo označevali s K_n . Podobno bomo s $K_{m,n}$ označevali *poln dvodelen graf*, ki ima m vozlišč pobarvanih z eno in n z drugo barvo, ter v katerem sta vozlišči sosednji natanko takrat, ko sta različno obarvani. Vsak dvodelen graf z m vozlišči ene barve in n vozlišči druge barve je podgraf grafa $K_{m,n}$. *Poln večdelen graf* K_{n_1, n_2, \dots, n_r} je posplošitev polnega dvodelnega grafa na r razredov vozlišč. *Pot* na n vozliščih bomo označili s P_n , *cikel* na $n \geq 3$ vozliščih pa s C_n . *Kolo* na $n \geq 4$ vozliščih W_n (ogrodje $(n - 1)$ -strane piramide) definiramo s predpisom $W_n = W_{1, n-1} = K_1 * C_{n-1}$. Naj bo ℓ poljubna povezava (oziroma špica), ki povezuje centralno vozlišče kolesa W_n z enim izmed vozlišč na obodu kolesa W_n . Definirajmo *kolo brez špice* kot $W_i^* := W_i^\ell$. S predpisom $W_{m,n} = \overline{K_m} * C_n$ definiramo *posplošeno kolo* $W_{m,n}$. *Hiperkocka* (oziroma n -dimenzionalna kocka ali kar n -kocka) Q_n je definirana z rekurzivnim

predpisom $Q_n = Q_{n-1} \square K_2$, $Q_1 = K_2$. *Kaktus* je graf v katerem vsaka povezava leži na največ enem ciklu.

Posplošeni Petersenov graf $G(n, k)$, ki ga je predstavil Mark Watkins v [115], je graf z množico vozlišč $\{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ in povezavami $u_i \sim u_{i+1}$, $v_i \sim v_{i+k}$, $u_i \sim v_i$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, kjer pri izračunu indeksov upoštevamo deljenje po modulu n , in kjer velja $k < \frac{n}{2}$. Grafu $G(5, 2)$, glej sliko 1.1, pravimo kar *Petersenov graf*. V družino posplošenih Petersenovih grafov spadajo tudi n -prizme $G(n, 1)$.



Slika 1.1: Petersenov graf $G(5, 2)$.

I-graf $I(n, j, k)$ je graf z množico vozlišč $\{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ in množico povezav $\{u_i u_{i+j}, u_i v_i, v_i v_{i+k} : i = 0, 1, \dots, n-1\}$, kjer ponovno pri izračunu indeksov upoštevamo deljenje po modulu n . Očitno je, da razred I-grafov vsebuje razred posplošenih Petersenovih grafov, saj je $G(n, k) = I(n, 1, k)$; glej na primer [9, 35].

Graf G je *ravninski*, če ga je mogoče narisati v ravnini na način, da se povezave ne sekajo. Znani izrek Kuratowskega pravi, da je graf ravninski natanko takrat, ko ne vsebuje subdivizij polnega grafa na petih vozliščih K_5 in polnega dvodelnega grafa $K_{3,3}$, glej na primer [46]. Grafu G pravimo *zunanjeravninski*, če ima predstavitev v ravnini, tako da so vsa vozlišča grafa G predstavljena na krožnici, vse povezave znotraj krožnice, in da velja, da se povezave v tej predstavitvi ne sekajo. Vsak zunanjeravninski graf je ravninski, obratno pa ne drži; na primer, graf K_4 je ravninski ni pa zunanjeravninski. Če zunanjeravninskemu grafu G ne moremo dodati nobene povezave in hkrati ohraniti zunanjeravninskosti, potem pravimo, da je G *maksimalni zunanjeravninski graf*. *Žival* je 2-povezan ravninski graf, ki ima predstavitev, ki vsa notranja lica predstavi z enotskimi tri, štiri ali šest kotniki.

Eulerjev *rod* (oziroma kar rod) grafa G je najmanjše naravno število n , da lahko G narišemo na sferi z n ročaji (oziroma na orientabilni ploskvi S roda n) na način, da se povezave ne sekajo.

Ravninski graf ima rod 0, saj ga lahko, brez da se povezave sekajo, narišemo že na sfero. Rod grafa G označimo z $\gamma(G)$. Leta 1890 je P. J. Heawood [49] podal zgornjo mejo za kromatično število grafov vložnih na dano ploskev S z rodом $\gamma(S) \geq 1$. Ta zgornja meja je danes znana kot *Heawoodovo število*

$$H(G) = \left\lceil \frac{7 + \sqrt{1 + 48\gamma(G)}}{2} \right\rceil.$$

Skoraj celo stoletje kasneje sta G. Ringel in J. W. T. Young dokazala, da je Heawoodovo število $H(S)$ natančna zgorja meja za kromatično število grafov vložnih na ploskev S z Eulerjevim rodом $\gamma(S) \geq 1$, ki je različna od Kleinove steklenice. Primer, ki obravnava sfero, sta rešila K. Appel in W. Haken v letu 1976 [3] z računalniško podprtim dokazom izreka štirih barv, ki pravi, da imajo ravninski grafi kromatično število manjše ali enako 4.

Preslikavi $\chi : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, ki vozliščem grafa G priredi oznake (barve) iz množice $\{1, 2, \dots, k\}$, pravimo *k-barvanje* grafa G . *Pravilno barvanje* grafa je tako barvanje vozlišč grafa, za katerega velja, da sta poljubni sosednji vozlišči v grafu obarvani različno. Najmanjše število barv s katerimi lahko pravilno pobarvamo graf G se imenuje *kromatično število* $\chi(G)$ grafa G . Znano je, da je $\chi(K_n) = n$, $\chi(K_{m,n}) = 2$ in $\chi(G(5, 2)) = 3$. Vsak graf G je podgraf polnega $\chi(G)$ -delnega grafa.

Izrek 1 (Brooks). *Naj bo G povezan graf z maksimalno stopnjo $\Delta(G)$. Če G ni ne poln graf, ne lih cikel, potem*

$$\chi(G) \leq \Delta(G)$$

Preslikavi $\eta : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ iz grafa G_1 v graf G_2 pravimo *homomorfizem grafov* oziroma *morfizem grafov*, če η preslika vozlišča grafa G_1 v vozlišča grafa G_2 , tako da iz $u \sim v \in E(G_1)$ sledi $\eta(u) \sim \eta(v) \in E(G_2)$ (η ohranja sosednjost). Homomorfizem grafov $\eta : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ povzroči enolično preslikavo (ki jo bomo označili z enako oznako) $\eta : E(G_1) \rightarrow E(G_2)$, tako da za $e = u \sim v$ velja $\eta(e) = \eta(u) \sim \eta(v)$. Kompozitum homomorfizmov grafov je spet homomorfizem grafov. Homomorfizem, ki je surjektiven na obeh množicah $V(G)$ in $E(G)$ imenujemo *epimorfizem*, homomorfizem, ki je bijektiven na obeh množicah $V(G)$ in $E(G)$ pa *izomorfizem* (glej npr. [50]). Pravimo, da je izomorfizem grafa G na graf G *avtomorfizem* grafa G .

Graf G je *vozliščno tranzitiven*, če velja da za poljubni vozlišči $v_1, v_2 \in V(G)$ obstaja avtomorfizem $f : V(G) \rightarrow V(G)$, tako da velja enakost $f(v_1) = v_2$. Podobno pravimo da je graf G *povezavno tranzitiven*, če velja da za poljubni povezavi $e_1, e_2 \in G$ velja, da obstaja avtomorfizem grafa G , ki slika povezavo e_1 v povezavo e_2 .

$m_1 R m_2$, velja, da za noben $e \in M$ ne more biti hkrati izpolnjeno $m_1 R e$ in $e R m_2$. Pravimo, da m_2 pokriva m_1 .

Pravimo, da je relacija $R \subseteq M \times M$ delno urejena relacija, če je:

- *refleksivna*: $x R x$,
- *simetrična*: $x R y \implies y R x$,
- *tranzitivna*: $x R y \wedge y R z \implies x R z$.

Množici M z delno urejeno relacijo $R \subseteq M \times M$ pravimo *delno urejena množica*. Pogosto označimo relacijo delne urejenosti kar s simbolom \preceq in delno urejenost množice s parom (M, \preceq) . Vsaka relacija delne urejenosti nad množico M določa enolično relacijo pokritja, ta pa usmerjen graf, ki mu pravimo tudi Hassejev diagram. *Hassejev diagram* relacije delne urejenosti na množici M je usmerjen graf, katerega vozlišča so elementi množice M , in v katerem od vozlišča $m_1 \in M$ do vozlišča $m_2 \in M$ poteka lok, če in samo če m_2 pokriva m_1 v pripadajoči relaciji pokritja. Hassejev diagram običajno rišemo kot neusmerjen graf pri katerem smer povezav določimo neposredno iz slike; lok od m_1 do m_2 poteka vedno navzgor, puščice pa izpustimo. Delno urejeni množici (M, \preceq) skupaj s funkcijo $\rho : M \rightarrow \mathbb{Z}$, za katero velja, da če m_2 pokriva m_1 , potem je $\rho(m_2) = \rho(m_1) + 1$, pravimo *rangirana delno urejena množica*; funkciji ρ , če obstaja, pravimo *rang*.

Pravimo, da je relacija $R \subseteq M \times M$ ekvivalenčna relacija, če je:

- *refleksivna*: $x R x$,
- *simetrična*: $x R y \implies y R x$,
- *tranzitivna*: $x R y \wedge y R z \implies x R z$.

Ekvivalenčna relacija R določa razbitje množice M na *ekvivalenčne razrede*; vsak element $m \in M$ določa svoj ekvivalenčni razred $[m]$ s predpisom

$$[m] := \{m_1 \in M, \text{ tako da } m_1 R m\}.$$

Množici ekvivalenčnih razredov $\{[m] \mid m \in M\}$ množice M po ekvivalenčni relaciji \sim pravimo *kvocientna množica* in jo označimo z M/\sim .

Obseg je množica $(M, +, \cdot)$ v kateri za poljubne elemente $a, b, c \in M$ velja: (1) komutativnost za seštevanje: $a + b = b + a$, (2) asociativnost za seštevanje: $a + (b + c) = (a + b) + c$,

(3) obstaja nevtralni element za seštevanje (označimo ga z oznako 0): $a + 0 = 0 + a = a$, (4) poljubni element a ima nasprotni element $-a$, tako da velja: $a + (-a) = (-a) + a = 0$, (5) asociativnost za množenje: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, (6) distributivnost (z leve in z desne strani), ki povezuje seštevanje in množenje: $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ in $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$, (7) obstaja nevtralni element za množenje (enota), ki ga označimo 1 in je različen od nevtralnega elementa za seštevanje 0: $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, (8) za vsak od 0 različen element a obstaja inverzni element a^{-1} , tako da velja: $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$. Če v obsegu velja tudi komutativnost množenja $a \cdot b = b \cdot a$, potem obsegu pravimo *komutativni obseg* oziroma *polje*. Z $\gcd(a, b)$ bomo označevali največji skupni delitelj naravnih števil a in b .

Konveksno ovojnico (ogrinjačo) množice točk M v realnem vektorskem prostoru V , to je najmanjšo konveksno množico v V , ki vsebuje M , bomo označevali s $\text{conv}(M)$. V geometriji je n -simpleks n -dimenzionalni ekvivalent trikotniku. Bolj natančno, simpleks je konveksna ovojnica množice $(n + 1)$ afino neodvisnih točk v nekem evklidskem prostoru z dimenzijo vsaj n (tem točkam pravimo, da so v splošni poziciji). Na primer, točka je 0-simpleks, daljica 1-simpleks, trikotnik 2-simpleks, tetraeder 3-simpleks in tako naprej. *Regularen simpleks* je simpleks, ki je hkrati tudi regularen večkotnik. *Izometrija* iz metričnega prostora (X, d_X) v metrični prostor (Y, d_Y) je preslikava $\psi : X \rightarrow Y$, ki ohranja razdalje $d_X(x, y) = d_Y(\psi(x), \psi(y))$ za vse $x, y \in X$.

Algoritem je končno zaporedje korakov postopka namenjenega reševanju nekega problema. Algoritem prilagojen reševanju nekega problema, ki uporablja "zdravo pamet" za to, da v večini primerov vrne dobro oziroma sprejemljivo rešitev, ki pa morda ni optimalna, imenujemo *hevrstika*. Hevrstike so uporabne pri reševanju problemov za katere niso znane metode, ki bi poiskale optimalno rešitev glede na podane omejitve (na primer časovna zahtevnost, prostorska zahtevnost, težavnost problema). Ob uporabi hevrstike pridobimo na računski moči oziroma pri enostavnosti postopka reševanja, lahko pa izgubimo pri natančnosti rešitve.

Časovna zahtevnost $T_{\mathcal{A}}(\ell)$ algoritma \mathcal{A} (včasih tudi stroja) predstavlja število računskih korakov, ki jih potrebuje algoritem \mathcal{A} pri danih vhodnih podatkih z velikostjo ℓ , da reši problem (izračuna rezultat). Časovno zahtevnost podamo kot funkcijo velikosti vhodnih podatkov. Računske korake merimo v osnovnih operacijah stroja, ki izvaja algoritem, v nekaterih primerih pa se omejimo le na štetje določenih operacij (na primer aritmetičnih operacij ali primerjav). Pogosto uporabljamo zapis *reda velikosti* v *veliki* \mathcal{O} in *mali* o notaciji. Če za funkcijo $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ obstajata pozitivni konstanti n_0, c , da velja $\mathcal{O}(f) = \{g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall n \geq n_0 \ 0 \leq g(n) \leq c \cdot f(n)\}$, pišemo $g \in \mathcal{O}(f)$ in preberemo, da je funkcija g od neke naprej manjša od konstanta krat funkcija f . Če za funkcijo $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ in vsako pozitivno število c obstaja

pozitivno število n_0 , tako da velja $0 \leq g(n) < c \cdot f(n)$ za vse $n \geq n_0$, potem pišemo $g \in o(f)$ in preberemo, da je funkcija g od nekje naprej zanemarljiva glede na funkcijo f .

Tudi teorija izračunljivosti presega okvire tega dela, zato bomo našli le tiste definicije, ki so potrebne za razumevanje izrekov te disertacije. Podrobnejšo razlago je mogoče dobiti v [80].

Odločitveni problem je vprašanje v nekem formalnem (logičnem) sistemu, ki ima, ne glede na vhodne parametre problema, natanko dva možna odgovora, odgovor “da” (ali resnično) in odgovor “ne” (ali neresnično). V teoriji izračunljivosti je *orakelj* črna škatla, katere delovanja ne poznamo; zmožna je odgovoriti na vprašanje, ki ji ga zastavimo. Odgovoru oraklja ne zaupamo, ampak ga preverimo z determinističnim Turingovim strojem. Deterministični Turingov stroj, ki pri svojem delovanju uporablja odgovor oraklja, imenujemo nedeterministični Turingov stroj. Pravimo, da je odločitveni problem P *nedeterministično polinomski problem* (oziroma pišemo $P \in \mathcal{NP}$), če je mogoče odgovor da, če obstaja, v polinomskem času preveriti na determinističnem Turingovem stroju (oziroma, kot pogosto pravimo, ga je mogoče v polinomskem času rešiti na nedeterminističnem Turingovem stroju).

Naj bosta P_1, P_2 opazovana problema. Pravimo, da je problem P_1 *polinomsko prevedljiv* (ali reducibilen) na problem P_2 , kar označimo s $P_1 \propto P_2$, če lahko iz vhodnih podatkov V_1 problema P_1 v polinomskem času konstruiramo vhodne podatke V_2 za problem P_2 , tako da je odgovor za P_1 pri V_1 da natanko takrat, ko je odgovor za P_2 pri vhodnih podatkih V_2 da. Opozoriti velja, da iz $P_1 \propto P_2$ ne sledi nujno $P_2 \propto P_1$. Za zapis $P_1 \propto P_2$ lahko neformalno rečemo, da je problem P_2 vsaj tako težek kot problem P_1 .

Pravimo, da je odločitveni problem *\mathcal{NP} -poln* (oziroma, da $P \in \mathcal{NP} - C$), če je $P \in \mathcal{NP}$ in je mogoče vsakega izmed problemov v \mathcal{NP} v polinomskem času (s polinomske Karpovo redukcijo z enim orakljom) prevesti nanj. Pravimo, da je (ne nujno odločitveni) problem $P \in \mathcal{NP} - H$ (oziroma da je *\mathcal{NP} -težek* problem), če je vsaj tako težak kot najtežji problemi v razredu \mathcal{NP} . Z drugimi besedami, problem $P \in \mathcal{NP} - H$, če in samo če obstaja problem iz $\mathcal{NP} - C$, ki ga lahko v polinomskem času (s polinomske Turingovo redukcijo z več oraklji) prevedemo na P . Problemi, ki so \mathcal{NP} -polni so tudi \mathcal{NP} -težki, medtem ko obstajajo problemi, ki so \mathcal{NP} -težki pa niso v $\mathcal{NP} - C$. Na primer, znan tak problem je *problem ustavljanja* oziroma “halting problem”, ki je odločitveni problem, ni pa zanj mogoče (v splošnem) v polinomskem času preveriti odgovora da, ki ga poda orakelj nedeterminističnega Turingovega stroja.

Dolžini zapisa vseh vhodnih podatkov problema pravimo *vhodna velikost* (ang. input size) problema. Splošen problem teorije izračunljivosti ima lahko tudi numerične vhodne parametre, ki jih ponavadi podamo v binarnem zapisu. Tako ima lahko problem numerične vhodne

parametre, katerih velikost je eksponentna glede na vhodno velikost problema. Pravimo, da je problem *krepro* \mathcal{NP} -poln (oz. *krepro* \mathcal{NP} -težek), če ostane \mathcal{NP} -poln (oz. \mathcal{NP} -težek) tudi ko so numerični vhodni parametri problema omejeni s polinomom v vhodni velikosti problema. V nasprotnem primeru je problem *šibko* \mathcal{NP} -poln (oz. *šibko* \mathcal{NP} -težek). Za \mathcal{NP} -šibek problem obstaja torej algoritem s časovno zahtevnostjo, ki je polinomska tako v dimenziji problema, kot v velikosti vhodnih numeričnih parametrov (in ne v logaritmu velikosti numeričnih parametrov). Na primer: problem nahrbtnika (ang. Knapsack problem) v splošni obliki, ki ne omejuje števila elementov, ki jih lahko vstavimo v nahrbtnik, je šibko \mathcal{NP} -težek, problem polnjenja košev (ang. Bin packing problem) pa krepro \mathcal{NP} -težek.

1.2 O predstavitev in realizacijah

Predstavitev ρ grafa G na množico M je par preslikav $\rho_V : V(G) \rightarrow M$ in $\rho_E : E(G) \rightarrow 2^M$, za katerega velja, da če je v krajišče povezave $e = u \sim v$, potem je $\rho_V(v) \in \rho_E(e)$ (in $\rho_V(u) \in \rho_E(e)$), glej na primer [48]. Če velja tudi obrat, torej da za $v \in V(G)$ in $e \in E(G)$ velja, da iz $\rho_V(v) \in \rho_E(e)$ sledi, da je v krajišče povezave $e = u \sim v$, pravimo predstavitvi *realizacija*. Kjer bo iz konteksta jasno o kateri preslikavi iz para ρ_V, ρ_E govorimo, bomo indeks izpustili in namesto ρ_V oziroma ρ_E pisali kar ρ .

Opozoriti je potrebno, da je lahko presek $\rho(e) \cap \rho(\ell)$ realizacij dveh nesosednjih povezav $e, \ell \in E(G)$ neprazen, vendar ne sme vsebovati realizacije vozlišča iz G . Predstavitve povezav grafa G se torej lahko sekajo (v splošnem celo v neštevno mnogo točkah).

Naj bo $k > 0$ celo število. V tej disertaciji bomo opazovali le predstavitve, ki graf preslikajo v podmnožico k -dimenzionalnega evklidskega prostora \mathbb{R}^k . Predstavitvi, za katero velja $M = \mathbb{R}^k$ in ki vsako povezavo predstavi z daljico med predstavitevama njenih krajišč, pravimo *evklidska predstavitev*. Evklidsko predstavitev ρ povezave $e = u \sim v$ lahko zapišemo kot

$$\rho_E(e) = (1 - \lambda)\rho_V(u) + \lambda\rho_V(v), \text{ kjer } 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Evklidski realizaciji ρ grafa G za katero velja, da ne obstajata povezavi katerih predstavitvi se sekata v notranji točki, pravimo *vložitev grafa* G . Predstavitvam v evklidsko ravnino bomo rekli *ravninske*, predstavitvam v evklidski tridimenzionalni prostor pa *prostorske* [48, 98]. Evklidski predstavitvi povezave bomo včasih rekli kar povezava, iz konteksta pa bo razvidno ali bomo govorili o povezavi grafa ali o njeni evklidski predstavitvi.

Če predstavitev ρ grafa G ni injektivna na $V(H)$, kjer je H podgraf grafa G , rečemo da je ρ *degenerirana na* H . Predstavitvi ki ni injektivna na $V(G)$ pravimo kar *degenerirana*. Predstavi-

tev grafa, v kateri je predstavitev vozlišča vsebovana na predstavitvi povezave, ki ji to vozlišče ne pripada, imenujemo *visoko degenerirana* oziroma *nesimplicialna*. Evklidske realizacije so torej natanko evklidske predstavitve, ki niso niti degenerirane niti visoko degenerirane.

Imerzija je predstavitev grafa za katero velja, da vsebujeta predstavitvi poljubnih dveh povezav največ končno mnogo skupnih točk. Ni težko razmisliti, da imata povezavi evklidske imerzije največ eno skupno točko.

Izrek 2. *Evklidska realizacija je tudi imerzija.*

Dokaz. Na bo ρ evklidska predstavitev, ki ni imerzija. Potem obstajata povezavi $e_1, e_2 \in E(G)$, $e_1 \neq e_2$, $e_1 = u_1 \sim v_1$, $e_2 = u_2 \sim v_2$, tako da njun presek $\rho(e_1) \cap \rho(e_2)$ vsebuje neskončno mnogo točk. Naj bo $i, j \in \{1, 2\}$ in $i \neq j$. Ker je ρ evklidska predstavitev, velja $\rho(e_i) = \text{conv}(\{\rho(u_i), \rho(v_i)\})$ in presek $\rho(e_1) \cap \rho(e_2) = \text{conv}(\{\rho(u_1), \rho(v_1)\}) \cap \text{conv}(\{\rho(u_2), \rho(v_2)\})$. Torej mora biti vsaj eno vozlišče u_i, v_i povezave e_i vsebovano znotraj predstavitve druge povezave e_j in ne kot predstavitev krajišča povezave e_j . Naj bo w eno izmed takih vozlišč. Potem velja $\rho(w) \in \rho(e_j)$ ne da bi bilo krajišče povezave e_j in zato ρ ni realizacija. \square

Lema 3. *Evklidska predstavitev povezanega grafa na vsaj treh vozliščih, ki je degenerirana na poti dolžine 2 in ne na poti dolžine 1, ni imerzija.*

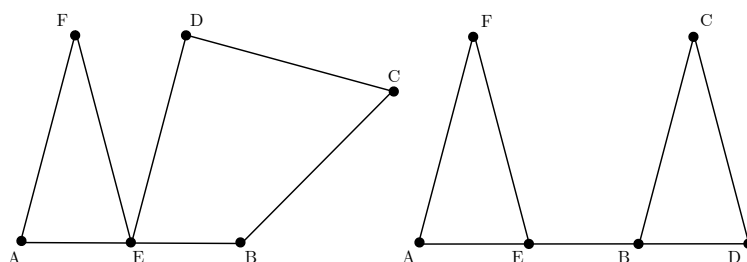
Dokaz. Naj bo ρ evklidska predstavitev povezanega grafa G na vsaj treh vozliščih. Naj bo $H = u \sim w \sim v$ pot dolžine 2 v G , naj bo ρ degenerirana na H in nedegenerirana na $u \sim w$ ter $w \sim v$. Potem $\rho(u) = \rho(v)$ in $\rho(u \sim w) = \rho(w \sim v)$. \square

Pot P_2 je edini (enostaven) povezan graf na dveh vozliščih in vsaka njegova evklidska realizacija je nedegenerirana. Velja pa tudi več.

Izrek 4. *Vsaka evklidska realizacija povezanega grafa je nedegenerirana.*

Dokaz. Naj bo ρ degenerirana evklidska predstavitev povezanega grafa G na vsaj treh vozliščih. Ker je ρ degenerirana, obstajata vsaj dve različni vozlišči u in v , tako da je $\rho(u) = \rho(v)$. Ker ima G vsaj tri vozlišča in je povezan, je u krajišče še vsaj ene povezave, na primer $u \sim w$, kjer je $w \neq v$ (v najslabšem primeru zamenjamo vlogi vozlišč u in v). Torej velja $\rho(v) \in \rho(u \sim w)$, kjer v ni krajišče povezave $u \sim w$. \square

Seveda poznamo tudi nedegenerirane evklidske predstavitve, ki niso realizacije; te imajo lastnost, da predstavitev vozlišča leži znotraj predstavitve povezave. Kot že rečeno jim pravimo visoko degenerirane. Primere visoko degeneriranih predstavitev je mogoče videti na sliki 1.2 in sliki 4.6; glej tudi poglavje 5 in poglavje 7. Poznamo tudi primere, kjer visoko degenerirane predstavitve niso niti imerzije.



Slika 1.2: Primera visoko degeneriranih predstavitev cikla na šestih vozliščih C_6 .

1.3 Predstavitve grafov z enotsko razdaljo

Naj bo \mathbb{R}^k k -dimenzionalen evklidski prostor in naj d označuje razdaljo med dvema točkama:

$$d(a, b) = \|a - b\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^k (a_i - b_i)^2}.$$

Evklidski predstavitvi grafa, ki slika povezave v daljice dolžine ena, pravimo *predstavitve z enotsko razdaljo*, taki ki je tudi realizacija, pa *realizacija z enotsko razdaljo*.

P. Erdős et al. so v [33] definirali *dimenzijo* grafa G , ki jo bomo označevali z $\dim(G)$, kot najmanjše tako naravno število k , ki je potrebno, da ima G nedegenerirano predstavitev z enotsko razdaljo v \mathbb{R}^k . Drugi avtorji [12, 74, 79] so definirali *koordinatizacijo z enotsko razdaljo* v \mathbb{R}^k (oz. *striktno realizacijo z enotsko razdaljo* v \mathbb{R}^k) kot nedegenerirano predstavitev z enotsko razdaljo v \mathbb{R}^k , ki preslika nesosednja vozlišča v točke \mathbb{R}^k , ki niso na razdalji ena. Najmanjšemu naravnemu številu k , ki je potrebno, da ima graf G koordinatizacijo z enotsko razdaljo v \mathbb{R}^k , pravimo *evklidska dimenzija* grafa G , glej npr. [75], in jo bomo, kot je v navadi, označevali z $e(G)$. Že v ravnini ne velja več, da sta dimenzija in evklidska dimenzija grafa enaki, za primer glej sliko 1.3.

Grafu, ki ima nedegenerirano predstavitev (realizacijo oziroma koordinatizacijo) z enotsko razdaljo, ki slika v \mathbb{R}^k , pravimo *k -razsežen graf z enotsko razdaljo* (realizacijo oziroma koordinatizacijo).

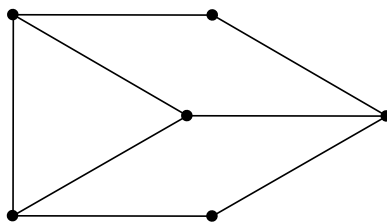
Lema 5. Vsak k -razsežen graf z enotsko razdaljo (realizacijo, koordinatizacijo) je tudi $(k+1)$ -razsežen graf z enotsko razdaljo (realizacijo, koordinatizacijo).

Grafu, ki ima nedegenerirano predstavitev z enotsko razdaljo v ravnini pravimo *graf z enotsko razdaljo* (ang. unit-distance graph, unit-bar graph). Grafu, ki ima realizacijo z enotsko razdaljo v ravnini pravimo *graf z enotsko realizacijo*, grafu, ki ima koordinatizacijo z enotsko razdaljo v ravnini, pa *graf z enotsko koordinatizacijo*; glej tudi [8]. Angleških poimenovanj za

graf z enotsko koordinatizacijo je več, npr. strict unit-distance graph, distance one realizable graph, včasih pa tudi kar unit-distance graph.

Lema 6. Vsak k -razsežen graf z enotsko realizacijo je k -razsežen graf z enotsko razdaljo.

Ravninskemu grafu, ki ima vložitev z enotsko razdaljo v ravnini (realizacijo z enotsko razdaljo v ravnini, pri kateri se povezave ne sekajo) pravimo *graf vžigalic* (ang. matchstick graph); za primer glej na primer sliko 1.13.



Slika 1.3: Graf z enotsko razdaljo, ki je graf vžigalic in graf z enotsko realizacijo, ni pa graf z enotsko koordinatizacijo. Za dokaz, da graf na sliki ni graf z enotsko koordinatizacijo glej na primer [101].

C. Purdy in G. Purdy sta v [101] definirala upodobljive in prepovedane grafe. Rekla sta, da je graf G *upodobljiv* (ang. drawable) v \mathbb{R}^k , če je $e(G) \leq k$, oziroma če je $e(G) > k$ in grafu G lahko dodamo povezave, da dobimo graf \tilde{G} za katerega velja $e(\tilde{G}) \leq k$. Enostavno je preveriti, da so upodobljivi grafi v \mathbb{R}^k ravno k -razsežni grafi z enotsko razdaljo. Grafu, ki nima nedegenerirane predstavitve z enotsko razdaljo v \mathbb{R}^k , pravimo *prepovedan* graf za dimenzijo k (oziroma *ovira*). Pravimo, da je graf G *najmanjši prepovedan* graf za dimenzijo k , če je prepovedan graf za dimenzijo k , vsi njegovi pravi podgrafi pa imajo v tej dimenziji nedegenerirano predstavitev z enotsko razdaljo. Grafu G , ki je k -razsežen graf z enotsko razdaljo, pravimo *maksimalni* graf v dimenziji k , če s tem, ko mu dodamo poljubno povezavo med nesosednjima vozliščema, dobimo graf, ki ni k -razsežen graf z enotsko razdaljo. Pravimo, da je graf G *kritičen* graf za dimenzijo k , če je $\dim(G) = k$ in če za vsak podgraf $H \subseteq G$ velja $\dim(H) < k$. Iz definicije sledi, da je kritičen graf za dimenzijo $k \geq 1$ natanko najmanjši prepovedan graf za dimenzijo $k - 1$.

Če je G sestavljen iz povezanih komponent G_1, G_2, \dots, G_s , potem ima G predstavitev z enotsko razdaljo v \mathbb{R}^k , če in samo če ima vsaka izmed komponent G_i , $1 \leq i \leq s$, predstavitev z enotsko razdaljo v \mathbb{R}^k . Zato lahko študij predstavitev z enotsko razdaljo omejimo na povezane grafe in, če je graf nepovezan, obravnavamo vsako komponento posebej. Zanke ni mogoče predstaviti z evklidsko predstavitvijo povezave, velja tudi, da med dvema točkama v

evklidskem prostoru obstaja največ ena daljica dolžine ena. Torej lahko študij predstavitev z enotsko razdaljo brez škode omejimo le na enostavne grafe.

Izrek 7. *Naj bosta G in H grafa, naj bo $f : G \rightarrow H$ homomorfizem grafov in naj bo $k \in \mathbb{N}$ naravno število. Vsako predstavitev z enotsko razdaljo grafa H v \mathbb{R}^k (če obstaja) je mogoče razširiti na (lahko tudi degenerirano) predstavitev z enotsko razdaljo grafa G v \mathbb{R}^k .*

Dokaz. Naj bo ρ predstavitev z enotsko razdaljo grafa H v \mathbb{R}^k in naj $u \sim v \in E(G)$. Poiskati moramo predstavitev z enotsko razdaljo η grafa G v \mathbb{R}^k , tako da velja $\eta(u) \in \eta(u \sim v)$. Ker je $f : G \rightarrow H$ homomorfizem, velja $f(u), f(v) \in V(H)$ in $f(u) \sim f(v) \in E(H)$. Torej velja $\rho(f(u)) \in \rho(f(u) \sim f(v))$ in je kompozitum $\eta = \rho \circ f$ iskana predstavitev z enotsko razdaljo grafa G v \mathbb{R}^k . \square

Dokaz naslednje leme bomo zaradi enostavnosti izpustili.

Lema 8. *Naj bo G k -razsežen graf z enotsko razdaljo (realizacijo) in naj bo H podgraf grafa G . Potem je tudi H k -razsežen graf z enotsko razdaljo (realizacijo).*

Po lemi 8 sta “imeti k -razsežno predstavitev z enotsko razdaljo” in “imeti k -razsežno realizacijo z enotsko razdaljo” monotoni lastnosti grafa. Torej, če graf G vsebuje podgraf H ki ni k -razsežen graf z enotsko razdaljo (realizacijo), potem tudi graf G ni k -razsežen graf z enotsko razdaljo (realizacijo).

Ker je vsaka koordinatizacija z enotsko razdaljo tudi nedegenerirana predstavitev z enotsko razdaljo za poljuben graf G velja $\dim(G) \leq e(G)$. Neenakosti se ne da izboljšati, saj enačaj velja za cikle, na sliki 1.3 pa je predstavljen graf z enotsko razdaljo in evklidsko dimenzijo 3.

Lema 9. *“Imeti k -razsežno koordinatizacijo” ni monotona lastnost grafa.*

Dokaz. Vzemimo kolo na sedmih vozliščih W_7 in z ℓ označimo eno izmed njegovih špic (povezav, ki povezuje vozlišče na obodu kolesa z vozliščem v centru kolesa). Z W_7^* označimo podgraf kolesa W_7 brez špice ℓ . Graf W_7^* je graf z enotsko realizacijo in ima natanko eno realizacijo z enotsko razdaljo v ravnini, označimo jo z ρ . Po lemi 6 je $\dim(W_7^*) = 2$. Vsi zvezni premiki predstavitev vozlišč realizacije ρ grafa W_7^* ohranjajo razdalje med predstavitvami vozlišč, zato je ρ toga realizacija. Lahko je videti, da je razdalja med predstavitvama krajišč špice ℓ enaka 1. Če hočemo zadostiti zahtevi, da ρ preslika nesosednja vozlišča v točke na razdalji različni od ena, potrebujemo dodatno dimenzijo. Evklidska dimenzija grafa W_7^* je 3 in $e(W_7^*) > \dim(W_7^*) = 2$. Čeprav je W_7^* podgraf grafa W_7 z evklidsko dimenzijo 2, je njegova evklidska dimenzija večja od 2. \square

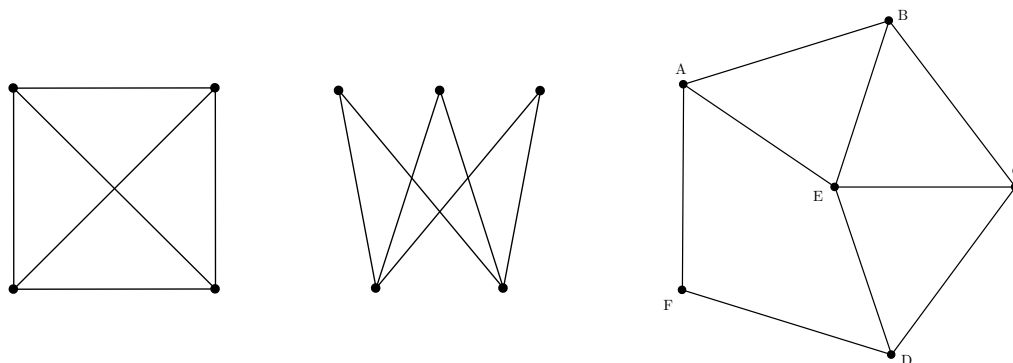
Po drugi strani pa velja, da če je H induciran podgraf grafa G , velja $e(H) \leq e(G)$ in je evklidska dimenzija nenaraščajoča invarianta grafa. Naslednjo lemo je enostavno dokazati, zato bo dokaz izpuščen.

Lema 10. Naj bo G graf, $u \sim w \sim v$ pot dolžine 2 v G , ρ predstavitev z enotsko razdaljo grafa G , in naj bosta $\rho(u)$ in $\rho(v)$ predstavitvi vozlišč $u, v \in V(G)$. Obstaja natanko $f_\rho(u, v)$ različnih predstavitev vozlišča w , kjer

$$f_\rho(u, v) = \begin{cases} 0, & (\rho(u) - \rho(v))^2 > 4, \\ 1, & (\rho(u) - \rho(v))^2 = 4, \\ 2, & (\rho(u) - \rho(v))^2 < 4. \end{cases}$$

Izrek 11. Če graf G vsebuje katerega izmed grafov K_4 , $K_{2,3}$ ali W_6^* , potem G ni graf z enotsko razdaljo.

Dokaz. S pomočjo prejšnje leme je enostavno dokazati, glej na primer [33], da K_4 in $K_{2,3}$ nista grafa z enotsko razdaljo. Torej tudi graf, ki vsebuje vsaj enega izmed njiju, ni graf z enotsko razdaljo. Dokažimo sedaj, da W_6^* ni graf z enotsko razdaljo. Označimo vozlišča grafa W_6^* kot na sliki 1.4(c). Induciran podgraf $W_6^{**} = W_6^*[\{A, B, C, D, E\}]$ grafa W_6^* ima natanko eno realizacijo z enotsko razdaljo v ravnini, recimo ji ρ . Vsi zvezni premiki predstavitev vozlišč realizacije ρ grafa W_6^{**} ohranjajo razdalje med predstavitvami vozlišč, zato je ρ toga realizacija. Definirajmo predstavitev ρ' grafa W_6^* , tako da $\rho'(v) = \rho(v)$ za vsak $v \in V(W_6^{**})$. Ker je $|\rho'(A)\rho'(D)| = 2$, obstaja natanko ena pot dolžine 2 med vozliščema $\rho'(A)$ in $\rho'(D)$, v grafu W_6^* pa sta dve, $A \sim E \sim D$ in $A \sim F \sim D$. Torej ρ' slika vozlišči F in E v eno točko $\rho'(F)$. Predstavitev ρ' je degenerirana, torej ni realizacija. \square



Slika 1.4: (a) Poln graf na štirih vozliščih K_4 . (b) Poln dvodelen graf $K_{2,3}$. (c) Graf W_6^* .

Opozoriti je potrebno, da se pojem dimenzija grafa uporablja tudi v povsem drugem kontekstu, ki nima povezave z grafi z enotsko razdaljo. Dimenzija grafa pravijo tudi najmanjšemu

številu n , tako da je graf G induciran podgraf tenzorskega produkta n polnih grafov; glej [65], poglavje A.5, stran 301.

1.4 Kromatično število prostora

Naj bo k naravno število. Neskončnemu grafu, ki ga dobimo, če za vozlišča vzamemo vse točke prostora \mathbb{R}^k ter definiramo, da sta dve vozlišči sosednji natanko takrat, ko sta na razdalji 1, pravimo *graf z enotsko koordinatizacijo prostora \mathbb{R}^k* (ang. the unit-distance graph of the k -space), in ga označimo z E^k . Trditev 12 in posledica 13 sledita neposredno iz definicije grafa E^k .

Trditev 12. *Graf G je k -razsežen graf z enotsko razdaljo natanko takrat, ko je izomorfen nekemu podgrafu grafa E^k . Graf G je k -razsežen graf z enotsko koordinatizacijo natanko takrat, ko je izomorfen nekemu induciranemu podgrafu grafa E^k .*

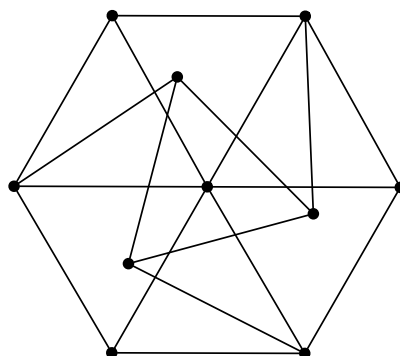
Posledica 13. *Dimenzija grafa G je najmanjše tako naravno število ℓ , da je G mogoče realizirati kot podgraf grafa E^ℓ . Evklidska dimenzija grafa G je najmanjše tako naravno število ℓ , da je G mogoče realizirati kot induciran podgraf grafa E^ℓ .*

Leta 1950 sta E. Nelson in J. R. Isbell (in kasneje neodvisno še P. Erdős [25] ter H. Hadwiger [45]) postavila vprašanje: “Kakšno je kromatično število $\chi(E^k)$ grafa E^k ?”. V literaturi se problem pogosto pojavlja zapisa v manj formalni obliki in sprašuje po kromatičnem številu k -dimenzionalnega evklidskega prostora. Znano je, da je $4 \leq \chi(E^2) \leq 7$. Spodnjo mejo 4 določa *Moserjev graf* [83], glej sliko 6.2, ki ima enotsko koordinatizacijo v \mathbb{R}^2 , ki je obenem tudi realizacija, in ki ga ni mogoče pravilno pobarvati s tremi barvami. Na podoben način lahko spodnjo mejo dobimo s pomočjo *Golombovega grafa* (poimenovan je po S. W. Golombu [108]); glej sliko 1.5.

Zgornjo mejo 7 določa neskončno pokritje ravnine s pravilnimi šestkotniki s stranico dolžine s , kjer je $\frac{1}{\sqrt{7}} < s < \frac{1}{2}$, in ki ga je mogoče pobarvati s sedmimi barvami, glej na primer [100]. Znano je, da je graf z enotsko koordinatizacijo racionalnega prostora \mathbb{Q}^k mogoče pobarvati le z dvema barvama, glej na primer [102].

Naslednji dobro znan izrek je spodbudil raziskovanje lastnosti končnih grafov z enotsko razdaljo in končnih grafov z enotsko koordinatizacijo.

Izrek 14 ([25]). *Naj bo k naravno število in naj ima (neskončen) graf G lastnost, da je vsak njegov končen podgraf mogoče pravilno pobarvati s k barvami. Potem je tudi graf G mogoče pravilno pobarvati s k barvami.*



Slika 1.5: Golombov graf je graf na desetih vozliščih s kromatičnim številom 4. V \mathbb{R}^2 ima enotsko koordinatizacijo, ki je obenem tudi realizacija.

Torej je kromatično število ravnine $\chi(E^2)$ enako največjemu kromatičnemu številu po vseh končnih grafih z enotsko koordinatizacijo, [100]. Ker sedem barv zadošča za pravilno barvanje grafa z enotsko koordinatizacijo evklidske ravnine, velja naslednja trditev.

Trditev 15. *Naj bo graf G za katerega velja $\chi(G) > 7$. Potem G ni graf z enotsko koordinatizacijo.*

Nekateri avtorji, glej na primer R. Hochberg [52], poskušajo poiskati (obvladljivo velik) graf z ožino večjo od štiri, ki ne bi bil graf z enotsko koordinatizacijo. Taki grafi zagotovo obstajajo, saj obstajajo grafi poljubne ožine, ki imajo kromatično število vsaj osem.

L. Moser in W. Moser sta v [83] med drugim pokazala, da imajo vsi grafi z enotsko koordinatizacijo na največ šestih vozliščih kromatično število največ 3. D. Pritikin se je v [100] ukvarjal z zgornjo mejo ≤ 7 in dokazal naslednja izreka.

Izrek 16 ([100]). *Če obstaja graf G s kromatičnim številom $\chi(G) = 7$ in evklidsko dimenzijo $e(G) = 2$, potem mora veljati $|V(G)| > 6197$.*

Izrek 17 ([100]). *Vsak graf G z evklidsko dimenzijo $e(G) = 2$ na največ 12 vozliščih ima kromatično število $\chi(G) \leq 4$.*

K. B. Chilakamarri et al. so v [20] predlagali pokritje ravnine z neskončnimi “tankimi” trakovi - regularnimi večkotniki. Pokazali so, da lahko grafe z enotsko razdaljo, ki nimajo prevelikih lihih ciklov pobarvamo s šestimi barvami.

Izrek 18 ([20]). *Naj bo G tak (lahko tudi neskončen) graf z enotsko razdaljo, za katerega velja, da G nima lihega cikla, ki bi vseboval več kot 13 vozlišč. Potem je $\chi(G) \leq 6$.*

D. Coulson je v [23] pokazal, da je kromatično število prostora $\chi(E^3) \leq 18$ in pred kratkim napovedal, da je $\chi(E^3) \leq 15$. Spodnja meja $5 \leq \chi(E^3)$ je znana že dlje časa [16]. Znano je tudi, da je kromatično število evklidskega prostora \mathbb{R}^k končno, glej na primer [34]. P. Frankl in R. M. Wilson [36] sta pokazala, da spodnja meja za kromatično število prostora eksponentno narašča.

Izrek 19 ([34, 16]). Naj bo k naravno število. Potem velja

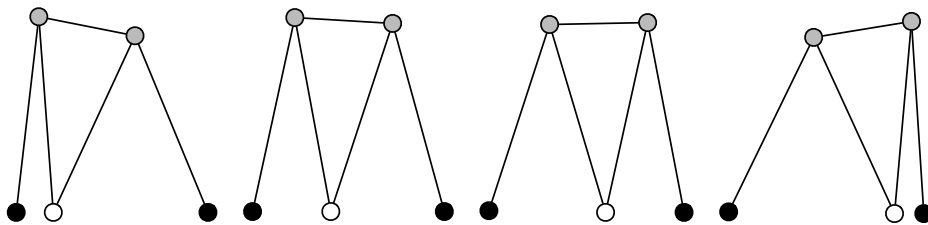
$$(1, 2 + o(1))^k < \chi(E^k) < (3 + o(1))^k.$$

M. Reid je v [102] pokazal, da graf E^2 z enotsko koordinatizacijo ravnine ni povezan.

Izrek 20 ([102]). Naj bo $K \subseteq \mathbb{R}$ komutativen obseg, naj bo k naravno število in naj bo E_K^k graf katerega vozlišča predstavljajo elementi K^k in kjer sta vozlišči sosednji če in samo če sta na evklidski razdalji 1. Graf E_K^2 je nepovezan, grafi E_K^k , za $k \geq 5$, pa so povezani.

1.5 Togost in fleksibilnost

Člen je togo telo z vsaj dvema točkama, ki služita kot priponki za ostale člene. Ko dva ali več členov spnemo tako, da je še vedno mogoče gibanje med njimi, pravimo točki, kjer smo jih pripeli, *spoj* oziroma *stik*. Mehanska kinematična veriga je sistem členov povezanih s spoji, ki dovolijo rotacijske ali linearne premike. Mehanski kinematični verigi pravimo *mehanizem*, če je mogoče dva ali več členov premakniti glede na fiksiran (včasih mu pravimo tudi ozemljen) člen, glej na primer [85] in sliko 1.6.



Slika 1.6: Štiri postavitev Robertsovega mehanizma [82], kjer črni točki mehanizma predstavljata fiksiran člen. Belo točko lahko premikamo in s tem določamo lokaciji sivih točk. Sivi točki in bela točka predstavljajo člen, ki je preko dveh rotacijskih spojev v sivih točkah povezan z drugima členoma - palicama med črno in sivo točko. Če na Robertsonov mehanizem gledamo kot na evklidsko predstavitev grafa potem je končno fleksibilen.

Evklidska predstavitev grafa je (končno) *fleksibilna*, če lahko zvezno premikamo predstavitve vozlišč grafa, tako da ohranjamo dolžine predstavitev povezav in vsaj enemu paru predstavitev nesosednjih vozlišč spremenimo razdaljo. Evklidska predstavitev, ki ni (končno) fleksibilna je (končno) *toga*. *Končen fleks* grafa G je družina evklidskih predstavitev $\rho(t)$ grafa G parametrizirana s časom t , tako da je lokacija vsakega vozlišča odvedljiva funkcija po spremenljivki t in kjer za vsako povezavo $i \sim j \in E(G)$ velja $(\rho_i(t) - \rho_j(t))^2 = \text{konstanta}$.

B. Hendrickson se je v [51] ukvarjal z *generičnimi* nedegeneriranimi predstavitvami – predstavitvami, pri katerih so lokacije vozlišč algebraično neodvisne nad kolobarjem racionalnih števil. Algebraična neodvisnost koordinat pomeni, da ne obstaja polinom v več spremenljivkah z racionalnimi koeficienti, ki ima v koordinatah vozlišč ničlo. V nekem smislu so torej koordinate vozlišč nepovezane (oz. splošne - generične). Izkaže se, da so za dani graf skoraj vse evklidske nedegenerirane predstavitve generične in da je množica vseh generičnih evklidskih nedegeneriranih predstavitev gosta množica v množici vseh evklidskih nedegeneriranih predstavitev.

Pogoje ki izhajajo iz omejitev za dolžine povezav odvajamo po času t . Za vsako povezavo $i \sim j \in E(G)$ torej velja

$$(\dot{\rho}_i(t) - \dot{\rho}_j(t)) (\rho_i(t) - \rho_j(t)) = 0,$$

kjer z $\dot{\rho}_i$ označujemo trenutno hitrost vozlišča i . Hitrostim, ki zadoščajo zgornjemu sistemu enačb pravimo *infinitesimalni premiki*. Kratek razmislek pokaže, da iz končnega fleksa sledi tudi infinitesimalno gibanje; obrat pa ne velja vedno. Evklidska predstavitev grafa G je *infinitesimalno toga*, če vsak infinitesimalni premik predstavitev vozlišč grafa G spremeni dolžino vsaj ene povezave iz $E(G)$, glej na primer [51]. Infinitesimalna togost grafa torej pomeni, da vozlišč grafa ne moremo infinitesimalno perturbirati in ob tem ohraniti dolžine vseh povezav. Povezava e grafa G je (infinitesimalno) *odvečna*, če je graf G^e (infinitesimalno) tog. Evklidska realizacija grafa G je (infinitesimalno) *prekomerno toga*, če so vse povezave (infinitesimalno) odvečne.

Izrek 21 ([51, 116]). *Če ima graf eno samo infinitesimalno togo evklidsko predstavitev, potem so vse njegove generične predstavitve toge.*

Nedegenerirane evklidske predstavitve danega grafa so torej ali vse infinitesimalno fleksibilne ali pa skoraj vse toge. Zato je infinitesimalna togost strožja kot (generična) togost. Ko govorimo o generičnih predstavitvah, lahko torej oznako “infinitesimalno” izpustimo [84]. Pravimo da je graf, ki ima (generično) togo evklidsko predstavitev (*generično tog*) in da je graf, ki ima (generično) prekomerno togo realizacijo (*generično prekomerno tog*).

Številu neodvisnih koordinat, ki so potrebne da definiramo pozicijo in orientacijo predmeta \mathcal{P} , pravimo *prostostna stopnja* ali *mobilnost* in ga označimo z $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}$ [105]. Neovirano togo telo v evklidski ravnini ima 3 prostostne stopnje. Vsak spoj fiksira vsaj eno prostostno stopnjo člena. Spodnja meja za prostostno stopnjo mehanizma \mathcal{M} v ravnini je podana z Grueblerjevo enačbo (s Kutzbach-Gruebler-jevim kriterijem), glej na primer [85], ki se glasi

$$\mathcal{D}_{\mathcal{M}} \geq 3(m - 1) - 2f - \ell,$$

kjer je m število členov (vključno s fiksimim členom) mehanizma, f število spojev v mehanizmu, ki omogočajo eno prostostno stopnjo, in ℓ število spojev v mehanizmu, ki omogočajo dve prostostni stopnji. Znana je tudi posplošitev Grueblerjeve enačbe na tridimenzionalni prostor.

Pri opazovanju evklidskih predstavitev grafov v ravnini si lahko pomagamo s teorijo togosti in fleksibilnosti. Evklidska predstavitev grafa, ki preslika povezave v daljice in vozlišča v točke v ravnini, tako da fiksira sliko ene povezave, je mehanizem. Na primer, za cikel C_4 na štirih vozliščih s fiksnimi dolžinami povezav vloženo v evklidsko ravnino (imenovan tudi *kinematična veriga štirih povezav*), velja $m = 4$, $f = 4$ in $\ell = 0$: preverimo lahko, da je $\mathcal{D}_{C_4} = 1$.

Evklidske predstavitve grafov, ki določijo dolžine povezav, lahko vsebujejo le *rotacijske* spoje - spoje, ki omogočajo le eno (to je rotacijsko) prostostno stopnjo. Tako lahko za evklidske predstavitve grafov, ki določajo dolžine povezav spodnjo mejo za prostostno stopnjo izračunamo s pomočjo prilagojene Grueblerjeve enačbe, ki se glasi

$$\mathcal{D}_G \geq 3(m - 1) - 2 \sum_{v \in V(G)} (d(v) - 1),$$

kjer je m število členov (vključno s fiksimim členom) mehanizma in kjer z $d(v)$ označimo stopnjo vozlišča $v \in V(G)$ grafa G . Petersenov graf $G(5, 2)$, ki ga bomo obravnavali v poglavju 4 ima 15 povezav in 10 vozlišč stopnje 3, zato $\mathcal{D}_{G(5,2)} \geq 3(15 - 1) - 2(10(3 - 1)) = 2$.

Obstajajo grafi za katere Grueblerjeva enačba določa le spodnjo mejo za prostostno stopnjo. Na primer, kolo W_7 ima eno samo (celo prekomerno) togo nedegenerirano predstavitev z enotsko razdaljo v ravnini. Če mu odstranimo poljubno povezavo, ki povezuje centralno vozlišče z nekim vozliščem na obodu, dobimo graf W_7^* , ki ima še vedno natanko eno togo nedegenerirano predstavitev z enotsko razdaljo v ravnini, glej sliko 1.14. Uporaba Grueblerjeve enačbe bi zaradi odvečne povezave, ki smo jo odstranili pri grafu W_7 , vrnila $\mathcal{D}_{W_7} \geq -1$.

Togi graf mora imeti dovolj povezav, povezave namreč onemogočajo premike vozlišč. V k -dimenzionalnem evklidskem prostoru ima n vozlišč $n k$ možnih neodvisnih gibanj, togo telo dimenzije k pa k translacij in $\binom{k}{2}$ rotacij. Število prostostnih stopenj $S(n, k)$ telesa z n vozlišči

v k -dimenzionalnem evklidskem prostoru dobimo tako, da od števila vseh možnih neodvisnih gibanj $n k$ odštejemo število togih premikov (rotacije, translacije), glej [51]. Velja torej

$$S(n, k) = \begin{cases} nk - \frac{k(k+1)}{2}, & \text{če } n \geq k, \\ \frac{n(n-1)}{2}, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Iz sistema enačb, ki ga dobimo, če odvajamo po času vse pogoje za dolžine povezav grafa, sestavimo *togostno matriko*. Togostna matrika ima $|E|$ vrstic in $k|V|$ stolpcev; vsak stolpec predstavlja koordinato vozlišča, vsaka vrstica pa povezavo. Vsaka vrstica ima natanko $2k$ neničelnih elementov. Togostna matrika ima v vrstici, ki pripada povezavi $i \sim j$ neničelne elemente le v k stolpcih, ki pripadajo koordinatam i -tega vozlišča in k stolpcih, ki pripadajo koordinatam j -tega vozlišča. Vsak neničelni element je razlika istoležnih koordinat evklidske predstavitve krajišč povezave, ki pripada vrstici. Rang togostne matrike je tesno povezan s togostjo opazovanega grafa.

Izrek 22 ([51]). *Evklidska predstavitev grafa G v k -dimenzionalnem evklidskem prostoru je toga, če in samo če ima predstavitvi pripadajoča togostna matrika rang enak $S(|V(G)|, k)$.*

Naslednji izrek pove, da mora imeti graf poleg zadostnega števila povezav te povezave tudi dobro razporejene.

Izrek 23 ([51]). *Naj bo graf G graf z natanko $S(|V(G)|, k)$ povezavami in z evklidsko predstavitvijo v k -dimenzionalnem evklidskem prostoru. Če je G tog, potem ne vsebuje podgrafa G' z več kot $S(|V(G')|, k)$ povezavami.*

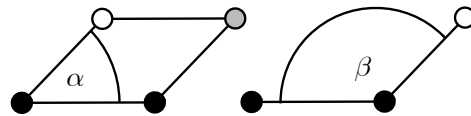
To (v splošnem le potrebno) lastnost je za grafe, ki so togi v ravnini opazil že G. Laman, ki je dokazal, da je ta pogoj v ravnini tudi zadosten. V literaturi temu pogoju pravijo tudi *Lamanov pogoj*.

Posledica 24 (Laman, [51]). *Graf $G = (V, E)$ z $2|V| - 3$ povezavami je tog v ravnini, če in samo če ne vsebuje podgrafa $G' = (V', E')$ z več kot $2|V'| - 3$ povezavami.*

B. Hendrickson je v [51] predstavil algoritem s časovno zahtevnostjo $\mathcal{O}(n^2)$, ki v dimenziji 2 preveri togost danega grafa. V istem članku je določil tri potrebne pogoje, da imajo skoraj vse evklidske predstavitve grafa G enolično realizacijo v k -dimenzionalnem evklidskem prostoru, to so: G mora biti tog, $(k + 1)$ -povezan in prekomerno tog graf.

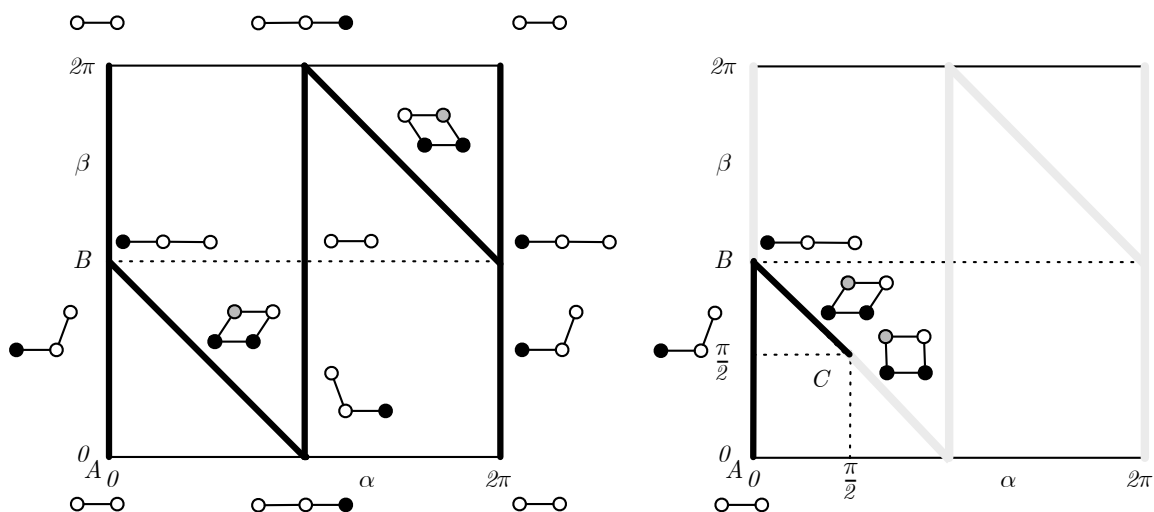
Teorijo togosti in fleksibilnosti lahko uporabimo za analizo konfiguracijskih prostorov ravninskih predstavitev z enotsko razdaljo danega grafa. S tem, da upoštevamo simetrije predstavitev, lahko faktoriziramo konfiguracijski prostor predstavitve; za podrobnejšo razlago glej

[113, 10]. Na primer, cikel na štirih vozliščih C_4 lahko nedegenerirano z enotsko razdaljo realiziramo v evklidski ravnini kot romb, degenerirano pa predstavimo kot pot na treh (P_3) oziroma dveh (P_2) vozliščih, glej sliko 1.7 in sliko 1.8. Degenerirano predstavitev dobimo v dveh primerih, ko je $\alpha = 0$ in ko je $\alpha = \pi$. Obakrat parameter β določa krožnico. Romb je torej definiran za $\alpha \notin \{0, \pi\}$.



Slika 1.7: Nedegenerirana in degenerirana predstavitev z enotsko razdaljo cikla C_4 v evklidski ravnini.

Konfiguracijski prostor cikla C_4 lahko predstavimo v \mathbb{R}^2 s tremi vertikalnimi daljicami $\alpha \in \{0, \pi, 2\pi\}$ in dvema poldiagonalama; prva povezuje točki $(0, \pi)$ in $(\pi, 0)$, druga pa točko $(\pi, 2\pi)$ s točko $(2\pi, \pi)$, glej sliko 1.8 (a). Konfiguracijski prostor faktoriziran glede na simetrije predstavitev pa je sestavljen le iz dveh delov; stikata se v točki $B = (0, \pi)$. Prvi del je daljica, ki povezuje točko $A = (0, 0)$ s točko $B = (0, \pi)$, drugi pa daljica iz $B = (0, \pi)$ v $C = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, glej sliko 1.8 (b). Najbolj simetrično predstavitev (kvadrat) dobimo v točki $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$.



Slika 1.8: (a) Konfiguracijski prostor cikla C_4 v \mathbb{R}^2 . (b) Konfiguracijski prostor cikla C_4 faktoriziran glede na simetrije predstavitev.

Teorija mnogoterosti in difeomorfizmov presega okvire tega dela, podrobnejšo razlago je

mogoče dobiti v [10]. Naslednji izrek opisuje lastnost konfiguracijskega prostora skoraj vseh evklidskih realizacij dovolj velikega povezanega fleksibilnega grafa.

Izrek 25 ([51]). *Naj bo G povezan, fleksibilen graf z več kot $k + 1$ vozlišči. Za skoraj vsako evklidsko realizacijo grafa G v \mathbb{R}^k vsebuje konfiguracijski prostor realizacije grafa podmnogoterost, ki je difeomorfna krožnici.*

1.6 Znanе razsežnosti grafov

Za vsak graf G obstaja tako naravno število $k_0 > 0$, tako da za vsako naravno število $k \geq k_0$ velja, da ima G k -razsežno koordinatizacijo z enotsko razdaljo, ki ni visoko degenerirana; glej na primer [33] in [79].

Izrek 26 ([33, 75]). *Naj bo n naravno število, naj bo K_n poln graf na n vozliščih in naj bo ℓ njegova poljubna povezava. Potem je*

$$e(K_n) = \dim(K_n) = n - 1$$

in

$$e(K_n - \ell) = \dim(K_n - \ell) = n - 2.$$

Izrek 27 ([33]). *Naj bo T drevo. Potem*

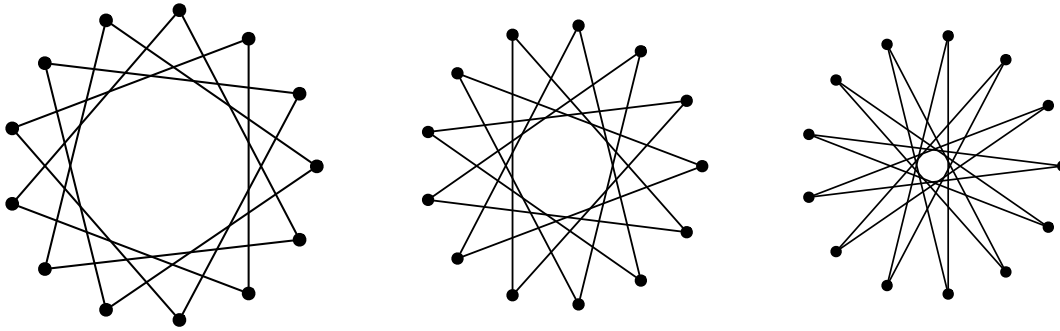
$$e(T) \leq 2.$$

Lema 28 ([12, 39]). *Za vsako naravno število $n \geq 3$ ima cikel C_n na n vozliščih evklidsko koordinatizacijo v \mathbb{R}^2 . Vozlišča lahko predstavimo z enakomerno razporejenimi točkami na krožnici z radijem r . Če je $n = 6$, mora biti $r = 1$, drugače pa obstaja krožnica z radijem $r < 1$. Še več, v primeru ko je $n > 6$, je r podan z enačbo*

$$r_n = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi k}{n}},$$

za neko naravno število $\frac{n}{4} < k < \frac{n}{2}$, ki je tuje številu n .

Predstavitvi ki jo dobimo, če uporabimo lemo 28, bomo rekli *zvezdna predstavitev* oziroma predstavitev v obliki zvezdnega večkotnika. Vozlišča cikla C_n predstavimo z enakomerno razporejenimi točkami na krožnici z radijem r_n , tako da sosednji vozlišči cikla preslikamo v točki na krožnici, za kateri velja, da krajši lok med njima vsebuje $k - 1$ slik vozlišč. Označili jo bomo z $\rho^*(n, k)$, glej sliko 1.9. K. B. Chilakamari et al. so v [20] obravnavali tudi drugačne – “tanke” predstavitve ciklov (regularnih večkotnikov s stranico ena) z enotsko razdaljo, tako da so cikle predstavili na (neskončnem) pravokotnem traku s čim manjšo širino.



Slika 1.9: Predstavitev cikla na 13 vozliščih kot (a) zvezdni večkotnik $\rho^*(13, 4)$, (b) zvezdni večkotnik $\rho^*(13, 5)$ in (c) zvezdni večkotnik $\rho^*(13, 6)$.

Trditev 29 ([12]). Naj bo $n \geq 4$ naravno število. Evklidska dimenzija kolesa $W_n = W_{1,n-1}$ je podana z

$$e(W_n) = \begin{cases} 2, & \text{če } n = 7, \\ 3, & \text{če } n \geq 4 \text{ in } n \neq 7. \end{cases}$$

Izrek 30 ([12]). Naj bo $n \geq 3$ naravno število. Evklidska dimenzija posplošenega kolesa $W_{m,n}$ je podana z

$$e(W_{m,n}) = \begin{cases} 2, & \text{če } m = 1, n = 6, \\ 3, & \text{če } m = 1, n \neq 6 \text{ ali } m = 2, n \neq 6, \\ 4, & \text{če } m = 2, n = 6 \text{ ali } m \geq 3, n \neq 6, \\ 5, & \text{če } m \geq 3 \text{ in } n = 6. \end{cases}$$

Izrek 31 ([12, 33, 74]). Naj bosta n in m naravni števili in naj velja $m \leq n$. Evklidska dimenzija polnega dvodelnega grafa $K_{m,n}$ je podana z

$$e(K_{m,n}) = \begin{cases} 1, & \text{če } n = m = 1, \\ 2, & \text{če } m = 1 \text{ in } n \geq 2, \\ 2, & \text{če } n = m = 2, \\ 3, & \text{če } m = 2 \text{ in } n \geq 3, \\ 4, & \text{če } 3 \leq m \leq n. \end{cases}$$

Izrek 32 ([12]). Naj bodo p, q in r naravna števila in naj velja $p \leq q \leq r$. Evklidska dimenzija

polnega tridelnega grafa $K_{p,q,r}$ je podana z

$$e(K_{p,r,q}) = \begin{cases} 2, & \text{če } p = q = 1 \text{ in } r \leq 2, \\ 3, & \text{če } p = q = 1 \text{ in } r \geq 3, \\ 3, & \text{če } q = r = 2, \\ 4, & \text{če } q = 2 \text{ in } r \geq 3, \\ 5, & \text{če } p \leq 2 \text{ in } q \geq 3, \\ 6, & \text{če } p \geq 3. \end{cases}$$

V ravnini so samo trije regularni večkotniki, ki zapolnijo ravnino: enakostranični trikotnik, kvadrat in enakostranični šestkotnik. Grafi sestavljeni iz regularnih enakostraničnih n -kotnikov so ravno živali.

Trditev 33 ([12]). Če je G žival, potem je njegova evklidska dimenzija enaka 2.

Lema 34 ([74]). Naj bo G poljuben graf, n naravno število in definirajmo

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{če } n = 2, \\ 2, & \text{če } n \geq 3. \end{cases}$$

Za naravni števili $p, q \geq 2$ velja

- $e(G + \overline{K_p}) \geq e(G) + f(p)$,
- $e(K(p, q)) = f(p) + f(q)$,
- $e(K_s + \overline{K_p}) = s - 1 + f(p)$,
- $e(K_s + K(p, q)) = s + f(p) + f(q)$,

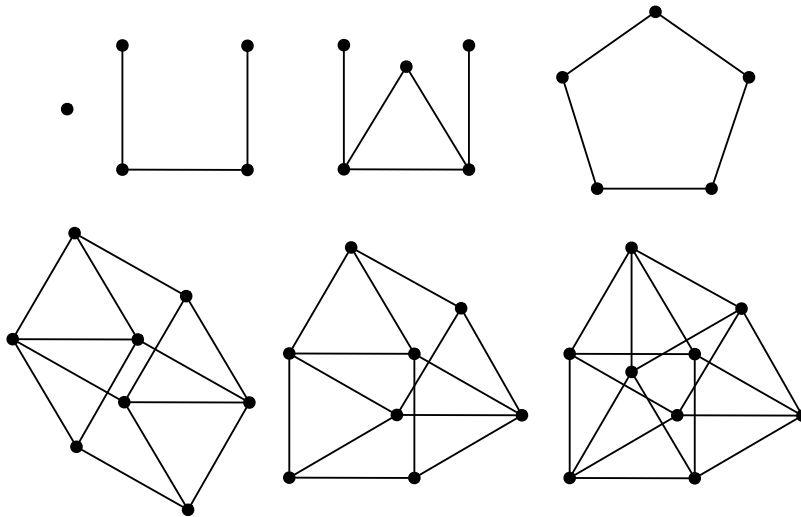
Izrek 35 ([74]). Naj bodo s, t in u naravna števila za katera velja $s + t + u \geq 2$ in naj bodo n_1, \dots, n_u naravna števila večja ali enaka 3. Naj bo G poln $(s + t + u)$ -delen graf s s razredi vozlišč moči 1, t razredi vozlišč moči 2 in u razredi vozlišč moči vsaj 3. Potem je evklidska dimenzija polnega $(s + t + u)$ -delnega grafa G , podana z

$$e(K_{1, \dots, 1, 2, \dots, 2, n_1, \dots, n_u}) = \begin{cases} s + t + 2u, & \text{če } t + u \geq 2, \\ s + t + 2u - 1, & \text{če } t + u \leq 1. \end{cases}$$

Izrek 36 ([39]). Naj bosta n in m naravni števili in naj bosta C_n in C_m cikla na n oziroma m vozliščih. Potem je evklidska dimenzija spoja $C_m * C_n$ podana z

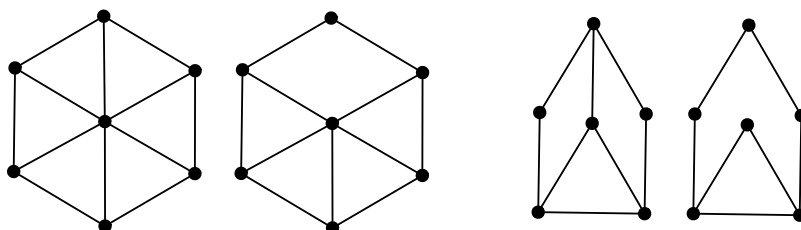
$$e(C_m * C_n) = \begin{cases} 4, & \text{če } m = 4 \text{ in } n = 4, \\ 4, & \text{če } m = 5 \text{ in } n = 5, \\ 6, & \text{če } m = 6 \text{ in } n = 6, \\ 5, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Nekateri grafi imajo lastnost, da sta tako graf G kot njegov komplement \overline{G} grafa z (evklidsko) dimenzijo 2. Takrat pravimo, da sta G in \overline{G} *komplementarni par grafov z enotsko razdaljo* (koordinatizacija) oziroma, da ima G komplementarni graf z enotsko razdaljo (koordinatizacija); ang. *co-unit distance graph* in *strict co-unit distance graph*. Na primer, cikel C_5 je sebi komplementarni graf z enotsko koordinatizacijo, glej sliko 1.10.



Slika 1.10: Vsi sebi komplementarni grafi z enotsko razdaljo [40].

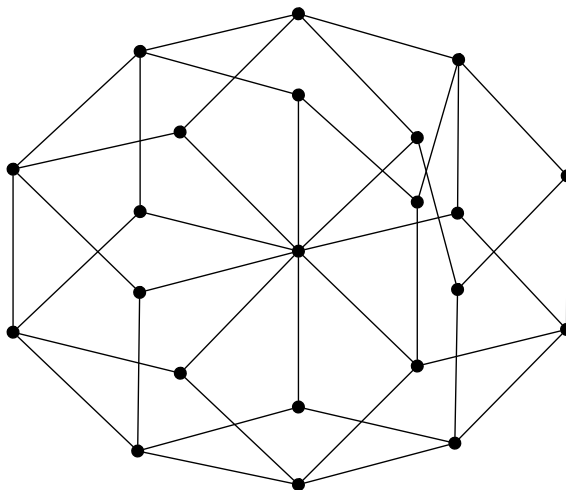
Izrek 37 ([40]). *Obstaja natanko 69 različnih grafov, ki imajo komplementarni graf z enotsko razdaljo; 55 izmed njih je povezanih, 7 pa sebi komplementarnih. Izmed 69 grafov, ki imajo komplementarni graf z enotsko razdaljo so samo 4 taki, ki nimajo komplementarnega grafa z enotsko koordinatizacijo. Vsi štirje so povezani in niso sebi komplementarni grafi z enotsko razdaljo, glej sliko 1.11.*



Slika 1.11: Vsi grafi ki imajo komplementarni graf z enotsko razdaljo in nimajo komplementarnega grafa z enotsko koordinatizacijo [40].

Najmanjši netrivialen graf, ki ima togo koordinatizacijo z enotsko razdaljo v ravnini je polni graf na treh vozliščih K_3 . H. Maehara je našel grafa z enotsko razdaljo, ki ne vsebujeta

trikotnika in imata le infinitezimalno togo oziroma togo realizacijo z enotsko razdaljo v ravnini, ki ni visoko degenerirana; glej [78] in sliko 1.12.



Slika 1.12: Graf z enotsko razdaljo, ki ne vsebuje trikotnika in ima le togo realizacijo z enotsko razdaljo v ravnini, glej [78].

Izrek 38 ([78]). Naj bo G graf z enotsko razdaljo v \mathbb{R}^k . Potem ga lahko razširimo do togega grafa z enotsko razdaljo v \mathbb{R}^k .

Za nekatere grafe so znane le dimenzije in ne tudi evklidske dimenzije.

Izrek 39 ([33]). Kaktusi imajo dimenzijo največ 2.

Že P. Erdős et al. so v [33] dokazali naslednjo trditev in omenili (ter ne dokazali) skromno posplošitev.

Trditev 40 ([33]). Naj bo G poljuben graf. Dimenzija kartezičnega produkta

$$\dim(G \square K_2) = \begin{cases} \dim(G), & \dim(G) \geq 2, \\ \dim(G) + 1, & \dim(G) = 1, \\ \dim(G) + 1, & \dim(G) = 0. \end{cases}$$

Trditev 41 ([33]). Dimenzija n -kocke je $\dim(Q_n) = 2$.

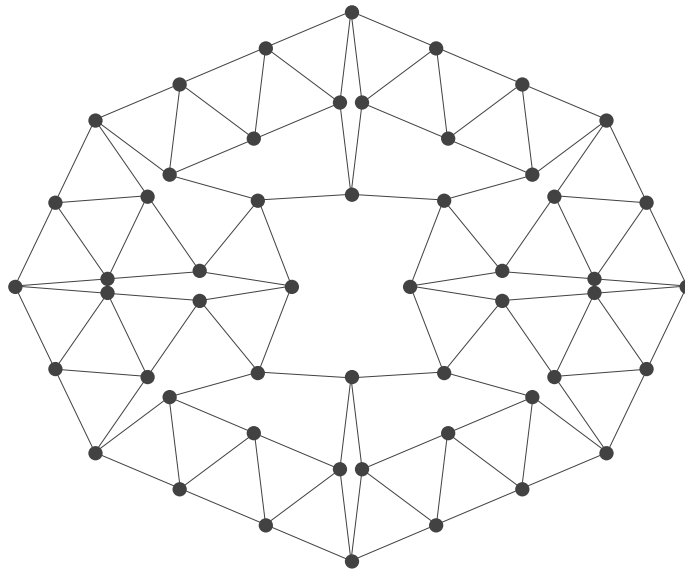
V poglavju 2 se bomo ukvarjali z dimenzijo grafovskih produktov in operacij nad grafi in ta rezultat posplošili.

S tem, ko iz grafa odstranimo povezavo lahko grafu povečamo evklidsko dimenzijo; to na primer velja za grafa W_7 in W_7^* . Podobno velja tudi, če grafu dodamo le eno vozlišče, na primer $e(W_{1,6}) = 2$, medtem ko je $e(W_{2,6}) = 4$, ter $e(P_7) = 1$, medtem ko je $e(P_7 + K_1) = 3$.

P. Erdős et al. so v [33] omenili, da je $G(5, 2)$ graf z enotsko razdaljo, glej sliko 4.1 (a). V poglavju 4 bodo prikazane vse (tudi degenerirane) predstavitve z enotsko razdaljo Petersenovega grafa. Realizacija, ki jo je predstavil P. Erdős je v bistvu tudi koordinatizacija Petersenovega grafa v ravnini, zato ima Petersenov graf evklidsko dimenzijo 2. Njihov rezultat bomo v poglavju 5 posplošili na veliko poddružino I-grafov.

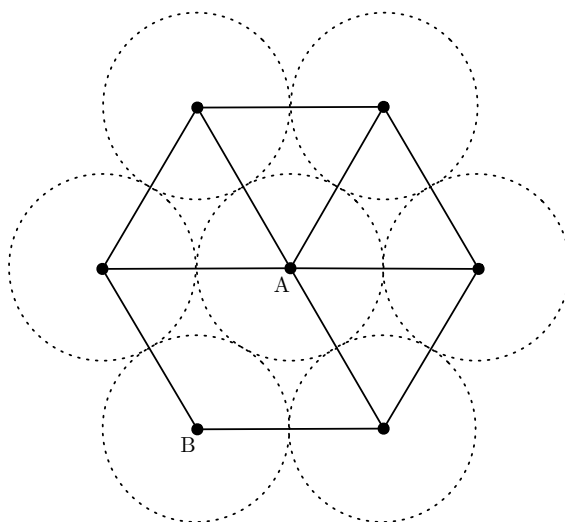
Trditev 42 ([12]). *Evklidska dimenzija Petersenovega grafa $G(5, 2)$ je 2.*

Harborthov graf na sliki 1.13 je najmanjši znan 4-regularni ravninski graf z enotsko razdaljo (graf vžigalic). V [38] je bilo pokazano, da ima graf togo realizacijo z enotsko razdaljo v ravnini pri kateri se povezave ne sekajo.



Slika 1.13: Harborthov graf ima predstavitev z enotsko razdaljo v ravnini, pri kateri se povezave ne sekajo.

Vzemimo končno množico neprekrivajočih se diskov (oz. kovancev) v ravnini. Konstruiramo graf, tako da vsakemu disku priredimo vozlišče in rečemo, da sta dve vozlišči sosednji, če in samo če se diska, katerima sta prirejeni izbrani vozlišči, dotikata. Če graf lahko konstruirano na opisan način, grafu pravimo *graf kovancev*, [48]. Znano je, glej [70], da je vsak ravninski graf graf kovancev. Če imajo vsi kovanci enako velikost, potem grafu pravimo *peni graf* [48]. Peni graf je graf z enotsko koordinatizacijo v ravnini. Iz primera na sliki 1.14 je razvidno, da obstajajo grafi z nedegenerirano predstavitvijo z enotsko razdaljo v ravnini, ki niso peni grafi.



Slika 1.14: Ravninska realizacija z enotsko razdaljo grafa W_7^* . Ker ima graf W_7^* samo eno nedegenerirano realizacijo z enotsko razdaljo, pri tej pa vozlišči A in B nista sosednji, čeprav se njuna diska dotikata, graf W_7^* ni peni graf.

1.6.1 Povezave z grafovskimi invariantami

V tem razdelku bomo prikazali znane povezave med dimenzijama grafov in grafovskimi invariantami.

Največje število povezav, ki jih lahko ima graf z enotsko koordinatizacijo je znan Erdösev nerešen problem iz leta 1946, za katerega je P. Erdős rekel, da je “njegov najbolj udaren prispevek h geometriji”, glej [32, 112].

Izrek 43 ([33]). Naj bo n naravno število. Razdalja ena lahko med n točkami v \mathbb{R}^4 nastopi največkrat $n + \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ krat. Ta meja je dosežena, če je $n \equiv 0 \pmod{8}$.

Izrek 44 ([33]). Za vse grafe z n vozlišči, m povezavami in dimenzijo $2k$ ali $2k + 1$, velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max \frac{m}{n^2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

Zgornjo mejo naslednjega izreka izboljšujejo vse od leta 1946, odkar je P. Erdős predpostavil, da je največje število povezav, ki jih lahko ima graf z enotsko koordinatizacijo z n vozlišči reda velikosti $\mathcal{O}(n^{1+\varepsilon})$.

Izrek 45 ([31, 67, 110]). Naj bo G graf z evklidsko dimenzijo $e(G) = 2$, številom vozlišč $n = |V(G)|$ in $m = |E(G)|$ povezavami. Potem

$$n^{1 + \frac{c}{\log \log n}} < m < c n^{\frac{4}{3}},$$

kjer je c pozitivna konstanta.

Znane so tudi meje za največje število povezav grafa G z evklidsko dimenzijo $e(G) \geq 3$.

Izrek 46 ([21, 22, 110]). Naj bo G graf z evklidsko dimenzijo $e(G) = 3$, številom vozlišč $n = |V(G)|$ in $m = |E(G)|$ povezavami. Potem velja

$$c_1 n^{\frac{4}{3}} \log \log n < m < c_2 n^{\frac{3}{2}+o(1)},$$

kjer sta c_1 in c_2 pozitivni konstanti.

Izrek 47 ([11]). Naj bo G graf z evklidsko dimenzijo $e(G) = 4$, številom vozlišč $n = |V(G)|$ in $m = |E(G)|$ povezavami. Če ima enačba

$$\left(\sin \frac{v_1 \pi}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right)^{-2} + \left(\sin \frac{v_2 \pi}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right)^{-2} = 4$$

rešitev $v_1, v_2 \in \mathbb{N}$, kjer velja $v_1, v_2 < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, potem je $m \leq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor + n$, sicer pa je $m \leq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor + n - 1$. Rešitev enačbe obstaja vsaj v primeru, ko je n deljivo z 8; takrat lahko vzamemo $v_1 = v_2 = \frac{n}{8}$.

Izrek 48 ([11, 112]). Naj bo G graf z evklidsko dimenzijo $e(G) \geq 4$, številom vozlišč $n = |V(G)|$ in $m = |E(G)|$ povezavami. Potem velja

$$c n^2 < m,$$

kjer je c pozitivna konstanta.

Dimenzija grafa je navzgor omejena s kromatičnim številom grafa.

Izrek 49 ([33]).

$$\dim(G) \leq 2\chi(G)$$

Posledica 50. Če je graf G ravninski, ima dimenzijo $\dim(G) \leq 8$.

Dokaz. Uporabimo izrek štirih barv, ki pove, da imajo ravninski grafi kromatično število manjše ali enako 4. Torej je njihova dimenzija manjša ali enaka $2 \cdot 4 = 8$. \square

Posledica 51. Če obstaja barvanje vozlišč grafa G s $\chi(G)$ barvami, tako da obstaja $k \geq 0$ barv, s katerimi smo pobarvali po največ dve vozlišči, potem

$$\dim(G) \leq 2\chi(G) - k.$$

Dokaz. Naj bo $n > 0$. Vzemimo poln graf K_n na n vozliščih. Njegova dimenzija je $n - 1$. V \mathbb{R}^n obstajata natanko dve točki, ki sta ena oddaljeni od predstavitev vseh vozlišč grafa K_n . Podobno razmislimo, da obstajata vsaj dve točki, ki sta ena oddaljeni od vseh predstavitev vozlišč grafa G v $\mathbb{R}^{\dim(G)+1}$. Naj bodo c_1, \dots, c_k barve s katerimi pobarvamo po največ dve vozlišči grafa G in naj bodo v_1, v_2, \dots, v_m vozlišča grafa G , ki jih pobarvamo z barvami c_1, \dots, c_k . Induciran podgraf $H := G[V(G) \setminus \{v_1, v_2, \dots, v_m\}]$ ima kromatično število $\chi(H) = \chi(G) - k$, zato je njegova dimenzija $\dim(H) \leq 2\chi(G) - 2k$. Vozlišča v_1, v_2, \dots, v_m , ki so pobarvana z eno izmed barv c_1, \dots, c_k , povečajo dimenzijo grafa H po največ ena na barvo. Torej je $\dim(G) \leq \dim(H) + k \leq 2\chi(G) - k$. \square

Lema 52 ([33]). Če je G graf z n vozlišči in ožino večjo kot $c \log n$ za dovolj veliko konstanto c , potem je $\dim(G) \leq 6$.

K. B. Chilakamarri, R. Hochberg in P. O'Donnell so v seriji prispevkov [17, 54, 86, 87, 88, 89, 90] opazovali 4-kromatične grafe z enotsko razdaljo brez trikotnikov. Rezultati so povzeti v naslednjem izreku.

Izrek 53 ([89, 90]). Za vsako naravno število $k \geq 3$ obstaja graf G z ožino k , s kromatičnim številom $\chi(G) = 4$ in dimenzijo $\dim(G) = 2$.

Če je graf G zunanjeravninski, potem je enostavno preveriti, da je njegovo kromatično število največ 3. Po izreku 49 ima dimenzijo največ 6. Zgornjo mejo lahko izboljšamo na največ 3, glej lemo 54.

Lema 54. Če je končen (števen) graf G zunanjeravninski, potem ima evklidsko dimenzijo $e(G) \leq 3$.

Dokaz. Grafu G , če je mogoče, dodajamo povezave dokler ohranjamo zunanjeravninskost. Dobimo maksimalni zunanjeravninski graf, recimo mu G' . Znano je, glej na primer [46], da je vsak maksimalni zunanjeravninski graf triangulacija večkotnika. Označimo z $F = E(G') \setminus E(G)$. Triangulacijo večkotnika (zaporedje $|V(G')| - 2$ lic) brez težav predstavimo v \mathbb{R}^3 . Vsako lice lahko predstavimo s trikotnikom, tako da povezave, ki so v F narišemo dolge 1, 1 povezave iz $E(G)$ pa z dolžino 1.

Vemo, da v G' obstaja vsaj eno lice, ki vsebuje vozlišče s stopnjo 2. Izberemo poljubno tako lice, v evklidsko ravnino ga lahko vložimo na en sam način. Recimo, da znamo pravi povezan induciran podgraf H grafa G' predstaviti v trodimenzionalnem evklidskem prostoru tako, da je vsak par nepovezanih vozlišč v H predstavljen s točkama v \mathbb{R}^3 , ki nista oddaljeni

ena. Vemo, da v G' obstaja (vsaj eno tako) vozlišče $v \in V(G') \setminus V(H)$, ki leži na licu L_2 v G' , za katerega velja, da ima L_2 s H skupno povezavo v G' . Skupno povezavo označimo z e . Vozlišče v predstavimo v \mathbb{R}^3 tako, da lice L_2 narišemo kot trikotnik. Z rotacijo, ki ima os rotacije v daljci, ki predstavlja povezavo e , lahko poskrbimo da preslikamo vozlišče v v točko, ki ni ena oddaljena od nobene slike vozlišča iz $V(H) \setminus V(e)$. To lahko storimo brez težav, saj se moramo izogibati končno (števno) točkam, na voljo pa imamo neštevno mnogo rotacij. Neformalno torej lahko rečemo, da na vsakem koraku trikotnik ki ga dodajamo, po potrebi “prepognemo” v tretji dimenziji. Torej je $e(G') \leq 3$.

Predstavitve vseh povezav, ki so v F odstanimo in dobimo 3-razsežno koordinatizacijo z enotsko razdaljo. Zgornjo mejo lahko dosežemo; graf $P_7 * K_1$ na primer ima evklidsko dimenzijo $e(P_7 * K_1) = 3$. \square

Naslednji izrek je dokazan v [15].

Lema 55 ([15]). *Graf G je zunanjeravninski, če in samo če ne vsebuje niti K_4 niti $K_{2,3}$ kot minorja.*

Posledica 56. *Če končen (števen) graf G ne vsebuje niti K_4 niti $K_{2,3}$ kot minorja, potem ima evklidsko dimenzijo $e(G) \leq 3$.*

Posledica 57. *Naj bo G graf z rodnom $\gamma(G)$. Potem*

$$\dim(G) \leq 2 \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 48\gamma(G)}}{2} \right\rfloor.$$

Dokaz. Uporabimo znano definicijo Heawoodovega števila, glej na primer [103]. \square

Kot bomo videli, zgornja meja za evklidsko dimenzijo $e(G)$ ne izhaja le iz kromatičnega števila $\chi(G)$ grafa G .

Izrek 58 ([75]). *Za vsako naravno število k obstaja končen dvodelen graf z evklidsko dimenzijo k .*

Po prejšnjem izreku torej velja, da za vsako naravno število k obstaja končen dvodelen graf, ki ga ne moremo vložiti v E^k kot induciran podgraf. Torej obstajajo taki dvodelni grafi (s $\chi(G) = 2$), ki jih ni mogoče vložiti kot induciran podgraf v $E^{2\chi(G)} = E^4$. Poljuben dvodelni graf G z razredoma vozlišč V_1 in V_2 , kjer je $m = |V_1|$ in $n = |V_2|$, je podgraf grafa $K_{m,n}$. Po izreku 31 vemo, da je za naravni števili $m, n > 2$ evklidska dimenzija grafa $K(m, n)$ enaka 4. Torej E^4 vsebuje (dvodelne) podgrafe s poljubno velikimi evklidskimi dimenzijami.

Posledica 59. Zgornje meje za evklidsko dimenzijo $e(G)$ ne moremo postaviti le glede na kromatično število $\chi(G)$ grafa G .

V [79] je pokazano, da je evklidska dimenzija grafa G omejena z dvakratnikom maksimalne stopnje grafa.

Izrek 60 ([75]). Naj bo G končen graf z maksimalno stopnjo $\Delta(G)$ in kromatičnim številom $\chi(G)$. Potem

$$e(G) \leq \binom{\chi(G)}{2} (\Delta(G) + 1).$$

Posledica 61 ([75]). Vsak končen graf G z maksimalno stopnjo $\Delta(G)$ ima evklidsko dimenzijo

$$e(G) \leq \frac{(\Delta(G)^3 - \Delta(G))}{2}.$$

Dokaz. Uporabimo Brooksov izrek. □

Za dvodelne grafe, kjer je $\chi(G) = 2$, je zgornja meja natančna, saj je $e(K_{3,3}) = 4$. Za grafe s kromatičnim številom večjim od 2 pa lahko to mejo še izboljšamo. Uporabili bomo ortogonalno predstavitev grafa, ki jo je predstavil Lovász v [72].

Lema 62 (Lovász, [72]). Naj bo G graf z maksimalno stopnjo $\leq d$. Potem obstaja množica enotskih vektorjev $M = \{\bar{v} \mid v \in V(G)\}$ v \mathbb{R}^{2d} moči $|V(G)|$, tako da velja

1. Poljubnih $d + 1$ ali manj vektorjev iz M je linearno neodvisnih.
2. Vektorja \bar{u} in \bar{v} sta ortogonalna če in samo če v grafu G obstaja povezava $u \sim v$.

Izrek 63 ([79]). Naj bo G graf z maksimalno stopnjo $\Delta(G)$. Potem

$$e(G) \leq 2 \Delta(G).$$

Dokaz. Po prejšnji lemi obstaja množica enotskih vektorjev $M = \{\bar{v} \mid v \in V(G)\}$ v $\mathbb{R}^{2 \Delta(G)}$. Vzemimo sedaj množico točk $\widetilde{M} = \{\frac{1}{2} \bar{v} \mid v \in V(G)\}$. Za poljubna $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in \widetilde{M}$ je $\|\bar{v}_1 - \bar{v}_2\|_2 = 1$. Torej je graf G izomorfen inducirane podgrafu grafa z enotsko koordinatizacijo prostora $\mathbb{R}^{2 \Delta(G)}$ in $e(G) \leq 2 \Delta(G)$. □

Izrek 64 ([79]). Naj bo G d -degeneriran graf. Potem

$$e(G) \leq 2d + 1.$$

Če je graf ločljiv (ima prerezno vozlišče), potem lahko predstavitev z enotsko razdaljo vsakega bloka obravnavamo ločeno, glej naslednji izrek.

Lema 65. *Naj bo naravno število $k \geq 0$ in naj bosta G_1 in G_2 grafa s k -razsežno enotsko koordinatizacijo. Potem je graf G , ki ga dobimo s kopiranjem grafov G_1 in G_2 na prerezno vozlišče $v \in V(G_1) \cap V(G_2)$, graf s k -razsežno enotsko koordinatizacijo.*

Dokaz. Sledimo ideji dokaza v [18]. Označimo z \mathcal{D}_i enotsko koordinatizacijo v \mathbb{R}^k grafa G_i za $i = 1, 2$. Translirajmo \mathcal{D}_2 , tako da sliki prereznega vozlišča v sovpadata. Enotsko koordinatizacijo \mathcal{D}_1 lahko fiksiramo in se z rotacijo enotske koordinatizacije \mathcal{D}_2 okoli slike prereznega vozlišča v izogibamo degeneriranim predstavitvam. Ker je degeneracij končno mnogo, rotacij (v več dimenzijah) pa neštavno mnogo, zlahka poiščemo tako rotacijo, ki ne povzroči degeneracij. Podobno je le končno mnogo takih rotacij, ki povzročijo predstavitev pri katerih obstajata nesosednji vozlišči na razdalji ena. Torej obstaja taka rotacija, ki povzroči nedegenerirano k -razsežno koordinatizacijo z enotsko razdaljo. \square

Izrek 66 ([14]). *Naj bo K_4^- graf, ki ga dobimo iz K_4 tako, da odstranimo poljubno povezavo. Naj bo G tak graf za katerega velja, da graf K_4^- ni njegov minor. Potem je G graf z enotsko koordinatizacijo v ravnini.*

Trditev 67 ([12]). *Naj bo G poljuben graf in \vee označuje korona produkt.*

1. Če je $G \neq P_n$ povezan graf, potem $e(G \vee K_1) = e(G)$.
2. Če $e(G) \geq 2$, potem $e(G \vee K_2) = e(G)$.

V poglavju 2 bomo trditev 67 razširili.

V [26] je bilo pokazano, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak graf G , ki ni izomorfen grafu z enotsko koordinatizacijo ρ , za katero velja $\min_{u \sim v \in E(\overline{G})} |d(\rho(u), \rho(v)) - 1| > \varepsilon$.

1.6.2 Prepovedani grafi za neko dimenzijo

Na prvi pogled bi lahko mislili, da mora graf z dovolj veliko dimenzijo n vsebovati poln podgraf K_n . O obstoju grafov s poljubno (visoko) dimenzijo in ožino govori naslednji izrek.

Izrek 68 ([33]). *Naj bosta k in ℓ naravni števili. Obstaja graf G z dimenzijo $\dim(G) = k$, ki ne vsebuje ciklov z manj kot ℓ vozlišči.*

P. Erdős je med drugim spraševal tudi po klasifikaciji kritičnih grafov za dimenzijo k , glej [33].

Lema 69. *Obstaja števena neskončna družina grafov, ki so kritični za dimenzijo 3.*

Dokaz. Spomnimo se, da je kritičen graf za dimenzijo $k \geq 1$ natanko najmanjši prepovedan graf za dimenzijo $k - 1$. Pokazati torej želimo, da obstaja števena neskončna družina najmanjših prepovedanih grafov za dimenzijo 2.

Naj bo m liho število in $m \geq 3$. V ravno linijo zlepimo skupaj m trikotnikov, tako da si delijo eno povezavo. Dobimo togi graf T_m , ki ima dolžino daljše stranice $\frac{m+1}{2}$. Če med krajiščema daljše stranice grafa T_m dodamo še pot P_m dolžine $\frac{m+1}{2}$, potem dobimo graf G_m , ki nima nedegenerirane predstavitve z enotsko razdaljo v \mathbb{R}^2 ima pa jo v \mathbb{R}^3 . Najmanjši tak graf je $G_3 = W_6^*$, glej sliko 1.4 (c); če mu odstranimo katerokoli povezavo, dobimo graf z dimenzijo 2 (preverimo vse štiri možnosti). Če iz grafa G_m odstranimo povezavo vsebovano v poti P_m , dobimo togi graf z dvema priveskoma, ki ga je brez težav mogoče predstaviti z enotsko koordinatizacijo v \mathbb{R}^2 , če pa odstranimo katerokoli povezavo iz togega dela T_m , dobimo eno prostostno stopnjo, ki nam omogoča, da dobljeni graf predstavimo s koordinatizacijo z enotsko razdaljo. \square

Podobno lahko razmislimo in dokažemo za višje dimenzije. Pri dokazu naslednjega izreka bomo uporabili idejo iz [101].

Izrek 70. *Za vsako naravno število $k \geq 2$ obstaja neskončna družina najmanjših prepovedanih grafov za dimenzijo k .*

Dokaz. Naj bo naravno število $k \geq 2$. Znano je, da je kromatično število evklidskega prostora $\chi(E^k)$ končno [34]. Recimo, da obstaja največ končno število N najmanjših prepovedanih grafov H_1, H_2, \dots, H_N za dimenzijo k . Drevesa imajo evklidsko dimenzijo 2, zato jih je mogoče predstaviti z enotsko razdaljo v vsakem \mathbb{R}^k . Ker so grafi H_1, H_2, \dots, H_N prepovedani, za vsak $1 \leq i \leq N$ velja da H_i ni drevo. Torej ima vsak H_i vsaj en cikel, zato ima tudi najmanjši cikel (in ožino). Naj bo g_i ožina grafa H_i in naj bo $g = \max\{g_i \mid 1 \leq i \leq N\}$. Naj bo G poljuben graf s $\chi(G) \geq \chi(E^k) + 1$. Graf G je prepovedan graf za dimenzijo k . Zato G vsebuje enega izmed najmanjših prepovedanih grafov H_i kot podgraf. Torej ima G ožino največ g . Znano je, glej na primer [30], da obstajajo grafi poljubno velike ožine, ki imajo kromatično število vsaj c za poljubno naravno število $c \geq 3$. Smo v protislovju. Najmanjših prepovedanih grafov za (vsako) dimenzijo k je torej neskončno mnogo. \square

1.6.3 Poskusi generiranja grafov z enotsko razdaljo z računalnikom

C. Purdy in G. Purdy sta v [101] opisala računalniški program, ki sta ga leta 1988 pognala na superračunalniku CRAY X-MP/24. Opazovala sta grafe z manj kot 7 vozlišči ter poskušala identificirati vse najmanjše prepovedane grafe v \mathbb{R}^2 ter največje take grafe G_i za $i \in \mathbb{N}$, za katere velja $e(G_i) = 2$ (maksimalne grafe z enotsko razdaljo). Našla sta šest najmanjših prepovedanih grafov v \mathbb{R}^2 , glej sliko 1.15, in enajst maksimalnih grafov z enotsko razdaljo. Ali za nek graf velja da je graf z enotsko razdaljo, sta še vedno preverjala “na roke”. Opazila sta, da vsebujejo grafi, ki jih ni mogoče realizirati v evklidski ravnini največkrat $K_{2,3}$ oziroma K_4 in da se drugi prepovedani grafi pojavijo zelo redko. Za minimalni prepovedani graf v \mathbb{R}^2 sta pomotoma označila graf na sliki 1.3 z dodano povezavo $C \sim F$. Da njun graf ni minimalni, saj vsebuje graf W_6^* , ki je prav tako prepovedan graf v \mathbb{R}^2 , je opazil K. B. Chilakamarri v [18].

Nedegenerirani predstavitvi z enotsko razdaljo ρ grafa G lahko med vozlišči u, v , ki sta predstavljeni s točkama $\rho(u), \rho(v)$ pripnemo niz N dolžine ℓ le če je razdalja med $\|\rho(u) - \rho(v)\|_2 < \ell$. C. Purdy in G. Purdy sta v [101] grafu, za katerega sta poskušala ugotoviti ali je graf z enotsko razdaljo najprej odstranila nize, če so obstajali, ga narisala nedegenerirano z enotsko razdaljo in mu nato poskušala dodati odstranjene nize. Ali je evklidska razdalja med dvema točkama, ki predstavljata vozlišči opazovanega grafa manjša od grafovske dolžine niti, ki je pripeta med tema točkama, je mogoče enostavno preveriti. S tem enostavnim premislekom sta pospešila svoj algoritem.

Spomnimo se, da pravimo grafu ki ima prerezno vozlišče ločljiv graf.

Trditev 71. Če je G ločljiv graf, potem G ni minimalni prepovedani graf za dimenzijo k . Če je G ločljiv maksimalni graf v dimenziji k , potem je vsak v G vsebovan blok tudi maksimalni graf za dimenzijo k .

Dokaz. Uporabimo idejo dokaza v [18] in lemo 65. □

K. B. Chilakamarri, glej [18], je predlagal algoritem za konstrukcijo minimalnih prepovedanih in maksimalnih grafov z enotsko razdaljo v ravnini, ki uporablja takoimenovano Tutte-ovo konstrukcijo, glej izrek 72.

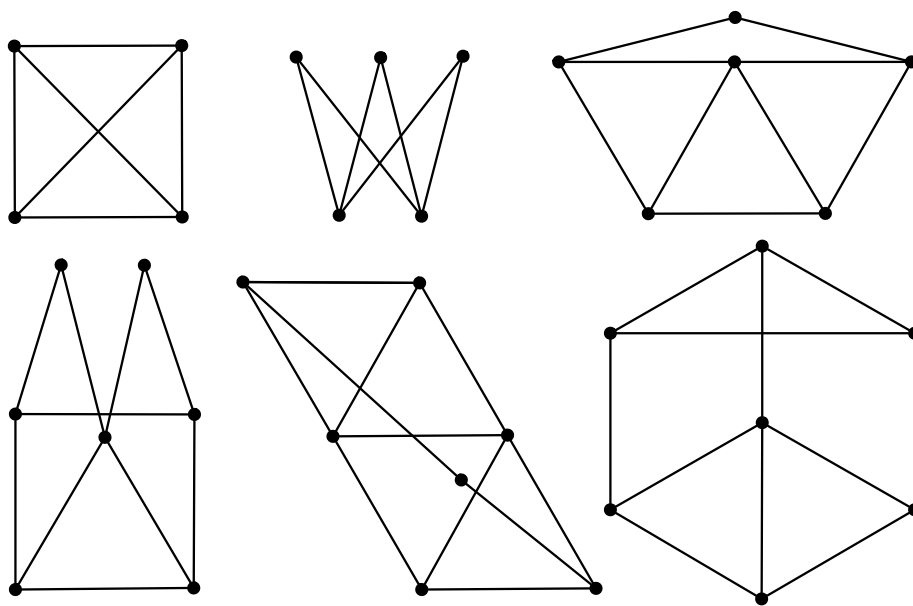
Izrek 72 ([114]). Naj bo G blok z vsaj dvema povezavama. Potem je G unija bloka G_1 in poti $P_k = p_1 \sim \dots \sim p_k$, $k \geq 2$, tako da velja $\{p_1, \dots, p_k\} \cap V(G_1) = \{p_1, p_k\}$ ter $p_1 \neq p_k$.

Tudi K. B. Chilakamarri je “na roke” preverjal ali imajo konstruirani grafi realizacijo z enotsko razdaljo. Naj $\mathcal{L}_m, m \geq 1$ označuje seznam vseh neločljivih enostavnih povezanih

grafov z enotsko razdaljo z natanko m povezavami. Tako sta $\mathcal{L}_1 = \{P_2\}$, $\mathcal{L}_2 = \{\}$. Algoritem, ki ga je K. B. Chilakamarri povzel po [114], se glasi

1. Naj bodo znani $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_{m-1}$.
2. \mathcal{L}_m dobimo tako, da za vsak $i < m$ dodamo vsem grafom iz \mathcal{L}_i poti dolžine $m - i + 1$ na vse različne načine (glede na izomorfizme).
3. Iz \mathcal{L}_m odstranimo vse duplikate.
4. Vse grafe v \mathcal{L}_m , ki niso grafi z enotsko razdaljo, prestavimo v seznam \mathcal{C}_m .
5. Zgradimo seznam \mathcal{P}_m : poiščemo vse najmanjše prepovedane grafe z enotsko razdaljo (pogledamo, če je graf iz \mathcal{L}_m brez poljubne povezave naštet v \mathcal{C}_{m-1}). Zgradimo seznam \mathcal{M}_m : odstranimo vse maksimalne grafe z enotsko razdaljo iz \mathcal{M}_{m-1} z $m-1$ povezavami, ki so ko jim dodamo pravo povezavo, vsebovani tudi v \mathcal{C}_m .

Izkaže se, da noben izmed maksimalnih grafov z enotsko razdaljo na manj kot 8 vozliščih ni ločljiv. K. B. Chilakamarri je tako našel 21 maksimalnih grafov in 6 minimalnih prepovedanih grafov z enotsko razdaljo na največ sedmih vozliščih, glej sliko 1.15. Kasneje je N. Dean (Texas Southern University) ta rezultat še razširil, s tem ko je konstruiral vse maksimalne grafe na osmih vozliščih.



Slika 1.15: Vsi minimalni prepovedani grafi za dimenzijo 2 z največ 7 vozlišči.

1.7 Subdivizija povezav grafa

Znano je, da vsak graf, ki ni ravninski vsebuje subdivizijo grafov K_5 ali $K_{3,3}$. Čeprav je $\dim(K_5) = \dim(K_{3,3}) = 4$, enostavno poiščemo subdivizijo grafa $K(3,3)$, ki ima dimenzijo 2. Subdivizija povezav grafa je eden izmed načinov kako zmanjšati dimenzijo grafa.

Subdivizijsko število $\text{sd}(G)$ grafa G je najmanjše število vozlišč, ki jih moramo vstaviti v povezave grafa G , da dobimo graf, ki je izomorfen podgrafu grafa z enotsko razdaljo ravnine E^2 . Predstavljamo si, da je vsak graf homeomorfen grafu z enotsko razdaljo v ravnini.

Izrek 73 ([78]). Naj bo G graf z m povezavami. Potem $\text{sd}(G) \leq m$.

Izrek 74 ([78]). Označimo s $t(n)$ največje število povezav grafa na n vozliščih, ki ne vsebuje cikla C_4 . Potem velja

$$t(n) < \frac{1}{4}n(1 + \sqrt{4n - 3})$$

S. V. Gervacio in H. Maehara sta v [41] pokazala naslednji izrek.

Izrek 75 ([41]). Označimo s $t(n)$ največje število povezav grafa na n vozliščih, ki ne vsebuje 4-cikla C_4 .

- $\binom{n}{2} - t(n) \leq \text{sd}(K_n) \leq \frac{1}{2}(n-2)(n-3) + 2$
- $\text{sd}(K(n, n)) \leq (n-2)^2 + \lceil \frac{n-2}{2} \rceil$
- $\text{sd}(K(m, n)) \leq (m-1)(n-m)$, za $n \geq m(m-1)$

H. Maehara je v [78] med drugim pokazal tudi, da za vsako pozitivno algebrično število α obstaja tog graf z enotsko koordinatizacijo v ravnini, ki vsebuje dve vozlišči na razdalji natanko α .

V poglavju 2 bomo obravnavali subdivizijsko število kartezičnega produkta grafov.

Poglavje 2

Produkti grafov z enotsko razdaljo

P. Erdős, F. Harary in W. T. Tutte so že leta 1965 opazovali dimenzijo kartezičnega produkta grafa in poti na dveh vozliščih, glej izrek 40. H. T. Loh in H. H. Teh sta v [71] leto kasneje objavila notico, ki razširja rezultat izreka 40 na kartezični produkt dveh končnih grafov. Njun rezultat je bil vse do danes širšem krogu raziskovalcev, ki se ukvarjajo z grafi z enotsko razdaljo nepoznan; več avtorjev [12, 18, 59, 101] je poznalo le rezultat, ki ga je objavil P. Erdős s soavtorji v [33]. C. Purdy in G. Purdy sta v [101] le omenila (in ne tudi dokazala), da je kartezični produkt dveh grafov, ki sta upodobljiva v dimenziji 2, spet graf, ki je upodobljiv v dimenziji 2. Kasneje sta F. Buckley in F. Harary, glej [12] opazovala korona grafov z enotsko razdaljo ter napovedala raziskovanje lastnosti grafovskih produktov grafov z enotsko razdaljo.

V tem poglavju bomo opazovali vpliv grafovskih operacij na grafe z realizacijami z enotsko razdaljo. Dokazano bo, da je kartezični produkt grafov z enotsko razdaljo graf z enotsko razdaljo v evklidski ravnini, medtem ko za unijo grafov, spoj grafov, tenzorski produkt grafov, krepki produkt grafov, leksikografski produkt grafov in korona produkt grafov to ne velja. Dokazano bo, da kartezični produkt ohranja tudi realizacije z enotsko razdaljo, s čimer bosta posplošena rezultata, ki sta bila predstavljena v [33] in [71].

2.1 Kartezični produkt grafov

Kot v razdelku 1.1, označimo kartezični produkt grafov K in H s $K \square H$. Operacija \square je komutativna in grafa $K \square H$ in $H \square K$ sta izomorfna. Z oznako K_x bomo označili inducirani podgraf $K_x := (K \square H) [\{(k, x) \mid k \in K\}]$ kartezičnega produkta $K \square H$ na množici vozlišč $\{(k, x) \mid k \in K\}$. Podobno bomo s H_x označili inducirani podgraf kartezičnega produkta

$K \square H$ na množici vozlišč $\{(x, h) \mid h \in H\}$.

Trditev 76. Naj bosta $k, h \in \mathbb{Z}_+$ pozitivni celi števili, naj bo K graf s k -razsežno realizacijo z enotsko razdaljo in naj bo H graf s h -razsežno realizacijo z enotsko razdaljo. Kartezični produkt $K \square H$ ima $(k + h)$ -razsežno realizacijo z enotsko razdaljo.

Dokaz. Naj bo α k -razsežna realizacija z enotsko razdaljo grafa K in naj bo β h -razsežna realizacija z enotsko razdaljo grafa H . Potem $\alpha : V(K) \rightarrow \mathbb{R}^k$, $\alpha : E(K) \rightarrow \{z \mid z \in \mathbb{R}^k\}$, $\beta : V(H) \rightarrow \mathbb{R}^h$ in $\beta : E(H) \rightarrow \{z \mid z \in \mathbb{R}^h\}$. Naj bodo $a, c \in V(K)$, $b, d \in V(H)$, $e \in E(K)$, $\ell \in E(H)$, in pišimo $\alpha(a) = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ in $\beta(b) = (b_1, b_2, \dots, b_h)$. Naj bodo $(x, y) \in V(K \square H)$, $(o, p) \sim (r, s) \in E(K \square H)$, $\alpha(x) = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ in $\beta(y) = (y_1, y_2, \dots, y_h)$. Definirajmo preslikavo ρ , ki slika graf $K \square H$ v \mathbb{R}^{k+h} , tako da

$$\rho((x, y)) = (x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_h),$$

in

$$\rho((o, p) \sim (r, s)) = \begin{cases} \{(o_1, \dots, o_k, z_1, \dots, z_h) \mid (z_1, \dots, z_h) \in \beta(p \sim s)\}, & o = r \\ \{(z_1, \dots, z_k, p_1, \dots, p_h) \mid (z_1, \dots, z_k) \in \alpha(o \sim r)\}, & p = s \end{cases},$$

kjer je $\alpha(o) = (o_1, \dots, o_k)$ in $\beta(p) = (p_1, \dots, p_h)$.

Vzemimo $(u, v) \in V(K \square H)$ in definirajmo $f := (a, b) \sim (c, d) \in E(K \square H)$. Želimo pokazati, da je ρ predstavitev grafa $K \square H$. Zato moramo pokazati, da iz $(u, v) \in f$ sledi $\rho((u, v)) \in \rho(f)$. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da $(u, v) = (a, b)$, torej da $\rho((u, v)) = \rho((a, b)) = (a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_h)$. Predpostavimo, da velja $a = c$ in $b \sim d \in E(H)$. Potem

$$\begin{aligned} \rho((a, b) \sim (c, d)) &= \rho((a, b) \sim (a, d)) \\ &= \{(a_1, \dots, a_k, z_1, \dots, z_h) \mid (z_1, \dots, z_h) \in \beta(b \sim d)\}. \end{aligned}$$

Ker je β predstavitev grafa H , iz $b \in \ell$ sledi, da $\beta(b) \in \beta(\ell)$. Torej $\beta(b) \in \beta(b \sim d)$ in $\rho((a, b)) \in \rho((a, b) \sim (a, d))$. Podobno pokažemo da za $b = d$ in $a \sim c \in E(K)$ velja $\rho((a, b)) \in \rho((a, b) \sim (c, b))$. Torej je preslikava ρ predstavitev kartezičnega produkta $K \square H$ v \mathbb{R}^{k+h} .

Ker sta α in β predstavitvi z enotsko razdaljo, so vse povezave kartezičnega produkta $K \square H$ dolžine ena in je ρ predstavitev z enotsko razdaljo grafa $K \square H$.

Preostane še, da pokažemo, da iz $\rho((u, v)) \in \rho(f)$ sledi, da $(u, v) \in f$. Iz definicije vemo, da je $\rho((u, v)) = (u_1, u_2, \dots, u_k, v_1, v_2, \dots, v_h)$. Predpostavimo lahko, da $a = c$ in

$b \sim d \in E(H)$. Potem

$$\begin{aligned} \rho((a, b) \sim (c, d)) &= \rho((a, b) \sim (a, d)) \\ &= \{(a_1, \dots, a_k, z_1, \dots, z_h) \mid (z_1, \dots, z_h) \in \beta(b \sim d)\}. \end{aligned}$$

Velja $u_i = a_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$ in $(v_1, v_2, \dots, v_h) \in \beta(b \sim d)$, saj $\rho((u, v)) \in \rho((a, b) \sim (c, d))$. Naj bo $\ell \in E(H)$ in $b \in V(H)$. Ker je β realizacija grafa H , velja $b \in \ell \Leftrightarrow \beta(b) \in \beta(\ell)$. Torej $v \in b \sim d$, in velja $(u, v) = (a, b)$, oziroma $(u, v) = (a, d)$. Podobno razmislimo, da za $b = d$ in $a \sim c \in E(K)$ velja, da $(u, v) = (a, b)$ ali $(u, v) = (c, b)$. Torej je preslikava ρ realizacija kartezičnega produkta $K \square H$ v \mathbb{R}^{k+h} . \square

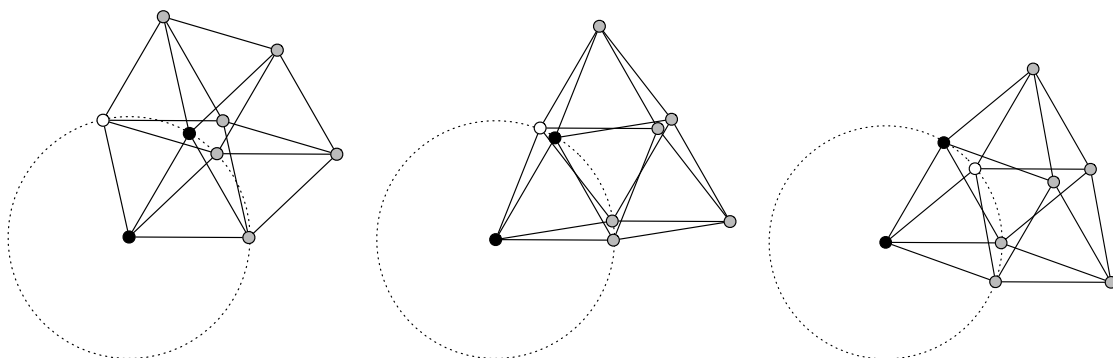
Posledica 77. Naj bosta K, H grafa. Potem

$$\dim(K \square H) \leq \dim(K) + \dim(H).$$

Če uporabimo trditev 76 lahko naslednjo posledico enostavno dokažemo.

Posledica 78. Naj bosta K in H grafa z enotsko realizacijo (v ravnini). Kartezični produkt $K \square H$ ima realizacijo z enotsko razdaljo v \mathbb{R}^4 .

Zgornjo mejo za dimenzijo kartezičnega produkta končnih (oziroma števnih) grafov lahko tudi izboljšamo, glej primer na sliki 2.1, kjer je razvidno, da je kartezični produkt dveh polnih grafov na treh vozliščih graf s fleksibilno realizacijo z enotsko razdaljo v ravnini (torej ima dimenzijo 2).



Slika 2.1: Realizacija z enotsko razdaljo v ravnini grafa $K_3 \square K_3$ z eno prostostno stopnjo. Črni vozlišči fiksiramo, belo vozlišče pa premikamo po krožnici. Lokacije sivih vozlišč so določene s kotom med belim vozliščem in fiksirano povezavo.

Izrek 79. Naj bo $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ in naj bosta K in H (končna ali števna) grafa s k -razsežno realizacijo z enotsko razdaljo. Kartezični produkt $K \square H$ ima realizacijo z enotsko razdaljo v \mathbb{R}^k .

Dokaz. Najprej bomo definirali preslikavo $\rho := \rho(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{\binom{k}{2}})$, ki bo vložila kartezični produkt $K \square H$ v evklidski prostor \mathbb{R}^k . Potem bomo dokazali, da je, ne glede na izbiro vrednosti za parametre $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{\binom{k}{2}}$, preslikava ρ predstavitev grafa $K \square H$ v \mathbb{R}^k . Nato bomo dokazali, da lahko vedno izberemo kote $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{\binom{k}{2}}$, tako da je ρ realizacija grafa $K \square H$. Na koncu bomo pokazali, da je ρ realizacija z enotsko razdaljo.

Naj bo \vec{x} vektor v \mathbb{R}^k . Moženje $G(i, j, \phi) \cdot \vec{x}$ vektorja \vec{x} z Givensovo rotacijsko matriko $G(i, j, \phi)$ predstavlja rotacijo vektorja \vec{x} v urini smeri v (i, j) -ti ravnini za kot ϕ . Znano je, da je vsako rotacijsko matriko velikosti $k \times k$ moč sestaviti iz produkta največ $\binom{k}{2}$ takih rotacij, glej na primer [43]. Znano je tudi, da je inverz R^{-1} rotacijske matrike R kar transponirana matrika R^T , oziroma ekvivalentno $R^T R = I$.

Naj bo α realizacija z enotsko razdaljo grafa K v \mathbb{R}^k in naj bo β realizacija z enotsko razdaljo grafa H v \mathbb{R}^k . Pišimo $\vec{w} := (w_1, \dots, w_k) \in \mathbb{R}^k$. Naj bo $V(K) = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ in $V(H) = \{h_1, h_2, \dots, h_m\}$, ter naj bo $R := R(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{\binom{k}{2}})$ rotacijska matrika velikosti $k \times k$. Fiksirajmo parametre $\vec{\phi} := (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{\binom{k}{2}})$, pišimo

$$\Xi_1(x, y, z, \vec{\phi}) = \{\vec{w} - \alpha(k_1) + R(\beta(y) - \beta(h_1)) \mid \vec{w} \in \alpha(x \sim z)\},$$

$$\Xi_2(x, y, z, \vec{\phi}) = \{R(\vec{w} - \beta(h_1)) + \alpha(x) - \alpha(k_1) \mid \vec{w} \in \beta(y \sim z)\},$$

in definirajmo

$$\rho((u, v)) := \alpha(u) - \alpha(k_1) + R(\beta(v) - \beta(h_1))$$

ter

$$\rho((o, p) \sim (r, s)) := \begin{cases} \Xi_1(o, p, r, \vec{\phi}), & o \sim r \in E(K) \wedge p = s, \\ \Xi_2(o, p, s, \vec{\phi}), & o = r \wedge p \sim s \in E(H) \end{cases},$$

kjer $u, o, r \in V(K)$ in $v, p, s \in V(H)$.

Preslikava ρ preslika vozlišča grafa $K \square H$ v točke v \mathbb{R}^k in povezave grafa $K \square H$ v daljice. Dokažimo sedaj, da je ρ realizacija.

Najprej bomo pokazali, da je ρ predstavitev. Naj bo $(a, b) \sim (c, d) \in E(K \square H)$. Pokazati moramo, da velja $\rho((a, b)) \in \rho((a, b) \sim (c, d))$ in $\rho((c, d)) \in \rho((a, b) \sim (c, d))$. Predpostavimo, da je $a = c, b \sim d \in E(H)$ in pišimo

$$\rho((a, b)) = \alpha(a) - \alpha(k_1) + R(\beta(b) - \beta(h_1))$$

$$\rho((a, b) \sim (a, d)) = \{R(\vec{w} - \beta(h_1)) + \alpha(a) - \alpha(k_1) \mid \vec{w} \in \beta(b \sim d)\}$$

Poskušamo pokazati, da velja $\rho((a, b)) \in \rho((a, b) \sim (a, d))$. Ker je β realizacija grafa H , iz $b \in b \sim d$ sledi $\beta(b) \in \beta(b \sim d)$. Torej $\beta(b) \in \{\vec{w} \mid \vec{w} \in \beta(b \sim d)\}$ in $R(\beta(b)) \in \{R(\vec{w}) \mid \vec{w} \in \beta(b \sim d)\}$. Zato velja

$$\alpha(a) - \alpha(k_1) + R(\beta(b) - \beta(h_1)) \in \Xi_2(a, b, d, \vec{\phi}),$$

in

$$\rho((a, b)) \in \rho((a, b) \sim (a, d)).$$

Podobno lahko dokažemo, da iz $b = d$ in $a \sim c \in E(K)$ sledi $\rho((a, b)) \in \rho((a, b) \sim (c, b))$. Torej velja $\rho((a, b)) \in \rho((a, b) \sim (c, d))$. Na enak način pokažemo, da velja $\rho((c, d)) \in \rho((a, b) \sim (c, d))$, zato je ρ predstavitev grafa $K \square H$.

Naj bo sedaj $(u, v) \in V(K \square H)$ in $(o, p) \sim (r, s) \in E(K \square H)$. Želimo pokazati, da je ρ realizacija. Zato moramo pokazati, da obstajajo koti $\vec{\phi}$, tako da iz $\rho((u, v)) \in \rho((o, p) \sim (r, s))$ sledi, da velja $u = o, v = p$ ali $u = r, v = s$.

1. Predpostavimo, da velja $o = r$ in $p \sim s \in E(H)$, ter pišimo

$$\begin{aligned} \rho((u, v)) &= \alpha(u) - \alpha(k_1) + R(\beta(v) - \beta(h_1)), \\ \rho((o, p) \sim (o, s)) &= \{R(\vec{w} - \beta(h_1)) + \alpha(o) - \alpha(k_1) \mid \vec{w} \in \beta(p \sim s)\}. \end{aligned}$$

Želimo pokazati, da lahko poiščemo kote ϕ_ℓ , $1 \leq \ell \leq \frac{k(k-1)}{2}$, tako da iz $\rho((u, v)) \in \rho((o, p) \sim (o, s))$ sledi, da $u = o, v = p$ ali $u = o, v = s$. Torej

$$\begin{aligned} \rho((u, v)) &\in \rho((o, p) \sim (o, s)), \\ \alpha(u) - \alpha(k_1) + R(\beta(v) - \beta(h_1)) &\in \Xi_2(o, p, s, \phi), \\ \alpha(u) + R\beta(v) - \alpha(o) &\in \{R\vec{w} \mid \vec{w} \in \beta(p \sim s)\}, \\ \alpha(u) - \alpha(o) &\in \{R(\vec{w} - \beta(v)) \mid \vec{w} \in \beta(p \sim s)\}, \\ R^T(\alpha(u) - \alpha(o)) &\in \{R^T R(\vec{w} - \beta(v)) \mid \vec{w} \in \beta(p \sim s)\}, \\ R^T(\alpha(u) - \alpha(o)) &\in \{\vec{w} - \beta(v) \mid \vec{w} \in \beta(p \sim s)\}. \end{aligned}$$

(a) Predpostavimo, da velja $u = o$ in pišimo

$$\begin{aligned} R^T(\alpha(o) - \alpha(o)) &\in \{\vec{w} - \beta(v) \mid \vec{w} \in \beta(p \sim s)\}, \\ \vec{0} &\in \{\vec{w} - \beta(v) \mid \vec{w} \in \beta(p \sim s)\}, \\ \beta(v) &\in \beta(p \sim s). \end{aligned}$$

Ker je β realizacija grafa H , iz $\beta(v) \in \beta(p \sim s)$ sledi, da velja $v = p$, oziroma $v = s$.

- (b) Predpostavimo sedaj, da velja $u \neq o$. Slika vozlišča (u, v) leži na rotirani predstavitvi povezave $p \sim s$ grafa H_x . Naj bo $x, y \in V(H)$, kjer $x \neq y$. Predstavitev ρ slika povezavi $(k_1, x) \sim (k_2, x) \in E(K_x)$ in $(k_1, y) \sim (k_2, y) \in E(K_y)$ v vzporedni daljici. Torej lahko rečemo, da sta predstavitvi grafov K_x in K_y vzporedni. Podobno velja, da sta tudi predstavitvi grafov H_x in H_y vzporedni.

Leva stran vsebovanosti

$$R^T(\alpha(u) - \alpha(o)) \in \{\vec{w} - \beta(v) \mid \vec{w} \in \beta(p \sim s)\}$$

je točka na hipersferi s središčem v izhodišču $\vec{0}$, medtem ko predstavlja zapis desne strani daljico z dolžino ena v \mathbb{R}^k . Premica lahko seka hipersfero največ v dveh točkah, zato imamo največ dva degenerirana primera, kjer zgornja vsebovanost velja.

Vsako izmed vozlišč kartezičnega produkta $K \square H$ lahko leži največ na vsaki povezavi vsake kopije grafa H razen na (originalnem) grafu H . V produktu je $|V(K)| - 1$ kopij H_x grafa H in vsaka kopija ima $E(H)$ povezav. Zato lahko za izbrano vozlišče grafa $K \square H$ izberemo največ $2|E(H)|(|V(K)| - 1)$ različnih vrednosti za kot ϕ , ki povzročijo degenerirane situacije. Kartezični produkt ima $|V(K)||V(H)|$ vozlišč, torej je največ $2|V(K)||V(H)||E(H)|(|V(K)| - 1)$ degeneriranih situacij, kar je končno oziroma števno mnogo.

2. Predpostavimo sedaj, da velja $p = s, o \sim r \in E(K)$ in pišimo

$$\begin{aligned} \rho((u, v)) &= \alpha(u) - \alpha(k_1) + R(\beta(v) - \beta(h_1)), \\ \rho((o, p) \sim (r, p)) &= \{\vec{w} - \alpha(k_1) + R(\beta(p) - \beta(h_1)) \mid \vec{w} \in \alpha(o \sim r)\}. \end{aligned}$$

Pokazati želimo, da lahko poiščemo kote $\vec{\phi}$, tako da iz $\rho((u, v)) \in \rho((o, p) \sim (r, p))$ sledi, da $u = o, v = p$ ali $u = r, v = p$. Torej

$$\begin{aligned} \rho((u, v)) &\in \rho((o, p) \sim (r, p)), \\ \alpha(u) - \alpha(k_1) + R(\beta(v) - \beta(h_1)) &\in \Xi_1(o, p, r, \phi), \\ \alpha(u) + R\beta(v) &\in \{\vec{w} + R\beta(p) \mid \vec{w} \in \alpha(o \sim r)\}, \\ R(\beta(v) - \beta(p)) &\in \{\vec{w} - \alpha(u) \mid \vec{w} \in \alpha(o \sim r)\}. \end{aligned}$$

(a) Recimo, da $v = p$. Potem

$$\begin{aligned} R(\beta(v) - \beta(p)) &\in \{\vec{w} - \alpha(u) \mid \vec{w} \in \alpha(o \sim r)\}, \\ R(\beta(p) - \beta(p)) &\in \{\vec{w} - \alpha(u) \mid \vec{w} \in \alpha(o \sim r)\}, \\ \vec{0} &\in \{\vec{w} - \alpha(u) \mid \vec{w} \in \alpha(o \sim r)\}, \\ \alpha(u) &\in \alpha(o \sim r). \end{aligned}$$

Ker je α realizacija grafa H , iz $\alpha(u) \in \alpha(o \sim r)$ sledi, da je $u = o$ oziroma $u = r$.

(b) Privzemimo sedaj, da $v \neq p$. Slika vozlišča (u, v) leži na predstavitvi povezave $(o, x) \sim (r, x)$ kopije K_x grafa K . S podobnim argumentom kot v prejšnjem primeru, dokažemo da obstajata največ dve točki, ki ležita na preseku hipersfere in premice. Torej obstaja največ $2|V(K)||V(H)||E(K)|(|V(H)| - 1)$ različnih vrednosti za kote $\vec{\phi}$, ki povzročijo degenerirane situacije, kar je zopet končno oziroma števno mnogo.

Skupaj imamo tako največ

$$2|V(K)||V(H)|\left(|E(K)|(|V(H)| - 1) + |E(H)|(|V(K)| - 1)\right)$$

različnih vrednosti za kote $\vec{\phi}$, ki povzročijo degenerirane situacije. Ker lahko (zvezno) izbiramo med neštevno mnogo vrednostmi za kote $\vec{\phi}$, lahko enostavno izberemo take, ki povzročijo nedegenerirano predstavitev, torej realizacijo.

Rotacija R okoli izhodišča $\vec{0}$ in translaciji za $\alpha(k_1)$ in $\beta(h_1)$ so izometrije v ravnini (ohranjajo razdalje), zato so predstavitve povezav kartezičnega produkta $K \square H$ premice z dolžino ena. \square

Posledica 80. Naj bosta K in H (končna ali števna) grafa z enotsko realizacijo. Kartezični produkt $K \square H$ je graf z enotsko realizacijo.

Izkaže se, da kartezični produkt dveh grafov z enotsko realizacijo v \mathbb{R} ni nujno graf z enotsko razdaljo v \mathbb{R} .

Izrek 81. Naj bosta K in H grafa s po vsaj eno povezavo, ki imata nedegenerirano predstavitev z enotsko razdaljo v \mathbb{R} . Kartezični produkt $K \square H$ je graf z enotsko koordinatizacijo (v \mathbb{R}^2) in ni graf z enotsko razdaljo v \mathbb{R} .

Dokaz. Enostavno je preveriti, da velja, da če sta K in H povezana grafa z realizacijo z enotsko razdaljo v \mathbb{R} , potem sta brez ciklov in s stopnjama največ 2 – sta poti. Kartezični produkt dveh poti je graf z enotsko koordinatizacijo; realiziramo ga lahko kot (lahko tudi neskončno) pravokotno mrežo oziroma rešetko. Pokažimo sedaj, da kartezični produkt dveh povezav ni graf z enotsko razdaljo v \mathbb{R} . Naj bosta $e = a \sim b$ in $\ell = i \sim j$ dve povezavi. Vsaka izometrična projekcija iz \mathbb{R}^2 v \mathbb{R} preslika vozlišče (a, j) (ali vozlišče (b, j)) kopije povezave e v krajišče (b, i) (ali (a, i)) originalne povezave e . Torej je vsaka projekcija na \mathbb{R} degenerirana. \square

Kaj pa, če $k \neq h$, ali lahko izboljšamo zgornjo mejo za dimenzijo kartezičnega produkta grafov iz trditve 76? Za začetek dokažimo, kar so avtorji opazili (in ne dokazali) v [33, 101, 18].

Posledica 82. Naj bo K (končen oziroma števen) graf z enotsko realizacijo. Kartezični produkt $K \square P_2$ je graf z enotsko realizacijo.

Dokaz. Pot P_2 ima realizacijo z enotsko razdaljo v \mathbb{R} , torej je tudi graf z enotsko realizacijo. Uporabimo posledico 80. \square

Izrek 83. Naj bo K (končen oziroma števen) graf z realizacijo z enotsko razdaljo v \mathbb{R}^k in naj bo H (končen oziroma števen) graf z realizacijo z enotsko razdaljo v \mathbb{R}^h . Naj bo $\max(k, h) > 1$. Kartezični produkt $K \square H$ ima realizacijo z enotsko razdaljo v $\mathbb{R}^{\max(k, h)}$.

Dokaz. Definirajmo $M := \max(k, h) > 1$. Oba grafa K in H sta realizabilna z enotsko razdaljo v \mathbb{R}^M , zato je tudi kartezični produkt $K \square H$ graf z enotsko realizacijo v \mathbb{R}^M . \square

Naj bosta K, H povezana grafa in naj bo $\dim(K) = 0$. Potem K nima povezav, K je graf na enem vozlišču in kartezični produkt je enak $K \square H = H$.

Posledica 84. Naj bosta K in H povezana (končna oziroma števna) grafa. Potem velja

$$\dim(K \square H) = \begin{cases} \max(\dim(K), \dim(H)), & \max(\dim(K), \dim(H)) > 1, \\ \dim(K) + 1, & \dim(K) = \dim(H) = 1, \\ \dim(H), & \dim(K) = 0. \end{cases}$$

Trditev 85. Naj bo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Naj bo $K \square H$ kartezični produkt (končnih oziroma števnih) grafov K in H , tako da je kartezični produkt $K \square H$ graf z enotsko realizacijo v \mathbb{R}^k . Potem sta grafa K in H grafa z enotsko realizacijo v \mathbb{R}^k .

Dokaz. Ker je “imeti realizacijo z enotsko razdaljo v \mathbb{R}^k ” monotona lastnost grafa, sta tako K_x kot H_x grafa z enotsko razdaljo v \mathbb{R}^k . Ker je K_x izomorfen grafu K , je tudi K graf z enotsko realizacijo v \mathbb{R}^k . Podobno velja za grafa H_x in H . \square

Vsi podgrafi grafa z enotsko realizacijo so grafi z enotsko realizacijo, zato velja tudi obrat izreka 79.

Posledica 86. Naj bo $k \in \mathbb{N}$ in naj velja $k > 1$. Kartezični produkt $K \square H$ (končnih oziroma števnih) grafov K in H ima k -razsežno realizacijo z enotsko razdaljo, če in samo če imata oba grafa K in H k -razsežno realizacijo z enotsko razdaljo.

Za več družin grafov lahko torej trdimo, da so grafi z enotsko realizacijo (v ravnini).

- Ker je (kvadratna) rešetka enaka kartezičnemu produktu dveh poti $G_{m,n} = P_m \square P_n$, je graf z enotsko realizacijo (celo koordinatizacijo).
- Graf omrežja $W_{n,r}$ (t.i. pajkova mreža) je graf, ki je sestavljen iz r koncentričnih kopij cikla C_n , kjer sta istoležni vozlišči dveh sosednjih ciklov povezani s "špicico"; npr. $W_{n,1}$ je enak C_n in $W_{n,2}$ n -strani prizmi. Ker velja $W_{n,r} = C_n \square P_r$, je omrežje graf z enotsko realizacijo.
- Znano je, glej [33], da je n -kocka $Q_n = Q_{n-1} \square K_2$, $Q_1 = K_2$ graf z enotsko razdaljo. Dokazali smo, da je graf z enotsko realizacijo.
- Paru $H_{(v)} := (H, v)$, kjer je H graf in $v \in V(H)$ eno izmed njegovih vozlišč, pravimo zakoreninjeni graf. Zakoreninjeni produkt $K \bullet H_{(v)}$ grafa K in zakoreninjenega grafa $H_{(v)}$ je definiran na naslednji način: vzamemo $|V(K)|$ kopij grafa $H_{(v)}$ in jih povežemo tako, da vsako vozlišče $u_i \in V(K)$ identificiramo s korenem v_i i -te kopije grafa $H_{(v)}$. Na tak način definiran zakoreninjeni produkt je podgraf kartezičnega produkta dveh grafov in zato ohranja enotsko razdaljo.

Izrek 87. Naj bosta K, H grafa in naj bo $K \square H$ njun kartezični produkt. Subdivizijsko število produkta $K \square H$ je enako $\text{sd}(K \square H) = V(K) \text{sd}(H) + V(H) \text{sd}(K)$.

Dokaz. Subdivizijsko število $\text{sd}(K)$ je najmanjše število vozlišč, ki jih moramo vstaviti v povezave grafa K (najmanjše število subdivizij povezav), da postane graf K graf z enotsko razdaljo. Podobno potrebujemo $\text{sd}(H)$ subdivizij, da postane graf H graf z enotsko razdaljo. Po posledici 80 je kartezični produkt subdivizij grafov K' in H' graf z enotsko razdaljo. Subdivizirati moramo vsakega izmed K -faktorjev in vsakega izmed H -faktorjev grafa $K \square H$, zato je $\text{sd}(K \square H) = V(K) \text{sd}(H) + V(H) \text{sd}(K)$. \square

Vemo, da je kartezični produkt grafov asociativen, zato lahko teorijo tega razdelka enostavno posplošimo na kartezični produkt več faktorjev.

2.2 Ostali grafovski produkti

V splošnem je produkt dveh grafov graf z množico točk enako kartezičnemu produktu množice točk faktorjev, ki nastopajo v produktu. Povezave med točkami produktnega grafa lahko določimo na več načinov, obstaja namreč dvajset asociativnih produktov. Izkaže se, da je smiselno opazovati le štiri izmed njih: kartezični, tenzorski, krepki in leksikografski produkt. V tem razdelku si bomo ogledali najbolj zanimive grafovskie produkte in nekatere druge grafovskie operacije ter raziskali ali ohranjajo enotsko razdaljo.

Naj bodo unija $K \cup H$, disjunktna unija $K \tilde{\cup} H$, spoj $K * H$, tenzorski produkt $K \times H$, krepki produkt $K \boxtimes H$, leksikografski produkt $K \circ H$ in korona produkt $K \vee H$ grafov K in H definirani kot v razdelku 1.1 in v [65].

Podobno kot v poglavju 1 bomo s $K_4^- := K_4 - e$ označili poln graf na štirih vozliščih brez (poljubne) povezave e . Ker sta tako povezava e kot K_4^- grafa z enotsko razdaljo, graf $K_4 = K_4^- \cup e$ pa ne, unija grafov ne ohranja enotske razdalje. Po drugi strani pa disjunktna unija ohranja enotsko koordinatizacijo; dokaz naslednjega izreka je očiten in bo izpuščen.

Izrek 88. *Naj bosta K in H grafa. Potem je evklidska dimenzija disjunktna unije $K \tilde{\cup} H$ enaka*

$$e(K \tilde{\cup} H) = \max(e(K), e(H)).$$

Znano je, da je kolo W_n na n vozliščih moč dobiti kot spoj polnega grafa K_1 na enem vozlišču in cikla C_n na n vozliščih. Po izreku 29 velja, da je kolesa mogoče nedegenerirano predstaviti (celo realizirati) z enotsko razdaljo v \mathbb{R}^3 in da je le kolo W_7 graf z enotsko razdaljo. Torej spoj grafov v splošnem ne ohranja enotske razdalje. Hitro pokažemo, da $P_3 \times C_4$ vsebuje podgraf $K_{2,3}$, torej tudi tenzorski produkt ne ohranja lastnosti enotske razdalje. Graf K_4 je podgraf tako krepkega kot leksikografskega produkta dveh poljubnih netrivialnih povezanih grafov, zato krepki in leksikografski produkt ne ohranjata lastnosti enotske razdalje. Naslednja trditev obravnava dimenzijo krepkega in leksikografskega produkta.

Trditev 89. *Naj bosta K in H grafa, naj bo $\omega(K)$ maksimalna klika v grafu K in $\omega(H)$ maksimalna klika v grafu H . Pišimo $n_K = |V(K)|$, $n_H = |V(H)|$, $m_K = |V(\omega(K))|$ in $m_H = |V(\omega(H))|$. Potem je*

$$m_K m_H - 1 \leq \dim(K \boxtimes H) \leq n_K n_H - 1$$

in

$$m_K m_H - 1 \leq \dim(K \circ H) \leq n_K n_H - 1.$$

Dokaz. Spomnimo se, da velja $\omega(K) \boxtimes \omega(H) \subseteq K \boxtimes H \subseteq K_{n_K} \boxtimes K_{n_H}$. Podobno velja za leksikografski produkt $\omega(K) \circ \omega(H) \subseteq K \circ H \subseteq K_{n_K} \circ K_{n_H}$. Dimenzija grafa je vsaj toliko kot dimenzija njegovega poljubnega podgrafa.

Vemo, da za krepki produkt polnih grafov velja $K_{m \cdot n} = K_m \boxtimes K_n$, glej na primer [65]. Upoštevamo, da so klike polni grafi in pišemo $\dim(\omega(K) \boxtimes \omega(H)) = \dim(K_{m_K \cdot m_H})$. Neenakosti sestavimo in dobimo

$$m_K m_H - 1 = \dim(K_{m_K \cdot m_H}) \leq \dim(K \boxtimes H) \leq \dim(K_{n_K \cdot n_H}) = n_K n_H - 1,$$

kar dokazuje prvi del naše trditve. Upoštevamo, da za poljuben graf M velja $M \circ K_n = M \boxtimes K_n$, zato lahko pišemo $K_m \circ K_n = K_m \boxtimes K_n = K_{m \cdot n}$ in

$$m_K m_H - 1 = \dim(K_{m_K \cdot m_H}) \leq \dim(K \circ H) \leq \dim(K_{n_K \cdot n_H}) = n_K n_H - 1.$$

S tem smo dokazali drugi del naše trditve. V splošnem je enakosti mogoče doseči, zato so meje ostre. \square

Naslednja trditev obravnava korona produkt (oz. klin) grafov.

Trditev 90. *Naj bosta K in H končna (oz. števna) netrivialna, enostavna in povezana grafa. Naj bo K graf z enotsko razdaljo. Potem je korona $K \vee H$ graf z enotsko razdaljo, če in samo če*

$$H \in \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, C_6\}.$$

Dokaz. Grafi $K_1 \vee C_n$, kjer je $n \neq 6$ in $K_1 \vee P_m$, kjer je $m \geq 7$, nimajo nedegenerirane predstavitve z enotsko razdaljo v ravnini. Če graf H vsebuje vozlišče s stopnjo večjo od 2, potem korona $K_1 \vee H$ vsebuje podgraf $K_{2,3}$. Torej je H lahko le cikel na šestih vozliščih ali pot z dolžino manj kot sedem. Zato, če $H \notin \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, C_6\}$, korona $K \vee H$ ni graf z enotsko razdaljo. Po drugi strani pa lahko uporabimo enako razmišljanje kot v dokazu izreka 79 in pokažemo, da je korona $G \vee H$, kjer je $H \in \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, C_6\}$, graf z enotsko razdaljo.

Enostavno je premisliti, da imamo neštevno mnogo možnosti za rotacijo vsakega klina grafa H okoli pripadajočega vozlišča grafa K . Zato velja, da če je graf K graf z enotsko realizacijo (koordinatizacijo), je tudi graf $K \vee H$ graf z enotsko realizacijo (koordinatizacijo). \square

Poglavje 3

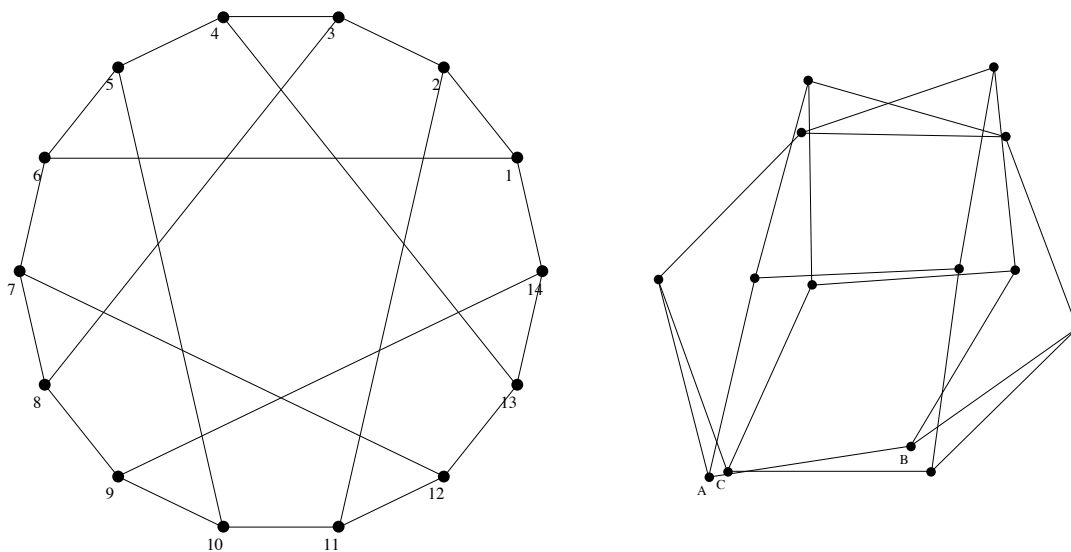
Heawoodov graf je graf z enotsko koordinatizacijo

3.1 Heawoodov graf

Heawoodov graf je $(3, 6)$ -kletka, ki jo je mogoče videti na sliki 3.1 (a); za lastnosti glej na primer [46]. R. Hochberg je leta 2005 v [52] poskusil dokazati, da Heawoodov graf ni graf z enotsko razdaljo. Dve leti kasneje je bila v [53] s pomočjo heuristike, ki bo opisana v razdelku 7.2, odkrita predstavitev, ki je zelo blizu visoko degenerirani predstavitvi z enotsko razdaljo, ki ni degenerirana, glej sliko 3.1 (b). Odkrita predstavitev je pomenila motivacijo za konstrukcijo mehanizma z enotsko razdaljo s katerim bi potrdili sum, da ima Heawoodov graf koordinatizacijo z enotsko razdaljo v ravnini. K. B. Chilakamarri je v [19] postavil hipotezo, da obstaja (zrcalno) simetrična predstavitev Heawoodovega grafa z enotsko razdaljo podobna predstavitvi na sliki 3.5. Dokazali bomo, da nedegenerirana zrcalno simetrična predstavitev ne obstaja. Konec leta 2007 je M. A. Harris (neodvisno od rezultatov iz te disertacije) poskušal konstruirati nedegenerirano predstavitev z enotsko razdaljo Heawoodovega grafa, glej [47], a še vse do danes ni uspel.

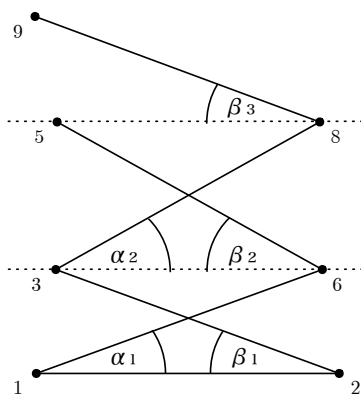
Izrek 91. *Heawoodov graf je graf z enotsko koordinatizacijo.*

Dokaz. Vidimo, da ima Heawoodov graf 14 vozlišč stopnje 3 in 21 povezav. Uporabimo prilagojeno Grueblerjevo enačbo (Kutzbach-Gruebler-jev kriterij [85]) in izračunamo, da ima nedegenerirana evklidska predstavitev Heawoodovega grafa z vnaprej določenimi razdaljami vsaj štiri prostostne stopnje. Recimo, da ena povezava v Heawoodovem grafu nima vnaprej določene dolžine. S tem smo Heawoodovemu grafu dodali eno prostostno stopnjo - dr-



Slika 3.1: (a) Heawoodov graf. (b) Predstavitev Heawoodovega grafa, ki je skoraj predstavitev z enotsko razdaljo. Razmerje med dolžino najdaljše povezave in dolžino najkrajše povezave je približno 1,0000001. Predstavitev je skoraj visoko degenerirana, vozlišče C je približno 0,014 oddaljeno od povezave $A \sim B$.

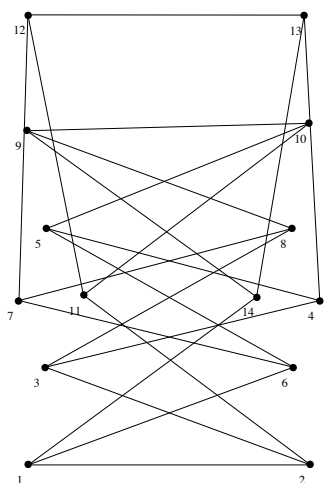
snik. Uporabimo idejo iz [56]. Naj bodo koti $\alpha_1 = \angle 216$, $\beta_1 = \angle 123$, $\alpha_2 = \angle 238 - \beta_1$, $\beta_2 = \angle 165 - \alpha_1$ in $\beta_3 = \angle 389 - \alpha_2$ kot je prikazano na sliki 3.2.



Slika 3.2: Označitev kotov v predstavitvi Heawoodovega grafa.

Vzemimo $\alpha_1 = \beta_1 = \beta_3 = \frac{\pi}{9}$. Predstavitev Heawoodovega grafa za kota $\alpha_2 = \beta_2 = 29^\circ$, ki jo je mogoče videti na sliki 3.3(a), ima vse povezave razen povezave $12 \sim 13$ dolge ena. Povezava $12 \sim 13$ je takrat dolga 0,97935. Predstavitev Heawoodovega grafa ima pri kotih $\alpha_2 = \beta_2 = 30^\circ$ povezavo $12 \sim 13$ dolgo 1,17561, glej sliko 3.3(c). S tem, ko zvezno spreminjamo kota $\alpha_2 = \beta_2$, zvezno premikamo tudi predstavitev na sliki 3.3(a) v predstavitev

na sliki 3.3(c); premikajo se vsa vozlišča razen vozlišč 1, 2, 3 in 6. Na sliki 3.4 (a) je mogoče videti, da ko povečujemo kota $\alpha_2 = \beta_2$ od 29° proti 30° , dolžina povezave $12 \sim 13$ narašča. Ob tem vse ostale povezave ohranjajo svojo dolžino. Ker je dolžina povezave $12 \sim 13$ v $\alpha_2 = \beta_2 = 29^\circ$ manjša od ena, v $\alpha_2 = \beta_2 = 30^\circ$ pa večja od ena in ker vmes zvezno narašča, obstaja vrednost za kota $\alpha_2 = \beta_2$ pri kateri je dolžina natanko ena.

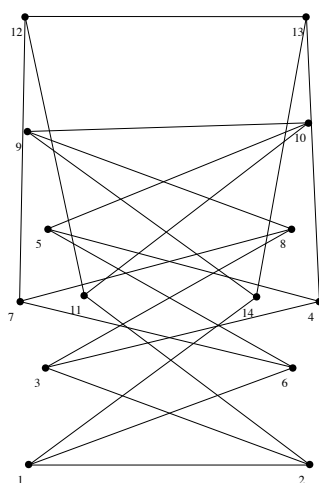


$$\alpha_2 = \beta_2 = 29^\circ$$

$$\|12 \sim 13\| = 0,97935$$

$$d = 0,0038057$$

(a)

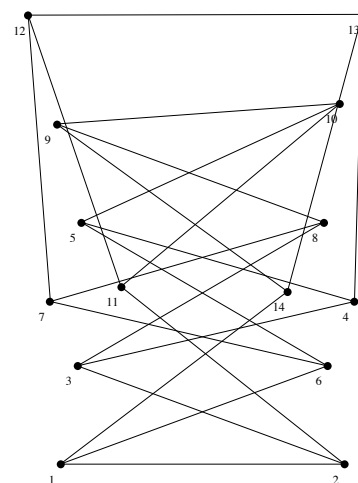


$$\alpha_2 = \beta_2 \simeq 29,094779307^\circ$$

$$\|12 \sim 13\| = 1$$

$$d = 0,0098908$$

(b)



$$\alpha_2 = \beta_2 = 30^\circ$$

$$\|12 \sim 13\| = 1,17561$$

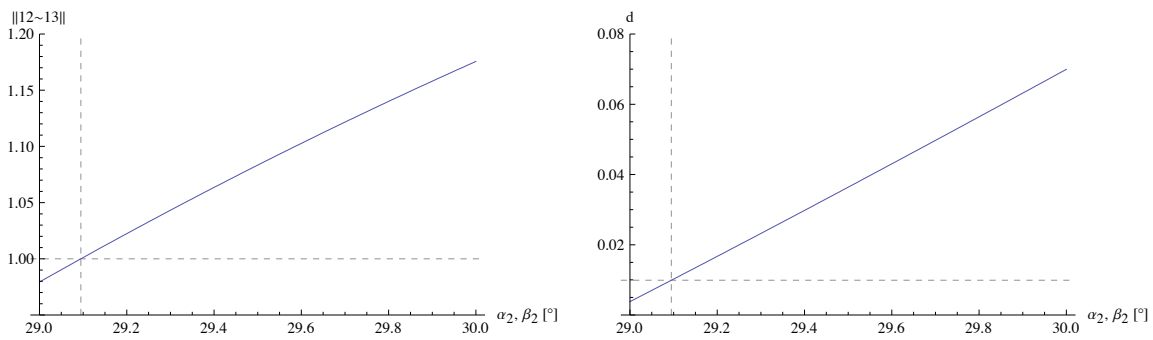
$$d = 0,0699494$$

(c)

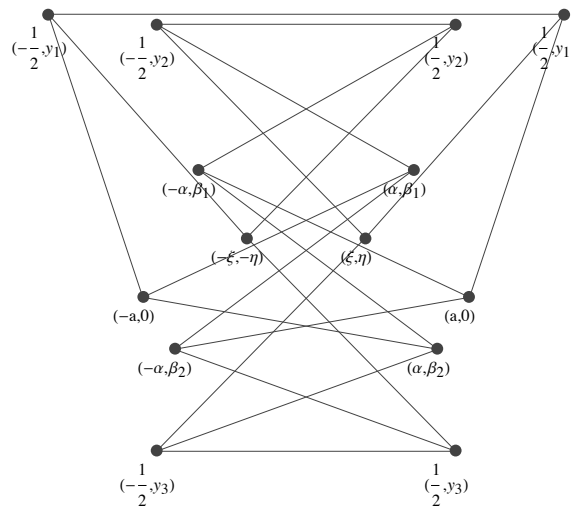
Slika 3.3: Predstavitve Heawoodovega grafa pri kotih $\alpha_1 = \beta_1 = \beta_3 = \frac{\pi}{9}$ in: (a) $\alpha_2 = \beta_2 = 29^\circ$, (b) $\alpha_2 = \beta_2 \simeq 29,0947793067971478^\circ$ ter (c) $\alpha_2 = \beta_2 = 30^\circ$. Z $\|12 \sim 13\|$ je označena razdalja povezave $12 \sim 13$, z d pa razdalja med vozliščem 10 in povezavo $4 \sim 13$.

Pri $\alpha_2 = \beta_2 \simeq 29,0947793067971478^\circ$ ima predstavitev na sliki 3.3(b) vse povezave dolge ena. S tem, ko zvezno premikamo predstavitev na sliki 3.3(a) v predstavitev na sliki 3.3(c), se lokacija vozlišča 10 odmika stran od povezave $4 \sim 13$, glej sliko 3.4 (b). Predstavitev, ki jo dobimo pri kotih $\alpha_2 = \beta_2 = 29,0947793067971478^\circ$ je nedegenerirana in ni visoko degenerirana. Zato je realizacija z enotsko razdaljo. Ko izračunamo koordinate točk, s katerimi predstavimo vozlišča Heawoodovega grafa, je enostavno preveriti, da je dobljena realizacija (tudi če kota $\alpha_2 = \beta_2 \simeq 29,0947793067971478^\circ$ malo spremenimo) v resnici koordinatizacija z enotsko razdaljo v ravnini. \square

Predstavitvi Heawoodovega grafa na sliki 3.5 bomo rekli *zrcalno simetrična*.



Slika 3.4: (a) Dolžina povezave $12 \sim 13$ se zvezno povečuje, ko spreminjamo prosti parameter $\alpha_2 = \beta_2$ od 29° proti 30° . V bližini 29.1° je dolžina povezave $12 \sim 13$ enaka 1. (b) Razdalja d med vozliščem 10 in povezavo $4 \sim 13$ se zvezno povečuje, ko spreminjamo prosti parameter $\alpha_2 = \beta_2$ od 29° proti 30° . V bližini 29.1° je razdalja $d \simeq 0,0098$.



Slika 3.5: Označitev koordinat vozlišč zrcalno simetrične predstavitve Heawoodovega grafa v ravnini.

Izrek 92. Heawoodov graf nima nedegenerirane zrcalno simetrične predstavitve z enotsko razdaljo v ravnini.

Dokaz. Iz pogojev za enotske dolžine povezav Heawoodovega grafa dobimo devet enačb z devetimi neznankami.

$$\begin{aligned} (\alpha + a)^2 + \beta_1^2 &= 1, & (\alpha + a)^2 + \beta_2^2 &= 1, \\ \left(\xi + \frac{1}{2}\right)^2 + (\eta - y_2)^2 &= 1, & \left(\xi + \frac{1}{2}\right)^2 + (\eta - y_3)^2 &= 1, \\ \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)^2 + (\beta_1 - y_2)^2 &= 1, & \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)^2 + (\beta_2 - y_3)^2 &= 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + y_1^2 &= 1, \\ \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + (\eta - y_1)^2 &= 1, \\ (2\alpha)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2 &= 1.\end{aligned}$$

Dve enačbi in dve neznanki lahko eliminiramo, tako kot je opisano v nadaljevanju. Iz prvih dveh enačb sledita dve možnosti $\beta_1 = \beta_2$ oziroma $\beta_1 = -\beta_2$. Ko je $\beta_1 = \beta_2$, dobimo degenerirano predstavitev. Privzemimo torej, da je $\beta := \beta_1 = -\beta_2$. Podobno iz drugega para enačb sledita dve možnosti, $\eta = \frac{y_2 + y_3}{2}$ oziroma $y_2 = y_3$. Tudi $y_2 = y_3$ povzroči degenerirano predstavitev, zato vzemimo $\eta = \frac{y_2 + y_3}{2}$. Rešimo sistem preostalih sedmih enačb s sedmimi neznankami in upoštevamo, da so rešitve realna števila. V vseh rešitvah velja $\beta = 0$, torej je $\beta_1 = -\beta_2 = 0$. Vse simetrične rešitve z enotsko razdaljo so degenerirane, tako da vozlišči (α, β_1) in (α, β_2) (ter simetrično $(-\alpha, \beta_1)$ in $(-\alpha, \beta_2)$) sovpadata. \square

Poglavje 4

Predstavitve z enotsko razdaljo

Petersenovega grafa v ravnini

Znano je, da ima Petersenov graf $G(5, 2)$ realizacijo z enotsko razdaljo v ravnini [33], glej sliko 4.1 (a). Realizacija, ki jo je predstavil P. Erdős je v bistvu tudi koordinatizacija, zato je $e(G(5, 2)) = 2$. Petersenov graf pa je mogoče predstaviti v ravnini tudi kot poln graf na treh vozliščih K_3 ; taka predstavitev je toga, degenerirana in ni imerzija, glej sliko 4.1 (b). Vozlišča Petersenovega grafa bomo označevali z naravnimi števili kot je prikazano na sliki 4.1 (a).

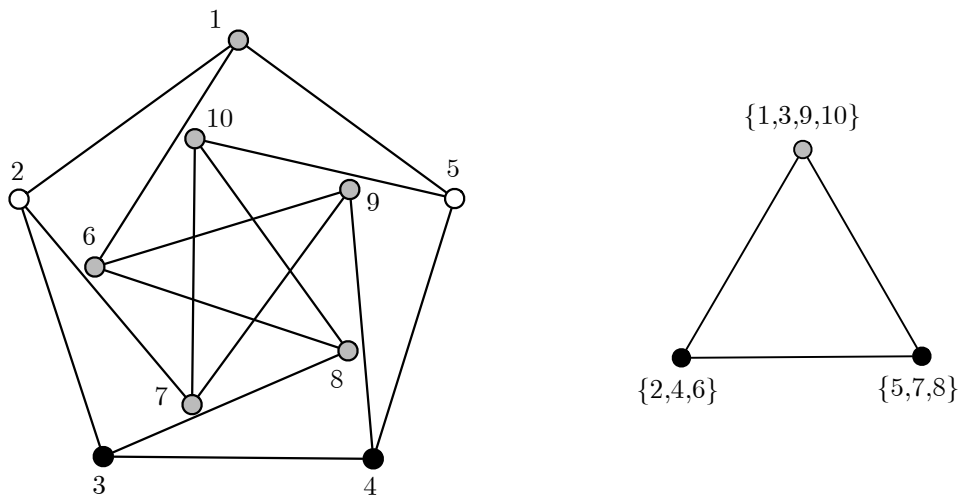
Motivirani z izrekom 7 bomo v tem poglavju opazovali tudi degenerirane predstavitve z enotsko razdaljo v ravnini Petersenovega grafa. Predstavili bomo vse degenerirane predstavitve Petersenovega grafa in se ukvarjali s fleksibilnostjo teh predstavitev. Raziskali bomo relacije med posameznimi degeneriranimi predstavitevami.

4.1 Prepovedani podgrafi Petersenovega grafa

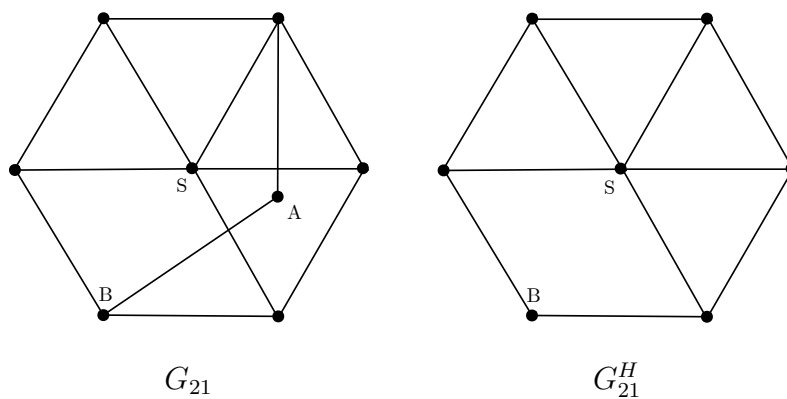
Naj bo graf G_{21} definiran kot na sliki 4.2(a) in naj bo G_{21}^A definiran kot induciran podgraf $G_{21}^A = G_{21}[V(G_{21}) \setminus \{A\}] = W_7^*$. Iz slike 4.2(b) je mogoče videti, da ima G_{21}^A togo realizacijo z enotsko razdaljo v ravnini, zato bomo dokaza leme 93 in posledice 94 izpustili.

Lema 93. *Naj bo graf G_{21}^A , kot je prikazan na sliki 4.2(b). Potem ima natanko eno togo realizacijo z enotsko razdaljo v ravnini, ki slika vozlišči B in S v točki, ki sta na razdalji ena.*

Posledica 94. *Naj bo graf G_{21} definiran kot na sliki 4.2(a). Graf G_{21} ni graf z enotsko razdaljo v ravnini.*



Slika 4.1: (a) Petersenov graf lahko narišemo v ravnini na nedegeneriran način, tako da so vse povezave dolge ena in da poljubni nesosednji vozlišči nista na razdalji ena; koordinatizacija ima dve prostostni stopnji. Na primer, lokacije sivih vozlišč so določene s kotoma med enim izmed belih vozlišč in fiksnima črnima vozliščema. (b) Degenerirana toga predstavitev z enotsko razdaljo v ravnini Petersenovega grafa. Označeno je katera vozlišča so preslikana v isto točko.

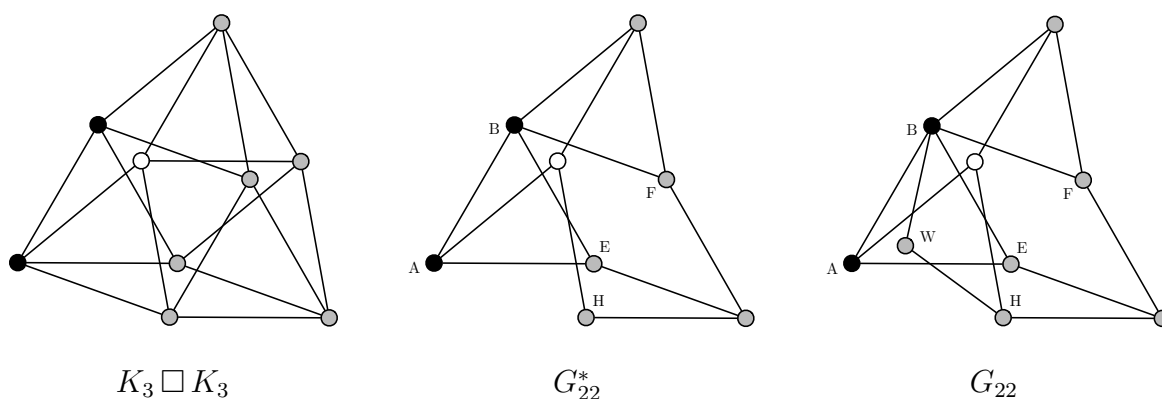


Slika 4.2: (a) Realizacija grafa G_{21} v ravnini. (b) Toga realizacija z enotsko razdaljo v ravnini grafa $G_{21}^A = G_{21}[V(G_{21}) \setminus \{A\}]$.

Pri dokazu leme 95 bomo uporabili posledico 86, ki je bila dokazana v razdelku 2.1.

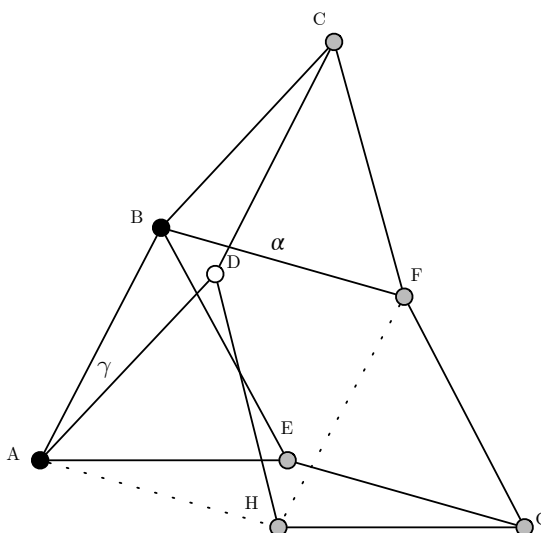
Lema 95. Naj bo graf G_{22}^* definiran kot na sliki 4.3(b) in naj bo, če obstaja, ρ njegova poljubna realizacija z enotsko razdaljo v ravnini. Potem $|\rho(A)\rho(H)| = |\rho(H)\rho(F)| = 1$.

Dokaz. Naj bo K_3 enakostranični trikotnik. Kartezični produkt $K_3 \square K_3$, ki je prikazan na sliki 4.3(a) je graf z enotsko razdaljo, glej posledico 86. Graf G_{22}^* je očitno podgraf grafa $K_3 \square K_3$ in torej graf z enotsko razdaljo. Naj bo ρ nedegenerirana predstavitev z enotsko raz-



Slika 4.3: (a) Kartezični produkt $K_3 \square K_3$ dveh polnih grafov na treh vozliščih je graf z enotsko koordinatizacijo v ravnini. Prikazana koordinatizacija ima eno prostostno stopnjo; položaj sivih vozlišč je določen s kotom med belim vozliščem in fiksnima črnima vozliščema. (b) Realizacija z enotsko razdaljo v ravnini grafa G_{22}^* z eno prostostno stopnjo. (c) Realizacija v ravnini grafa G_{22} , ki je definiran z množico vozlišč $V(G_{22}^*) \cup \{W\}$ in množico povezav $E(G_{22}^*) \cup \{B \sim W, W \sim H\}$.

daljo v ravnini grafa G_{22}^* . Označimo vozlišča grafa G_{22}^* kot na sliki 4.4. Zaradi poenostavitve zapisa pišimo u namesto $\rho(u)$, kjer je $u \in V(G_{22}^*)$ (npr. pisali bomo A namesto $\rho(A)$).



Slika 4.4: Graf G_{22}^* je graf z enotsko razdaljo v ravnini z eno prostostno stopnjo. Prikazana je podrobna notacija. Položaj sivih vozlišč je določen s kotom med belim vozliščem in fiksnima črnima vozliščema.

Naj ω predstavlja šesti koren enote $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. V kompleksni ravnini postavimo A v izhodišče, B v ω in E v 1 . Naj α označuje enotski vektor iz B v F , tako da je F v točki $\omega + \alpha$. Množenje

$z \omega$ je enako rotiranju za 60 stopinj, zato je C v točki $\omega + \omega\alpha$. Točka D je definirana kot četrta točka romba $ABCD$, tako da velja v kompleksnih številih $C - B = D - A$. Dobimo $D = \omega\alpha$. Podobno, naj bo G četrta točka romba $EBFG$, tako da v kompleksnih številih velja $B - E = F - D$, torej $G = 1 + \alpha$. Poskušajmo najti položaj točke H . Izračunajmo razdaljo med D in G , ki znaša $\|D - G\| = \|(1 + \alpha) - \omega\alpha\| = \|(1 + \alpha(1 - \omega))\| \leq \|1\| + \|\alpha\|\|1 - \omega\| = 2$. Če velja enačaj v prejšnji neenačbi, ki se zgodi ko je $\alpha = \omega$, imamo samo eno točko na razdalji ena od obeh D in G , drugače pa sta taki točki dve. Lahko preverimo, da sta α in $1 + \omega\alpha$ ena oddaljeni od obeh D in G . Torej je $H = \alpha$ ali $H = 1 + \omega\alpha$. Ko je $H = \alpha$ je mogoče preveriti, da je H ena oddaljena od točk A in F , kar dokazuje našo lemo. \square

Posledica 96. Naj bo graf G_{22} definiran kot na sliki 4.3(c). Graf G_{22} ni graf z enotsko razdaljo v ravnini.

Dokaz. Da bi dobili nedegenerirano predstavitev z enotsko razdaljo grafa G_{22} , bi morali dopolniti nedegenerirano predstavitev z enotsko razdaljo ρ grafa G_{22}^* z realizacijama dveh manjkajočih povezav $\rho(B) \sim \rho(W)$ in $\rho(W) \sim \rho(H)$. Kot smo dokazali v lemi 95 je štirikotnik $\rho(B)\rho(A)\rho(H)\rho(F)$ romb z vsemi stranicami dolžine ena. Zato mora predstavitev poti $B \sim W \sim H$ dolžine 2 vsebovati $\rho(A)$ oziroma $\rho(F)$. Torej predstavitev vozlišča W ni nedegenerirana; celo več, predstavitev tudi ni imerzija. \square

4.2 Predstavitve z enotsko razdaljo v ravnini

Vsak homomorfizem grafov $f : G \rightarrow H$, ki je surjektiven na $V(G)$, definira razbitje (particijo) množice vozlišč grafa G , kjer sta vozlišči u in v ekvivalentni natanko takrat, ko velja $f(u) = f(v)$. Kadar je H enostaven graf brez zank lahko podobno trdimo tudi v drugo smer, glej [50]. Delu razbitja množice vozlišč pravimo tudi *vozliščni razred*.

Izrek 97. Razbitje Θ množice vozlišč $V(G)$ izhaja iz homomorfizma grafov, ki je surjektiven na $V(G)$, če in samo če Θ definira pravilno barvanje vozlišč.

Dokaz. Naj bo Θ barvanje vozlišč grafa G . Označimo s K_ℓ poln graf na vozliščih v_1, \dots, v_ℓ . Če je Θ pravilno $|\Theta|$ -barvanje grafa G , potem lahko preslikamo vsak (barvni) vozliščni razred razbitja Θ na eno vozlišče grafa $K_{|\Theta|}$. Torej obstaja bijektivna preslikava $f : \Theta \rightarrow K_{|\Theta|}$, tako da velja $f(V_i) = v_i$, $1 \leq i \leq |\Theta|$. Preslikava $g : G \rightarrow K_{|\Theta|}$ definirana z $g(u) = j$, če in samo če velja $u \in f^{-1}(v_j)$, je dobro definiran homomorfizem grafov. Ker velja, da je vsak razred razbitja Θ neprazen, je g surjektivna na $V(G)$.

Če razbitje izhaja iz homomorfizma grafov, potem vozlišči istega razreda ne moreta biti sosednji, saj je slika homomorfizma graf brez zank. Ker je homomorfizem surjektiven na $V(G)$, je Θ pravilno $|\Theta|$ -barvanje vozlišč grafa G . \square

Za graf G z barvanjem (vozlišč) Θ definiramo *pobarvan graf* kot par (G, Θ) . Pravimo, da je G *podložen graf* pobarvanemu grafu (G, Θ) . Vsaki (morda degenerirani) predstavitvi z enotsko razdaljo v ravnini lahko priredimo podložen graf. Barvanje vozlišč Θ grafa G je ekvivalenčna relacija, zato lahko definiramo G/Θ , to je graf, ki ga dobimo, če vozlišča vsakega barvnega razreda združimo v eno vozlišče, ki predstavlja ta barvni razred. Na primer, naj bo Θ_3 poljubno pravilno 3-barvanje Petersenovega grafa; na sliki 4.1 (b) je mogoče videti poln graf na treh vozliščih K_3 , ki je podložen graf s tremi barvami pobarvanemu Petersenovemu grafu $(G/\Theta_3, \Theta_3)$.

Razbitju množice vozlišč Θ grafa G lahko priredimo pripadajočo razbitje števila $n = n_1 + n_2 + \dots + n_\ell$, kjer je $n = |V(G)|$, $\ell = |\Theta|$, $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_\ell > 0$ in kjer ima i -ti del razbitja Θ moč n_i . Razbitje števila $n = n_1 + n_2 + \dots + n_\ell$ bomo označevali z $(n_1, n_2, \dots, n_\ell)$ oziroma kar z \underline{n} .

Naj bo $\underline{n} = (n_1, n_2, \dots, n_\ell)$ celoštevilsko razbitje števila n . Označimo z $G_{\underline{n}}$ množico vseh neizomorfnih obarvanih (označenih) grafov, ki jih dobimo iz G , če G obarvamo z vsemi pravilnimi ℓ -barvanji, ki povzročijo celoštevilsko razbitje \underline{n} . Neformalno pravimo, da je $G_{\underline{n}}$ množica vseh različnih \underline{n} -barvanj grafa G . Označimo z $G_{\underline{n}}^*$ množico vseh neizomorfnih (neobarvanih) podloženih grafov grafom iz množice $G_{\underline{n}}$. Pravimo tudi, da je množica $G_{\underline{n}}^*$ množica vseh različnih \underline{n} -risanj grafa G .

Naj bo G graf. Degenerirano k -razsežno predstavitev z enotsko razdaljo $\rho : G \rightarrow \mathbb{R}^k$ lahko razstavimo na dve preslikavi $f : G \rightarrow H$ in $\rho^* : H \rightarrow \mathbb{R}^k$, kjer je f homomorfizem grafov surjektiven na množici vozlišč $V(G)$, ρ^* nedegenerirana k -razsežna predstavitev z enotsko razdaljo in kjer velja $\rho := \rho^* \circ f$. Da bi našli vse degenerirane predstavitve z enotsko razdaljo grafa G , moramo torej poiskati vse nedegenerirane predstavitve z enotsko razdaljo vseh neizomorfnih epimorfnih slikah grafa G . Po izreku 97 moramo torej poiskati vsa pravilna barvanja vozlišč grafa G . Da bi torej dobili vse degenerirane predstavitve z enotsko razdaljo grafa G , moramo za vsako celoštevilsko razbitje \underline{n} poiskati vse nedegenerirane predstavitve z enotsko razdaljo grafov iz množice $G_{\underline{n}}^*$. Pri barvanju G z barvami iz množice $\{1, \dots, \ell\}$ in pri opazovanju pripadajočih epimorfizmov, lahko upoštevamo tako simetrije grafa G kot simetrije celoštevilskih razbitij \underline{n} .

Naj bo G graf z n vozlišči, katerega maksimalna neodvisna množica ima m elementov. Ko opazujemo surjektivne homomorfizme grafov, lahko opazujemo le razbitja celega števila n

z maksimalnim sumandom največ m . Naj bo $R[n, m]$ število vseh razbitij celega števila n z maksimalnim sumandom manjšim ali enakim m . Naj bo $R[n, j, m]$ rekurzivna funkcija, ki vrne število vseh celoštevilskih razbitij celega števila n na natanko j sumandov pri katerih je največji sumand manjši ali enak m . Lahko jo izračunamo kot vsoto dveh sumandov, števila razbitij, ki imajo minimalni sumand enak ena, in števila razbitij z minimalnim sumandom večjim od ena. Torej

$$R[n, j, m] = \begin{cases} 0, & (n > 0 \wedge j = 0) \vee (m = 0) \vee (n < j), \\ 1, & (n = 0 \wedge j = 0) \vee (j = n) \vee (j = 1), \\ R[n - 1, j - 1, m] + R[n - j, j, m - 1], & \text{sicer} \end{cases}$$

in

$$R[n, m] = \sum_{j=1}^n R[n, j, m].$$

V [2] je mogoče preveriti, da je $R[n, m]$ enak številu razbitij števila n na največ m delov.

V Petersenovem grafu izberimo eno vozlišče, recimo mu v . Znano je, da je Petersenov graf vozliščno tranzitiven, glej na primer [115], zato je vseeno katero vozlišče izberemo. Maksimalna neodvisna množica vsebuje poleg v tudi nekaj vozlišč, ki niso sosednja z v . Izberimo vsa vozlišča, ki niso sosednja z v ; lahko je preveriti, da je takih vozlišč 6. Označimo jih z u_1, u_2, \dots, u_6 . V Petersenovem grafu obstaja 6 ciklov napet na u_1, u_2, \dots, u_6 , v šest ciklu pa lahko izberemo največ tri vozlišča, ki med seboj niso povezana. Torej ima maksimalna neodvisna množica v $G(5, 2)$ moč 4 in za Petersenov graf velja $n = 10, m = 4$ in $R[10, 4] = 23$.

V tabeli 4.1 so naštetna vsa različna celoštevilaska razbitja (ki jim bomo v nadaljevanju, ko bomo opazovali vsakega izmed njih, rekli *primeri*) za Petersenov graf. Za celoštevilsko razbitje $\underline{n} = (n_1, n_2, \dots, n_\ell)$ števila n , ki ga bomo opazovali v vsakem izmed primerov, bomo označili z:

n_i moč i -tega vozliščnega razreda,

ℓ število uporabljenih barv v vsakem izmed pravih ℓ -barvanj, ki povzročijo razbitje \underline{n} ,

a število vseh grafov v $G_{\underline{n}}$,

d število vseh grafov v $G_{\underline{n}}^*$,

r število vseh grafov z enotsko razdaljo v množici $G_{\underline{n}}^*$.

Seveda velja $0 \leq r \leq d \leq a$.

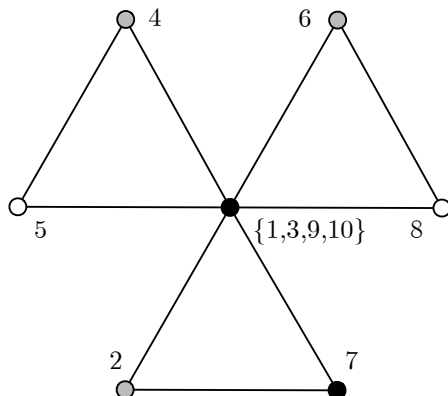
	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8	n_9	n_{10}	ℓ	a	d	r
1	4	4	2								3	0	0	0
2	4	4	1	1							4	0	0	0
3	4	3	3								3	1	1	1
4	4	3	2	1							4	2	1	1
5	4	3	1	1	1						5	2	1	0
6	4	2	2	2							4	1	1	0
7	4	2	2	1	1						5	2	2	2
8	4	2	1	1	1	1					6	1	1	1
9	4	1	1	1	1	1	1				7	1	1	1
10	3	3	3	1							4	3	3	2
11	3	3	2	2							4	4	2	1
12	3	3	2	1	1						5	10	7	2
13	3	3	1	1	1	1					6	5	5	0
14	3	2	2	2	1						5	14	5	1
15	3	2	2	1	1	1					6	19	15	4
16	3	2	1	1	1	1	1				7	7	7	2
17	3	1	1	1	1	1	1	1			8	2	2	1
18	2	2	2	2	2						5	2	2	0
19	2	2	2	2	1	1					6	11	10	1
20	2	2	2	1	1	1	1				7	12	12	1
21	2	2	1	1	1	1	1	1			8	5	5	1
22	2	1	1	1	1	1	1	1	1		9	1	1	0
23	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	1	1
											Skupaj	106	85	23

Tabela 4.1: Razbitja množice vozlišč Petersenovega grafa $G(5, 2)$ in pripadajoče število r podloženih grafov, ki jih je mogoče nedegenerirano predstaviti z enotsko razdaljo v ravnini.

Vsakega izmed 23 primerov bomo analizirali ločeno. Pri vsaki analizi bomo našeli vsa različna ℓ -barvanja Petersenovega grafa, ki povzročijo celoštevilsko razbitje v opazovanem primeru. Za vsako barvanje bomo povedali ali ima podložen graf nedegenerirano predstavitev z enotsko razdaljo v ravnini ter ugotovili, če je toga, oziroma koliko prostostnih stopenj ima. Za tiste primere, ki niso grafi z enotsko razdaljo, bomo poiskali prepovedan podgraf (oviro). Vse različne degenerirane predstavitve z enotsko razdaljo in tudi ena nedegenerirana predstavitev z enotsko razdaljo Petersenovega grafa $G(5, 2)$ so predstavljene na sliki 4.8.

V primerih od 1 do 6 je velikost m največje neodvisne množice vozlišč v razbitju vozlišč enaka 4. To pomeni, da so štiri vozlišča Petersenovega grafa obarvana z isto barvo in da jih pripadajoči homomorfizem grafov skrči v eno vozlišče; glej sliko 4.5. Kot smo že ugotovili, ima

$G(5, 2)$ zaradi simetrij natanko eno (do izomorfizma natančno določeno) neodvisno množico moči 4. Brez škode za splošnost lahko izberemo, da je ta množica $\{1, 3, 9, 10\}$.



Slika 4.5: Petersenov graf z vozlišči $\{1, 3, 9, 10\}$ skrčenimi v eno. Lahko je videti, da ima realizacijo z enotsko razdaljo z dvema prostostnima stopnjama – lokacije sivih vozlišč so določene s kotoma med enim izmed belih vozlišč in fiksna črna vozliščema.

Primer 1. $(4, 4, 2)$ Ne obstaja tako pravilno 3-barvanje vozlišč grafa $G(5, 2)$, da bi dva barvna razreda vsebovala po štiri vozlišča in en razred dve vozlišči. Če bi tako barvanje obstajalo, bi med vozlišči $\{2, 4, 5, 6, 7, 8\}$ grafa na sliki 4.5 lahko izbrali štiri paroma nesosednja vozlišča in jih pobarvali z isto barvo. Izberemo pa lahko le tri taka vozlišča. Primer 1 se torej ne more zgoditi.

Primer 2. $(4, 4, 1, 1)$ Ta primer je podoben primeru 1 in se prav tako ne more zgoditi.

Primer 3. $(4, 3, 3)$ Obstaja eno samo pravilno barvanje vozlišč grafa $G(5, 2)$. Barvanje povzroči natanko en tog enakostranični trikotnik, ki ga je mogoče videti na sliki 4.1 (b).

primer	pravilno barvanje	realizabilen	graf / ovira	tog / \mathcal{D}_G
3.1.	$\{1, 3, 9, 10\}, \{2, 4, 6\}, \{5, 7, 8\}$	da	$G_{3.1}$	da / 0

Tabela 4.2: Primer 3. $(4, 3, 3)$

Primer 4. $(4, 3, 2, 1)$ Obstajata natanko dve različni pravilni barvanji grafa $G(5, 2)$, obe povzročita isto tego realizacijo z enotsko razdaljo v ravnini; glej sliko 4.7 (a) in sliko 4.7 (b).

Primer 5. $(4, 3, 1, 1, 1)$ Obstajata natanko dve različni barvanji grafa $G(5, 2)$, ki imata isti podložen graf. Ta vsebuje $K_{2,3}$ kot podgraf. Nedegenerirana predstavitev z enotsko razdaljo v ravnini ne obstaja, obstaja pa realizacija z enotsko razdaljo z dvema prostostnima stopnjama v prostoru \mathbb{R}^3 .

primer	pravilno barvanje	realizabilen	graf / ovira	tog / \mathcal{D}_G
4.1.	$\{1, 3, 9, 10\}, \{2, 4, 6\}, \{5, 7\}, \{8\}$	da	$G_{4.1}$	da / 0
4.2.	$\{1, 3, 9, 10\}, \{2, 4, 8\}, \{5, 6\}, \{7\}$	da	$G_{4.1}$	da / 0

Tabela 4.3: Primer 4. (4, 3, 2, 1)

primer	pravilno barvanje	realizabilen	graf / ovira	tog / \mathcal{D}_G
5.1.	$\{1, 3, 9, 10\}, \{2, 4, 6\}, \{5\}, \{7\}, \{8\}$	ne	$K_{2,3}$	
5.2.	$\{1, 3, 9, 10\}, \{2, 4, 8\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}$	ne	$K_{2,3}$	

Tabela 4.4: Primer 5. (4, 3, 1, 1, 1)

Primer 6. (4, 2, 2, 2) Graf $G(5, 2)$ lahko pobarvamo le na en način, barvanju podložen graf je K_4 . Vemo, da K_4 ni graf z enotsko razdaljo v ravnini, mogoče pa ga je togo realizirati z enotsko razdaljo v prostoru (kot regularen tetraeder).

primer	pravilno barvanje	realizabilen	graf / ovira	tog / \mathcal{D}_G
6.1.	$\{1, 3, 9, 10\}, \{2, 4\}, \{5, 6\}, \{7, 8\}$	ne	K_4	

Tabela 4.5: Primer 6. (4, 2, 2, 2)

Primer 7. (4, 2, 2, 1, 1) Obstajata natanko dve barvanji grafa $G(5, 2)$. Obe je mogoče nede-generirano realizirati z enotsko razdaljo v ravnini; ena realizacija je toga, druga pa ima eno prostostno stopnjo.

primer	pravilno barvanje	realizabilen	graf / ovira	tog / \mathcal{D}_G
7.1.	$\{1, 3, 9, 10\}, \{2, 4\}, \{5, 6\}, \{7\}, \{8\}$	da	$G_{7.1}$	da/0
7.2.	$\{1, 3, 9, 10\}, \{2, 4\}, \{5, 7\}, \{6\}, \{8\}$	da	$G_{7.2}$	ne/1

Tabela 4.6: Primer 7. (4, 2, 2, 1, 1)

Primer 8. (4, 2, 1, 1, 1, 1) Graf $G(5, 2)$ lahko pobarvamo le na en način, ki predstavlja graf z enotsko realizacijo z eno prostostno stopnjo v ravnini.

primer	pravilno barvanje	realizabilen	graf / ovira	tog / \mathcal{D}_G
8.1.	$\{1, 3, 9, 10\}, \{2, 4\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{8\}$	da	$G_{8.1}$	ne/1

Tabela 4.7: Primer 8. (4, 2, 1, 1, 1, 1)

Primer 9. (4, 1, 1, 1, 1, 1, 1) Tudi v tem primeru lahko graf $G(5, 2)$ pobarvamo le na en način. Barvanje povzroči graf, ki ima nede-generirano realizacijo z enotsko razdaljo z dvema prosto-

stnima stopnjama v ravnini, glej sliko 4.5.

primer	pravilno barvanje	realizabilen	graf / ovira	tog / \mathcal{D}_G
9.1.	{1, 3, 9, 10}, {2}, {4}, {5}, {6}, {7}, {8}	da	$G_{9.1}$	ne/2

Tabela 4.8: Primer 9. (4, 1, 1, 1, 1, 1, 1)

Primer 10. (3, 3, 3, 1) Obstajajo natanko tri različna barvanja grafa $G(5, 2)$, katerim pripadajo trije različni podloženi grafi. Prva dva sta grafa z enotsko realizacijo v ravnini; prvi graf je tog, drugi pa ima realizacijo z enotsko razdaljo z eno prostostno stopnjo. Tretje barvanje graf $G(5, 2)$ preslika v graf K_4 , ki ni graf z enotsko razdaljo v ravnini.

primer	pravilno barvanje	realizabilen	graf / ovira	tog / \mathcal{D}_G
10.1.	{1, 3, 7}, {2, 4, 6}, {5, 8, 9}, {10}	da	$G_{4.1}$	da/0
10.2.	{1, 3, 9}, {2, 4, 6}, {5, 7, 8}, {10}	da	$G_{10.2}$	ne/1
10.3.	{1, 3, 10}, {2, 4, 6}, {5, 8, 9}, {7}	ne	K_4	

Tabela 4.9: Primer 10. (3, 3, 3, 1)

Primer 11. (3, 3, 2, 2) Obstajajo natanko štiri različna barvanja grafa $G(5, 2)$, ki povzročijo dva neizomorfna podložena grafa. Prvi je izomorfen grafu K_4 , ki nima nedegenerirane predstavitve z enotsko razdaljo v ravnini, drugi pa ima togo realizacijo z enotsko razdaljo v ravnini.

primer	pravilno barvanje	realizabilen	graf / ovira	tog / \mathcal{D}_G
11.1.	{1, 3, 7}, {2, 4, 6}, {5, 8}, {9, 10}	ne	K_4	
11.2.	{1, 3, 7}, {2, 4, 8}, {5, 6}, {9, 10}	ne	K_4	
11.3.	{1, 3, 10}, {2, 4, 6}, {5, 7}, {8, 9}	ne	K_4	
11.4.	{1, 4, 8}, {2, 9, 10}, {3, 5}, {6, 7}	da	$G_{4.1}$	da/0

Tabela 4.10: Primer 11. (3, 3, 2, 2)

Primer 12. (3, 3, 2, 1, 1) Dobimo natanko deset različnih barvanj grafa $G(5, 2)$, ki predstavljajo sedem neizomorfni podloženih grafov. Samo dva izmed njih sta grafa z enotsko razdaljo v ravnini; en ima togo realizacijo, drugi pa realizacijo z eno prostostno stopnjo. Vsi ostali podloženi grafi niso grafi z enotsko razdaljo, saj vsebujejo $K_{2,3}$ kot podgraf.

Primer 13. (3, 3, 1, 1, 1, 1) Obstaja natanko pet različnih barvanj grafa $G(5, 2)$, ki povzročijo pet različnih podloženih grafov. Vsi vsebujejo $K_{2,3}$ kot podgraf, zato noben izmed njih ni graf z enotsko razdaljo.

primer	pravilno barvanje	realizabilen	graf / ovira	tog / \mathcal{D}_G
12.1.	{1, 3, 7}, {2, 4, 6}, {5, 8}, {9}, {10}	da	$G_{7.1}$	da/0
12.2.	{1, 3, 7}, {2, 4, 6}, {5, 9}, {8}, {10}	ne	$K_{2,3}$	
12.3.	{1, 3, 7}, {2, 4, 8}, {5, 6}, {9}, {10}	ne	$K_{2,3}$	
12.4.	{1, 3, 7}, {2, 4, 10}, {5, 6}, {8}, {9}	ne	$K_{2,3}$	
12.5.	{1, 3, 9}, {2, 4, 6}, {5, 7}, {8}, {10}	ne	$K_{2,3}$	
12.6.	{1, 3, 10}, {2, 4, 6}, {5, 7}, {8}, {9}	da	$G_{7.1}$	da/0
12.7.	{1, 3, 10}, {2, 4, 6}, {5, 8}, {7}, {9}	da	$G_{7.1}$	da/0
12.8.	{1, 3, 10}, {2, 4, 6}, {5, 9}, {7}, {8}	ne	$K_{2,3}$	
12.9.	{1, 4, 8}, {2, 9, 10}, {3, 5}, {6}, {7}	da	$G_{12.9}$	ne/1
12.10.	{1, 4, 10}, {2, 8, 9}, {3, 5}, {6}, {7}	ne	$K_{2,3}$	

Tabela 4.11: Primer 12. (3, 3, 2, 1, 1)

primer	pravilno barvanje	realizabilen	graf / ovira	tog / \mathcal{D}_G
13.1.	{1, 3, 7}, {2, 4, 6}, {5}, {8}, {9}, {10}	ne	$K_{2,3}$	
13.2.	{1, 3, 7}, {2, 4, 8}, {5}, {6}, {9}, {10}	ne	$K_{2,3}$	
13.3.	{1, 3, 9}, {2, 4, 6}, {5}, {7}, {8}, {10}	ne	$K_{2,3}$	
13.4.	{1, 3, 10}, {2, 4, 6}, {5}, {7}, {8}, {9}	ne	$K_{2,3}$	
13.5.	{1, 4, 8}, {2, 9, 10}, {3}, {5}, {6}, {7}	ne	$K_{2,3}$	

Tabela 4.12: Primer 13. (3, 3, 1, 1, 1, 1)

Primer 14. (3, 2, 2, 2, 1) Obstaja natanko 14 različnih barvanj vozlišč grafa $G(5, 2)$, ki generirajo le pet različnih podloženih grafov. Samo en graf ima togo realizacijo z enotsko razdaljo v ravnini. Med ostalimi štirimi trije vsebujejo $K_{2,3}$ in eden K_4 in zato noben izmed njih ni graf z enotsko razdaljo.

Primer 15. (3, 2, 2, 1, 1, 1) Graf $G(5, 2)$ lahko pobarvamo na natanko 19 različnih načinov, ki generirajo 15 različnih podloženih grafov. Samo štirje grafi so grafi z enotsko razdaljo; dva izmed štirih imata togo realizacijo, dva pa le realizaciji s po eno prostostno stopnjo. Deset izmed enajstih grafov, ki nimajo nedegenerirane predstavitve z enotsko razdaljo, vsebuje $K_{2,3}$, zadnji pa K_4 .

Primer 16. (3, 2, 1, 1, 1, 1, 1) Obstaja natanko sedem različnih barvanj grafa $G(5, 2)$, ki povzročijo sedem različnih podloženih grafov. Samo dva sta grafa z enotsko razdaljo; prvi ima togo realizacijo, drugi pa realizacijo z eno prostostno stopnjo. Vsi ostali grafi, ki niso grafi z enotsko razdaljo, vsebujejo $K_{2,3}$.

Primer 17. (3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) Obstajata natanko dve različni barvanji grafa $G(5, 2)$, ki generirata dva neizomorfna podložena grafa. Prvi je graf z enotsko realizacijo z eno prostostno

primer	pravilno barvanje	realizabilen	graf / ovira	tog / \mathcal{D}_G
14.1.	{1, 3, 7}, {2, 4}, {5, 6}, {8, 9}, {10}	ne	$K_{2,3}$	
14.2.	{1, 3, 7}, {2, 4}, {5, 6}, {9, 10}, {8}	ne	$K_{2,3}$	
14.3.	{1, 3, 7}, {2, 4}, {5, 8}, {6, 10}, {9}	ne	$K_{2,3}$	
14.4.	{1, 3, 7}, {2, 4}, {5, 9}, {6, 10}, {8}	da	$G_{7.1}$	da/0
14.5.	{1, 3, 9}, {2, 4}, {5, 6}, {7, 8}, {10}	ne	$K_{2,3}$	
14.6.	{1, 3, 9}, {2, 4}, {5, 7}, {6, 10}, {8}	da	$G_{7.1}$	da/0
14.7.	{1, 3, 9}, {2, 4}, {5, 8}, {6, 10}, {7}	ne	$K_{2,3}$	
14.8.	{1, 3, 10}, {2, 4}, {5, 6}, {7, 8}, {9}	ne	$K_{2,3}$	
14.9.	{1, 3, 10}, {2, 4}, {5, 6}, {8, 9}, {7}	ne	$K_{2,3}$	
14.10.	{1, 3, 10}, {2, 4}, {5, 7}, {8, 9}, {6}	ne	K_4	
14.11.	{1, 3, 10}, {2, 4}, {5, 9}, {6, 7}, {8}	ne	$K_{2,3}$	
14.12.	{1, 3, 10}, {2, 4}, {6, 7}, {8, 9}, {5}	ne	$K_{2,3}$	
14.13.	{1, 4, 10}, {2, 6}, {3, 7}, {8, 9}, {5}	ne	K_4	
14.14.	{1, 4, 10}, {2, 6}, {3, 9}, {7, 8}, {5}	ne	K_4	

Tabela 4.13: Primer 14. (3, 2, 2, 2, 1)

primer	pravilno barvanje	realizabilen	graf / ovira	tog / \mathcal{D}_G
15.1.	{1, 3, 7}, {2, 4}, {5, 6}, {8}, {9}, {10}	ne	$K_{2,3}$	
15.2.	{1, 3, 7}, {2, 4}, {5, 8}, {6}, {9}, {10}	ne	$K_{2,3}$	
15.3.	{1, 3, 7}, {2, 4}, {5, 9}, {6}, {8}, {10}	ne	$K_{2,3}$	
15.4.	{1, 3, 7}, {2, 4}, {6, 10}, {5}, {8}, {9}	ne	$K_{2,3}$	
15.5.	{1, 3, 9}, {2, 4}, {5, 6}, {7}, {8}, {10}	ne	$K_{2,3}$	
15.6.	{1, 3, 9}, {2, 4}, {5, 7}, {6}, {8}, {10}	da	$G_{15.6}$	ne/1
15.7.	{1, 3, 9}, {2, 4}, {5, 8}, {6}, {7}, {10}	ne	$K_{2,3}$	
15.8.	{1, 3, 9}, {2, 4}, {6, 10}, {5}, {7}, {8}	ne	$K_{2,3}$	
15.9.	{1, 3, 10}, {2, 4}, {5, 6}, {7}, {8}, {9}	ne	$K_{2,3}$	
15.10.	{1, 3, 10}, {2, 4}, {5, 7}, {6}, {8}, {9}	ne	$K_{2,3}$	
15.11.	{1, 3, 10}, {2, 4}, {5, 9}, {6}, {7}, {8}	ne	$K_{2,3}$	
15.12.	{1, 3, 10}, {2, 4}, {6, 7}, {5}, {8}, {9}	da	$G_{15.12}$	da/0
15.13.	{1, 3, 10}, {2, 4}, {8, 9}, {5}, {6}, {7}	ne	$K_{2,3}$	
15.14.	{1, 3, 10}, {2, 9}, {4, 6}, {5}, {7}, {8}	ne	$K_{2,3}$	
15.15.	{1, 3, 10}, {2, 9}, {4, 7}, {5}, {6}, {8}	da	$G_{15.15}$	da/0
15.16.	{1, 4, 10}, {2, 6}, {3, 7}, {5}, {8}, {9}	ne	$K_{2,3}$	
15.17.	{1, 4, 10}, {2, 6}, {3, 9}, {5}, {7}, {8}	ne	K_4	
15.18.	{1, 4, 10}, {2, 8}, {3, 6}, {5}, {7}, {9}	ne	$K_{2,3}$	
15.19.	{1, 4, 10}, {2, 9}, {3, 6}, {5}, {7}, {8}	da	$G_{15.19}$	ne/1

Tabela 4.14: Primer 15. (3, 2, 2, 1, 1, 1)

primer	pravilno barvanje	realizabilen	graf / ovira	tog / \mathcal{D}_G
16.1.	{1, 3, 7}, {2, 4}, {5}, {6}, {8}, {9}, {10}	da	$G_{16.1}$	da/0
16.2.	{1, 3, 9}, {2, 4}, {5}, {6}, {7}, {8}, {10}	ne	$K_{2,3}$	
16.3.	{1, 3, 9}, {2, 10}, {4}, {5}, {6}, {7}, {8}	ne	$K_{2,3}$	
16.4.	{1, 3, 10}, {2, 4}, {5}, {6}, {7}, {8}, {9}	ne	$K_{2,3}$	
16.5.	{1, 4, 8}, {2, 9}, {3}, {5}, {6}, {7}, {10}	da	$G_{16.5}$	ne/1
16.6.	{1, 4, 10}, {2, 6}, {3}, {5}, {7}, {8}, {9}	ne	$K_{2,3}$	
16.7.	{1, 4, 10}, {2, 8}, {3}, {5}, {6}, {7}, {9}	ne	$K_{2,3}$	

Tabela 4.15: Primer 16. (3, 2, 1, 1, 1, 1)

stopnjo. Drugi graf vsebuje $K_{2,3}$ in zato ni graf z enotsko razdaljo. Opomniti velja, da pri primeru 17.1 uporaba Grueblerjeve enačbe zaradi odvečne povezave (omejitve) vrne $\mathcal{D}_{G_{17.1}} \geq 0$, velja pa $\mathcal{D}_{G_{17.1}} = 1$.

primer	pravilno barvanje	realizabilen	graf / ovira	tog / \mathcal{D}_G
17.1.	{1, 3, 7}, {2}, {4}, {5}, {6}, {8}, {9}, {10}	da	$G_{17.1}$	ne/1
17.2.	{1, 3, 9}, {2}, {4}, {5}, {6}, {7}, {8}, {10}	ne	$K_{2,3}$	

Tabela 4.16: Primer 17. (3, 1, 1, 1, 1, 1, 1)

Primer 18. (2, 2, 2, 2, 2) Graf $G(5, 2)$ lahko pobarvamo z natanko dvema različnima barvanjima, ki generirata dva neizomorfna podložena grafa. Oba vsebujeta $K_{2,3}$ in zato nista grafa z enotsko razdaljo.

primer	pravilno barvanje	realizabilen	graf / ovira	tog / \mathcal{D}_G
18.1.	{1, 3}, {2, 4}, {5, 6}, {7, 8}, {9, 10}	ne	$K_{2,3}$	
18.2.	{1, 3}, {2, 10}, {4, 7}, {5, 6}, {8, 9}	ne	$K_{2,3}$	

Tabela 4.17: Primer 18. (2, 2, 2, 2, 2)

Primer 19. (2, 2, 2, 2, 1, 1) Obstaja natanko enajst različnih barvanj grafa $G(5, 2)$, ki generirajo deset neizomorfni podloženih grafov. Samo en izmed njih ima nedegenerirano predstavitev z enotsko razdaljo v ravnini; ta je realizacija z eno prostostno stopnjo. Vsi ostali vsebujejo $K_{2,3}$, zato niso grafi z enotsko razdaljo.

Primer 20. (2, 2, 2, 1, 1, 1, 1) Natanko dvanajst različnih barvanj grafa $G(5, 2)$ generira dvanajst neizomorfni podloženih grafov. Samo en izmed njih ima realizacijo z enotsko razdaljo; ta ima dve prostostni stopnji. Deset izmed enajstih grafov, ki niso grafi z enotsko razdaljo, vsebuje $K_{2,3}$, preostali graf pa K_4 .

primer	pravilno barvanje	realizabilen	graf / ovira	tog / \mathcal{D}_G
19.1.	{1, 3}, {2, 4}, {5, 6}, {7, 8}, {9}, {10}	ne	$K_{2,3}$	
19.2.	{1, 3}, {2, 4}, {5, 6}, {8, 9}, {7}, {10}	ne	$K_{2,3}$	
19.3.	{1, 3}, {2, 4}, {5, 6}, {9, 10}, {7}, {8}	ne	$K_{2,3}$	
19.4.	{1, 3}, {2, 4}, {5, 7}, {6, 10}, {8}, {9}	ne	$K_{2,3}$	
19.5.	{1, 3}, {2, 4}, {5, 8}, {6, 7}, {9}, {10}	ne	$K_{2,3}$	
19.6.	{1, 3}, {2, 4}, {5, 8}, {6, 10}, {7}, {9}	ne	$K_{2,3}$	
19.7.	{1, 3}, {2, 4}, {6, 7}, {8, 9}, {5}, {10}	ne	$K_{2,3}$	
19.8.	{1, 3}, {2, 4}, {6, 7}, {9, 10}, {5}, {8}	ne	$K_{2,3}$	
19.9.	{1, 3}, {2, 9}, {4, 6}, {5, 7}, {8}, {10}	ne	$K_{2,3}$	
19.10.	{1, 3}, {2, 9}, {4, 6}, {5, 8}, {7}, {10}	da	$G_{19.10}$	ne/1
19.11.	{1, 3}, {2, 10}, {4, 7}, {5, 6}, {8}, {9}	ne	$K_{2,3}$	

Tabela 4.18: Primer 19. (2, 2, 2, 2, 1, 1)

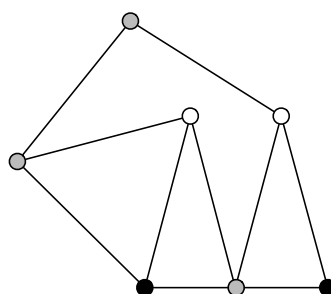
primer	pravilno barvanje	realizabilen	graf / ovira	tog / \mathcal{D}_G
20.1.	{1, 3}, {2, 4}, {5, 6}, {7}, {8}, {9}, {10}	ne	$K_{2,3}$	
20.2.	{1, 3}, {2, 4}, {5, 7}, {6}, {8}, {9}, {10}	ne	$K_{2,3}$	
20.3.	{1, 3}, {2, 4}, {6, 7}, {5}, {8}, {9}, {10}	ne	$K_{2,3}$	
20.4.	{1, 3}, {2, 4}, {6, 10}, {5}, {7}, {8}, {9}	ne	$K_{2,3}$	
20.5.	{1, 3}, {2, 4}, {7, 8}, {5}, {6}, {9}, {10}	ne	$K_{2,3}$	
20.6.	{1, 3}, {2, 9}, {4, 6}, {5}, {7}, {8}, {10}	ne	$K_{2,3}$	
20.7.	{1, 3}, {2, 9}, {4, 10}, {5}, {6}, {7}, {8}	ne	$K_{2,3}$	
20.8.	{1, 3}, {2, 10}, {4, 6}, {5}, {7}, {8}, {9}	ne	$K_{2,3}$	
20.9.	{1, 3}, {2, 10}, {4, 7}, {5}, {6}, {8}, {9}	ne	K_4	
20.10.	{1, 4}, {2, 8}, {9, 10}, {3}, {5}, {6}, {7}	ne	$K_{2,3}$	
20.11.	{1, 4}, {2, 9}, {3, 6}, {5}, {7}, {8}, {10}	da	$G_{20.11}$	ne/2
20.12.	{1, 4}, {2, 10}, {3, 6}, {5}, {7}, {8}, {9}	ne	$K_{2,3}$	

Tabela 4.19: Primer 20. (2, 2, 2, 1, 1, 1, 1)

Graf $G_{20.11}$ ima realizacijo z enotsko razdaljo z dvema prostostnima stopnjama. Ni tako očitno, vendar obstaja tudi visoko degenerirana predstavitev z enotsko razdaljo grafa $G_{20.11}$, ki jo je mogoče videti na sliki 4.6.

Primer 21. (2, 2, 1, 1, 1, 1, 1) Natanko pet različnih barvanj grafa $G(5, 2)$ povzroči pet neizomorfni podloženih grafov. V primeru 21.2 dobimo graf G_{21} , ki je predstavljen na sliki 4.2(a). Po posledici 94 graf G_{21} ni graf z enotsko razdaljo v ravnini.

Samo en izmed petih neizomorfni grafov je graf z enotsko razdaljo; ima realizacijo z eno prostostno stopnjo. Trije izmed štirih grafov, ki nimajo nedegenerirane predstavitve z enotsko razdaljo, vsebujejo $K_{2,3}$, četrti pa G_{21} . V primeru 21.1 bi uporaba Grueblerjeve enačbe



Slika 4.6: Visoko degenerirana predstavitev z enotsko razdaljo Petersenovega grafa v ravnini z dvema prostostnima stopnjama; položaj sivih vozlišč je določen s kotoma med enim izmed belih vozlišč in povezavo, ki povezuje fiksni črni vozlišči. Graf $G_{20.11}$ na sliki ima tudi realizacijo z enotsko razdaljo, ki ni visoko degenerirana, glej sliko 4.8.

zaradi odvečne povezave (odvečna povezava je po lemi 95 spodnja desna povezava v zgornjem trikotniku na predstavitvi grafa $G_{21.1}$ na sliki 4.8) vrnila $\mathcal{D}_{G_{21.1}} \geq 0$, velja pa $\mathcal{D}_{G_{21.1}} = 1$.

primer	pravilno barvanje	realizabilen	graf / ovira	tog / \mathcal{D}_G
21.1.	{1, 3}, {2, 4}, {5}, {6}, {7}, {8}, {9}, {10}	da	$G_{21.1}$	ne/1
21.2.	{1, 3}, {2, 9}, {4}, {5}, {6}, {7}, {8}, {10}	ne	G_{21}	
21.3.	{1, 3}, {9, 10}, {2}, {4}, {5}, {6}, {7}, {8}	ne	$K_{2,3}$	
21.4.	{1, 4}, {2, 8}, {3}, {5}, {6}, {7}, {9}, {10}	ne	$K_{2,3}$	
21.5.	{1, 4}, {2, 9}, {3}, {5}, {6}, {7}, {8}, {10}	ne	$K_{2,3}$	

Tabela 4.20: Primer 21. (2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1)

Primer 22. (2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) Obstaja eno samo barvanje grafa $G(5, 2)$. Barvanje generira podložen graf G_{22} , ki ga lahko vidimo na sliki 4.3(c). Po posledici 96 graf G_{22} ni graf z enotsko razdaljo. Naj bo graf G_{22}^* kot je definiran na sliki 4.3(b). Nedegenerirana predstavitev z enotsko razdaljo v ravnini grafa G_{22}^* z eno prostostno stopnjo (kot γ) obstaja in jo lahko vidimo na sliki 4.4.

primer	pravilno barvanje	realizabilen	graf / ovira	tog / \mathcal{D}_G
22.1.	{1, 3}, {2}, {4}, {5}, {6}, {7}, {8}, {9}, {10}	ne	G_{22}	

Tabela 4.21: Primer 22. (2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)

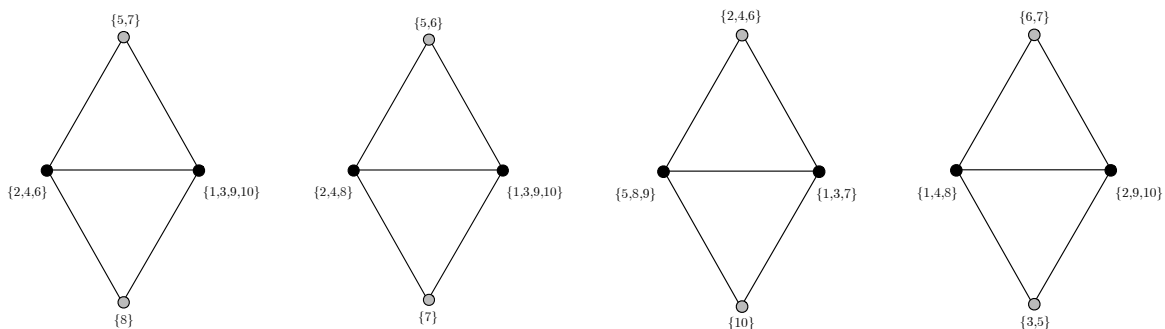
Primer 23. (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) Vsako vozlišče je pobarvano s svojo barvo, zato je homomorfizem grafov kar identiteta. Ena izmed najbolj simetričnih realizacij z enotsko razdaljo Petersenovega grafa je predstavljena na sliki 4.1 (a).

Regularni petkotnik 12345 na sliki 4.1 (a) ima dve prostostni stopnji, $\angle 234$ in $\angle 345$. Obstajata največ dva položaja vozlišča 1. Dodatni parameter $\angle 516$ določa položaj vozlišča 6. Obstajata največ dve možni lokaciji vozlišča 9, ki sta določeni s parom vozlišč $\{4, 6\}$. Podobno razmislimo, da obstajata po dva možna položaja za vsako izmed vozlišč 7, 10, 8, določena s pari vozlišč $\{2, 9\}$, $\{5, 7\}$ in $\{3, 10\}$. Graf $G_{23}^* := G(5, 2)^{\{6,8\}}$ je fleksibilen s tremi prostostnimi stopnjami. Omejitev, ki izhaja iz povezave $\{6, 8\}$ dolžine ena, fiksira eno prostostno stopnjo. Petersenov graf ima torej realizacijo z enotsko razdaljo v ravnini, ki je fleksibilna z dvema prostostnima stopnjama.

primer	pravilno barvanje	realizabilen	graf / ovira	tog / \mathcal{D}_G
23.1.	$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{8\}, \{9\}, \{10\}$	da	$G_{23.1}$	ne/2

Tabela 4.22: Primer 23. $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$

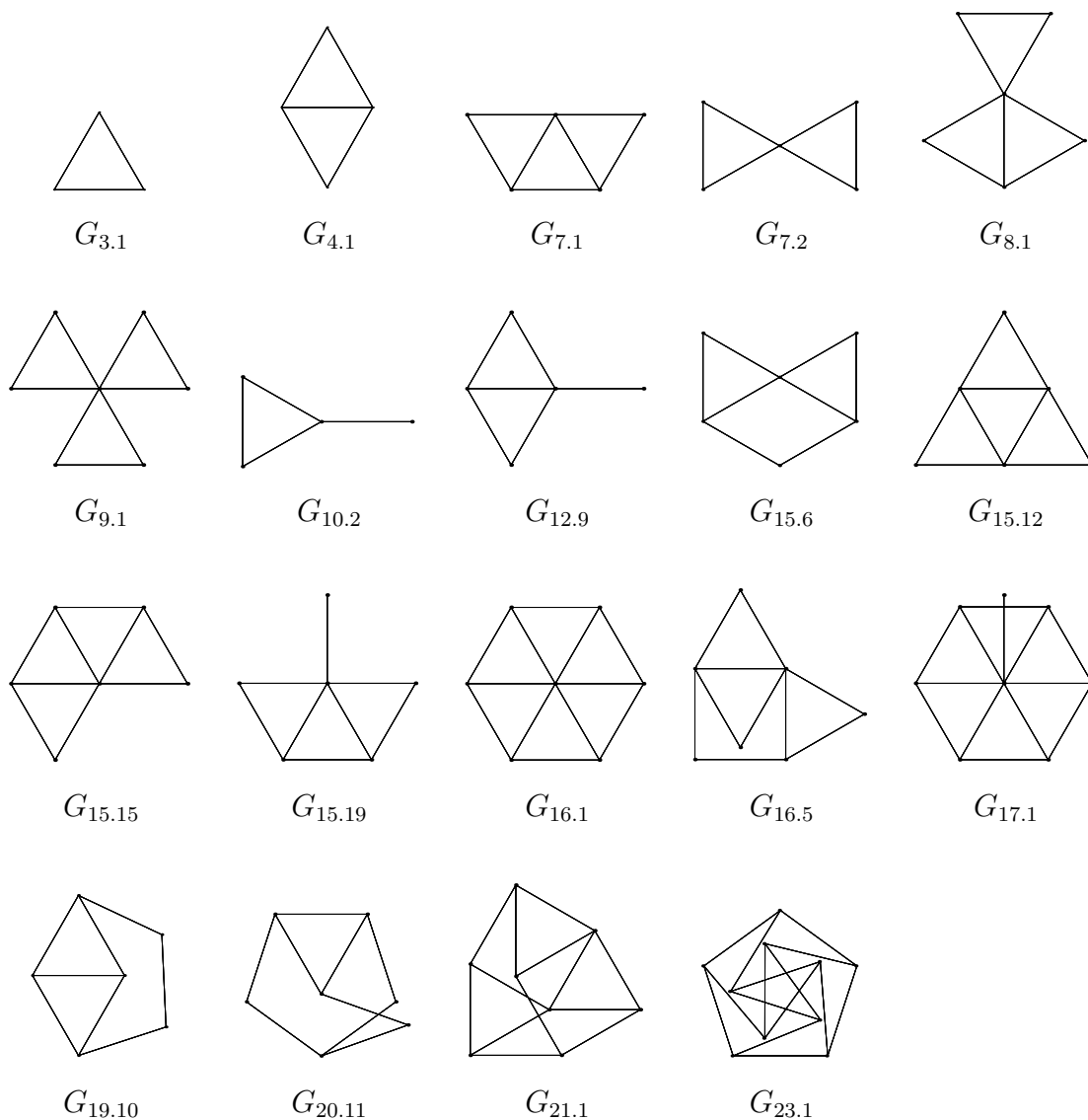
Obstaja torej 22 degeneriranih predstavitev z enotsko razdaljo Petersenovega grafa v ravnini, če upoštevamo število vozlišč, ki jih slikamo v isto točko. Graf $G_{4.1}$ lahko dobimo kar iz treh celoštevilskih razbitij: $\{4, 3, 2, 1\}$, $\{3, 3, 3, 1\}$, $\{3, 3, 2, 2\}$, graf $G_{7.1}$ pa iz celoštevilskih razbitij: $\{4, 2, 2, 1, 1\}$, $\{3, 3, 2, 1, 1\}$, $\{3, 2, 2, 2, 1\}$. Če razlikujemo predstavitve po številu vozlišč, ki so preslikana v isto točko, potem podložen graf $G_{4.1}$ dobimo v štirih primerih, ki so predstavljeni na sliki 4.7.



Slika 4.7: Štiri različne degenerirane toge predstavitve z enotsko razdaljo Petersenovega grafa v ravnini (kot graf $G_{4.1}$). Če upoštevamo le število vozlišč, ki so slikana v isto točko (in ne tudi katera vozlišča so slikana v to točko, potem sta prvi predstavitvi (ki ju dobimo iz celoštevilskega razbitja $\{4, 3, 2, 1\}$) ekvivalentni. Če pa obravnavamo predstavitve le kot risbo in ne upoštevamo podloženega grafa, potem so vse štiri predstavitve ekvivalentne.

Vsaka izmed ostalih 17 predstavitev z enotsko razdaljo v ravnini je določena s celoštevilskim razbitjem. Torej obstaja natanko osemnajst različnih degeneriranih (in ena nedegenerirana) predstavitev z enotsko razdaljo Petersenovega grafa v ravnini, ki jih je mogoče videti

na sliki 4.8. Trinajst predstavitev je fleksibilnih, tri izmed njih celo z dvema prostostnima stopnjama.

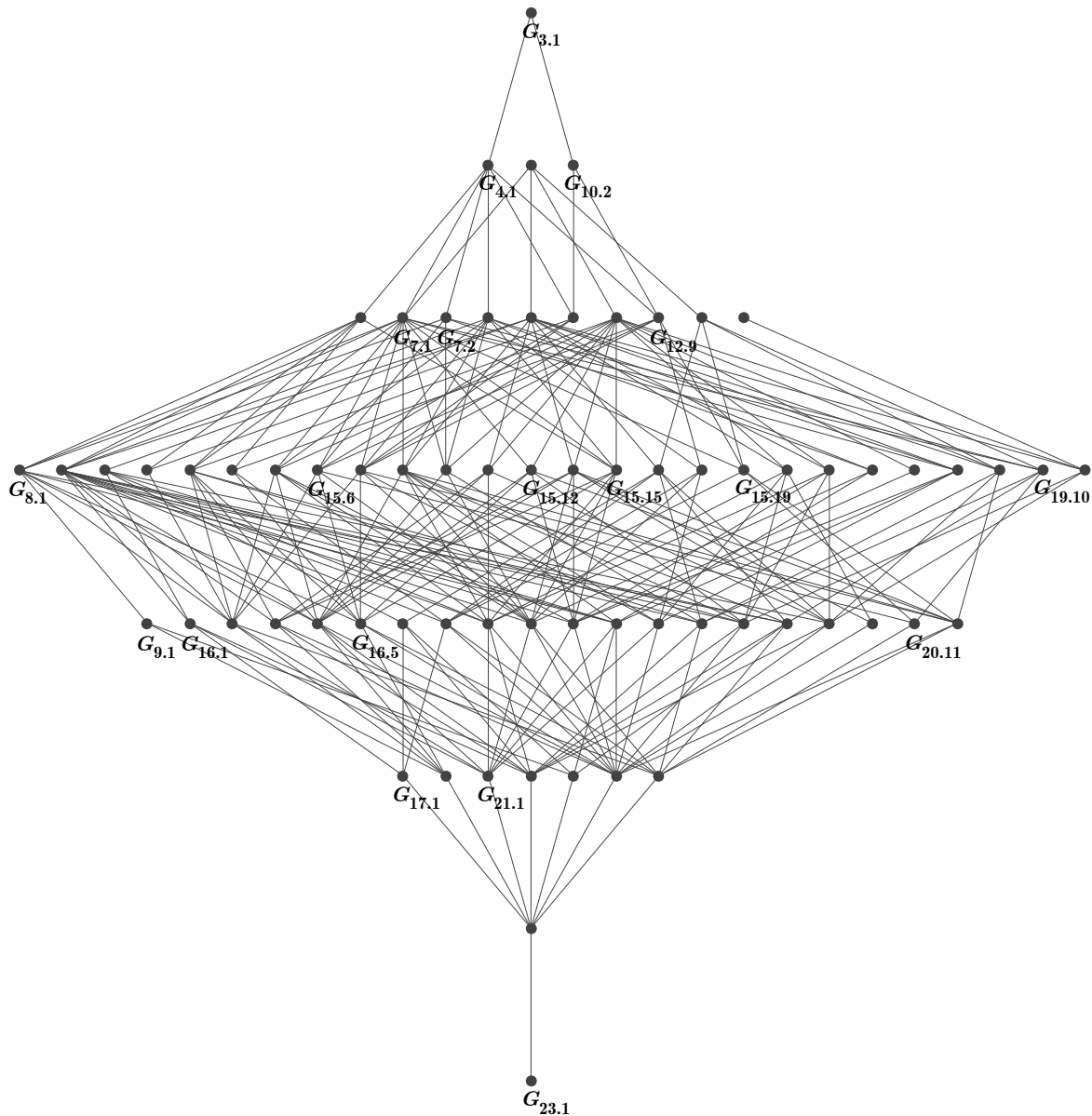


Slika 4.8: Vse različne (degenerirane) predstavitve z enotsko razdaljo Petersenovega grafa $G(5,2)$ v ravnini.

4.3 Relacije med predstavitvami Petersenovega grafa

Epimorfne slike Petersenovega grafa tvorijo delno urejeno množico, ki je rangirana s številom vozlišč epimorfne slike Petersenovega grafa in v kateri je relacija pokritja definirana z identifi-

kacijo dveh nesosednjih vozlišč; glej sliko 4.9.

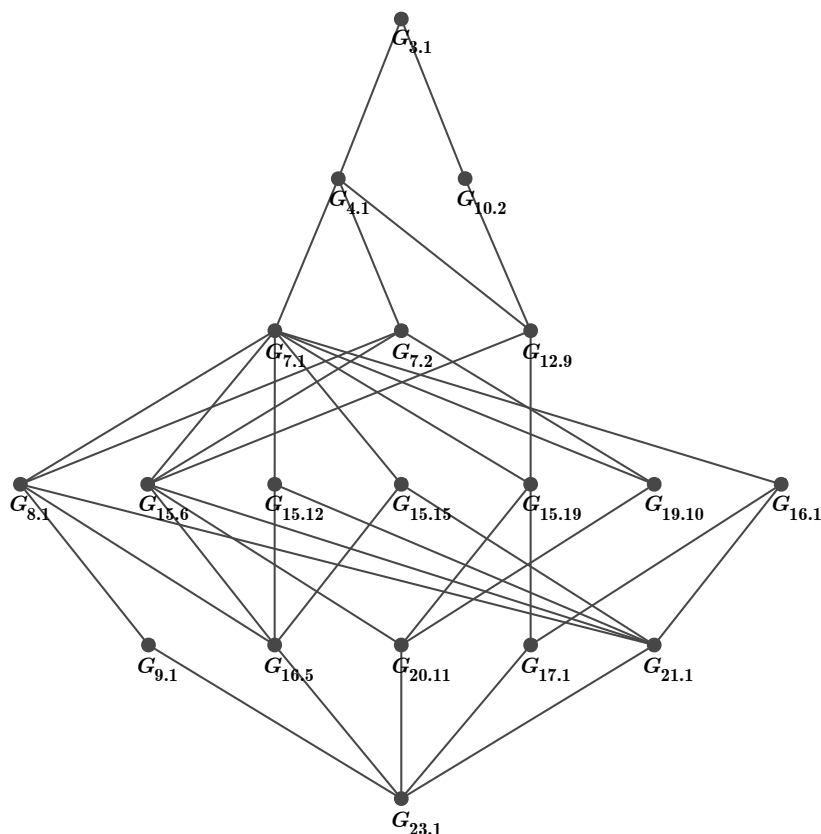


Slika 4.9: Hassejev diagram rangirane delno urejene množice epimorfnih slik Petersenovega grafa. Relacija pokritja je definirana z identifikacijo dveh nesosednjih vozlišč, rang pa je enak številu vozlišč epimorfne slike Petersenovega grafa.

Ko združimo (identificiramo) dve poljubni nesosednji vozlišči Petersenovega grafa $G_{23,1}$ (z desetimi vozlišči), ne dobimo grafa z enotsko razdaljo v ravnini. Edina možnost bi bila graf G_{22} z devetimi vozlišči, ki pa ni graf z enotsko razdaljo. Da bi iz grafa $G_{23,1}$ dobili realizacijo z enotsko razdaljo, $G_{21,1}$ oziroma $G_{17,1}$, potrebujemo torej vsaj dva koraka - dve identifikaciji dveh nesosednjih vozlišč. Podobno dobimo iz grafa $G_{23,1}$ v treh korakih (celo na dva različna

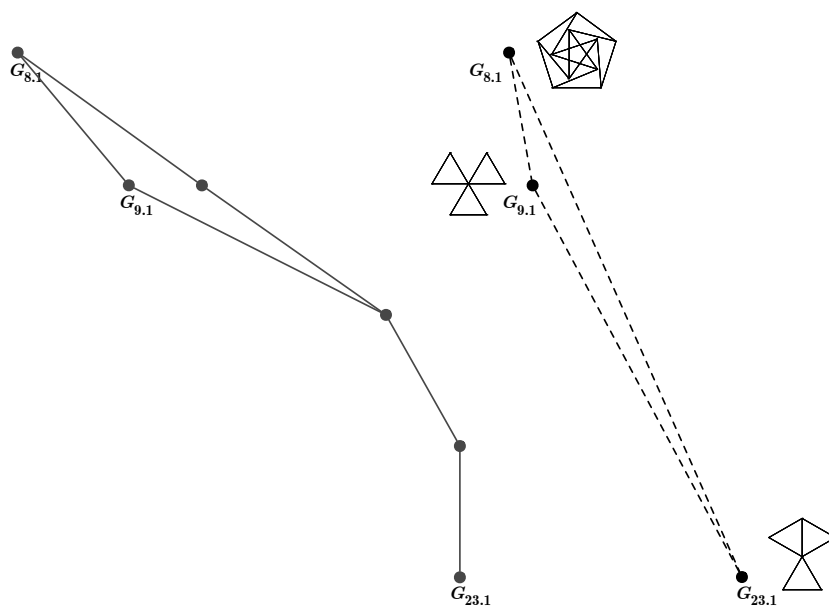
načina) graf $G_{20.11}$ na sedmih vozliščih.

Postavimo si lahko zanimivo vprašanje: “Katere degenerirane predstavitve z enotsko razdaljo dobimo v enem ali več korakih iz dane predstavitve z enotsko razdaljo, če na vsakem koraku identificiramo natanko dve nesosednji vozlišči?”. Po zaključeni analizi predstavitev z enotsko razdaljo Petersenovega grafa v ravnini, lahko za Petersenov graf na to vprašanje odgovorimo, glej sliko 4.10.



Slika 4.10: Hassejev diagram delno urejene množice epimorfnih slik Petersenovega grafa, skrčen na primere, ki imajo realizacijo z enotsko razdaljo v ravnini.

Opozoriti velja, da delno urejena množica izomorfnih razredov epimorfnih slik Petersenovega grafa, omejena na primere, ki imajo realizacijo z enotsko razdaljo v ravnini, ni delno urejena množica, ki je rangirana s številom vozlišč epimorfne slike Petersenovega grafa. Realizacijo z enotsko razdaljo grafa $G_{8.1}$ iz koordinatizacije z enotsko razdaljo grafa $G_{23.1}$ dobimo lahko namreč na dva načina. Prva pot gre preko predstavitve z enotsko razdaljo grafa $G_{9.1}$, druga pa preko treh grafov, ki nimajo predstavitve z enotsko razdaljo, glej sliko 4.11.



Slika 4.11: Dve različni poti med realizacijo z enotsko razdaljo grafa $G_{23,1}$ in predstavitvijo z enotsko razdaljo grafa $G_{8,1}$. Ena vsebuje le grafe, ki imajo le degenerirane predstavitve z enotsko razdaljo v ravnini, druga pa gre preko predstavitve z enotsko razdaljo grafa $G_{9,1}$.

Poglavje 5

I-grafi in enotska razdalja

Naj bosta n in k naravni števili, tako da velja $k \leq \frac{n}{2}$. Pred kratkim sta S. V. Gervacio in I. B. Jos v [39] dokazala izrek 36, ki pravi da ima spoj dveh ciklov dimenzijo največ 6, v skoraj vseh primerih celo največ 5. Za $\gcd(n, k) = 1$ je vsak posplošeni Petersenov graf $G(n, k)$ podgraf spoja dveh n -ciklov, zato poda njun rezultat zgornjo mejo za dimenzijo poddružine posplošenih Petersenovih grafov. To zgornjo mejo pa lahko za veliko poddružino I-grafov bistveno izboljšamo. V tem poglavju bomo predstavili predstavitve z rotacijsko simetrijo in pokazali, da je dimenzija velike večine I-grafov enaka 2. Postavili bomo domnevo, da je dimenzija poljubnega I-grafa enaka 2 in jo preverili za vse I-grafe na največ 2000 vozliščih. Predstavili bomo rezultate povezane z visoko degeneriranimi predstavitvami z enotsko razdaljo ter koordinatizacijami z enotsko razdaljo, ki so bili dobljeni s pomočjo računalnika in preverjeni na množici vseh I-grafov $I(n, j, k)$ za $n \leq 1000$.

5.1 Posplošeni Petersenovi grafi

Naj bodo n, j in k naravna števila. Opazimo, da je posplošeni Petersenov graf $G(n, k)$ izomorfen grafu $G(n, n - k)$ in da graf $G(n, \frac{n}{2})$ ni enostaven. Zato se lahko za $n \geq 3$ osredotočimo le na grafe $G(n, k)$ kjer je $k < \frac{n}{2}$. Za $n < 3$ definiramo dve izjemi: $G(1, 1)$ and $G(2, 1)$. Enostavno je premisliti, da je vsak posplošeni Petersenov graf povezan.

Posledica 98. *Naj bosta n in k naravni števili, tako da velja $k < \frac{n}{2}$ in naj bo $G(n, k)$ posplošeni Petersenov graf. Potem je*

$$2 \leq \dim(G(n, k)) \leq 6.$$

Dokaz. Vsak posplošeni Petersenov graf vsebuje cikel z dimenzijo 2, zato ima tudi sam dimenzijo vsaj 2; s tem smo dobili spodnjo mejo. Vsak posplošeni Petersenov graf $G(n, k)$ je 3-regularen, zato po izreku 63 velja $\dim(G(n, k)) \leq e(G(n, k)) \leq 2 * 3 = 6$. \square

P. Erdős, F. Harary in W. T. Tutte so v [33] uporabili predstavitev Petersenovega grafa $G(5, 2)$, ki so jo dobili tako, da so v dobro znani predstavitvi na sliki 1.1 notranjo zvezdo zrotirali (in hkrati raztegnili) glede na fiksno predstavitev zunanega cikla, tako da so postale špice dolge ena; glej sliko 4.1 (a). Njihovi predstavitvi v evklidski ravnini bomo rekli *predstavitev z zasukom* oziroma kar *zasuk*. Podobno idejo z zasukom je uporabil S. W. Golomb, ko je narisal Golombov graf; glej [108] in sliko 1.5. Zasuk sta uporabila tudi F. Buckley in F. Harary v [12], ko sta opazovala kolesa.

Znano je, da ima Petersenov graf $G(5, 2)$ koordinatizacijo z enotsko razdaljo v ravnini, glej izrek 42. Slika 5.1 za $n > 5$ prikazuje vseh 12 posplošenih Petersenovih grafov $G(n, k)$ z nedegenerirano predstavitvijo z enotsko razdaljo v ravnini, ki smo jo dobili z zasukom: Dürerjev graf $G(6, 2)$, $G(7, 2)$, $G(7, 3)$, $G(8, 2)$, Möbius-Kantorjev graf $G(8, 3)$, $G(9, 2)$, $G(9, 3)$, $G(9, 4)$, Dodekaeder $G(10, 2)$, Desarguesov graf $G(10, 3)$, $G(11, 2)$ and $G(12, 2)$. Nekatere realizacije z enotsko razdaljo na sliki 5.1 niso koordinatizacije: $G(9, 2)$, $G(9, 4)$, $G(12, 2)$.

Lema 99. *Naj bosta $n < 10$ in $k < \frac{n}{2}$ naravni števili. Posplošeni Petersenov graf $G(n, k)$ je graf z enotsko razdaljo.*

Dokaz. Glej sliko 5.1. \square

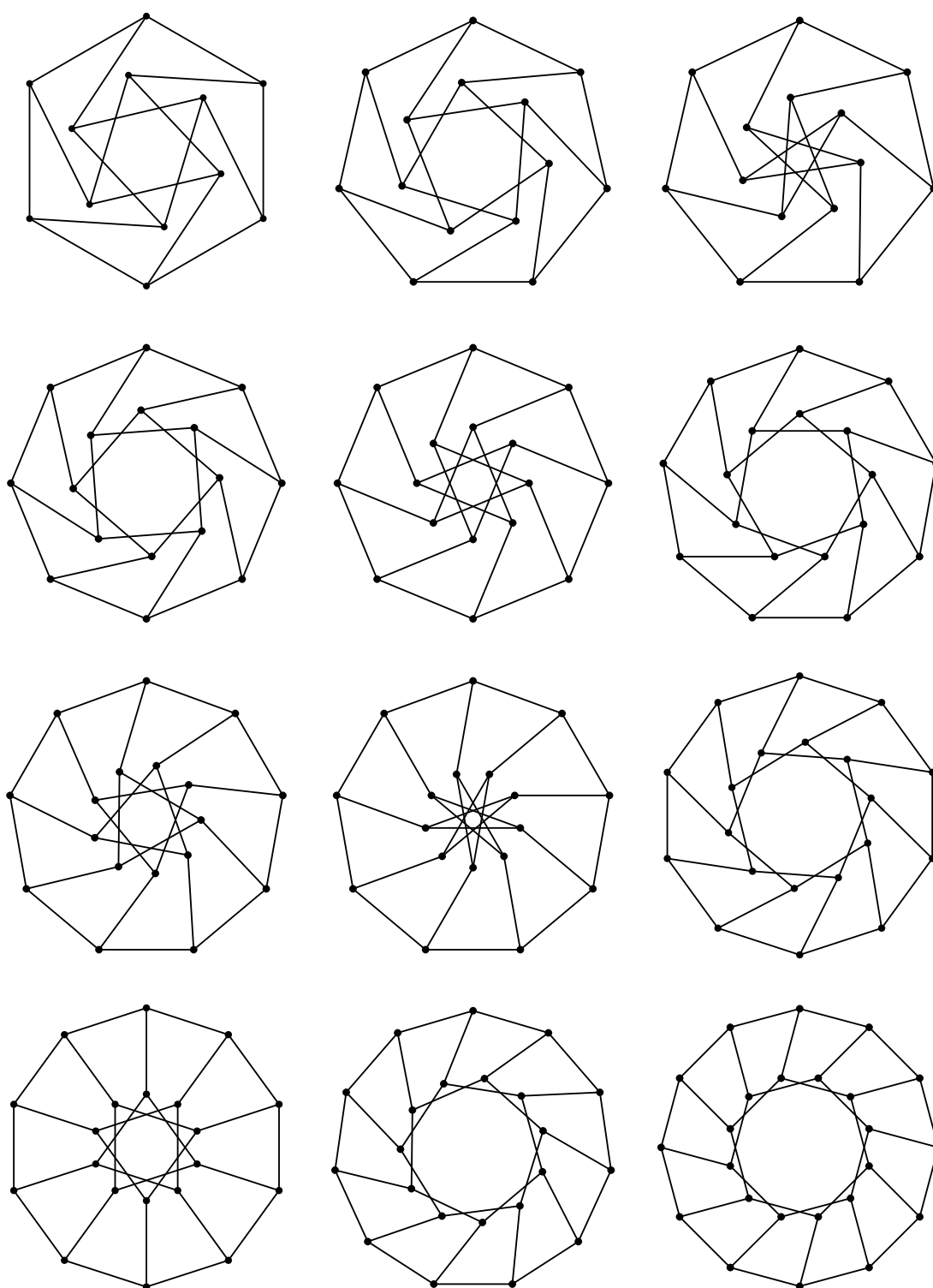
Posledica 100. *Znani posplošeni Petersenovi grafi: Dürerjev graf $G(6, 2)$, Dodekaeder $G(10, 2)$ in Desarguesov graf $G(10, 3)$ imajo enotsko koordinatizacijo v ravnini.*

Po drugi strani pa uporaba zasuka ne pomaga pri risanju posplošenega Petersenovega grafa $G(10, 4)$, zato je njegova dimenzija lahko večja kot 2.

Posledica 101. *Naj bosta n in k tuji naravni števili, tako da velja $k < \frac{n}{2}$ in naj bo $G(n, k)$ posplošeni Petersenov graf. Potem je*

$$\dim(G(n, k)) \leq 5.$$

Dokaz. Za $n < 10$ uporabimo prejšnjo lemo. Naj bo torej $n \geq 10$. Hitro je mogoče preveriti, da za vsako naravno število $n > 6$ obstaja naravno število $\frac{n}{4} < t < \frac{n}{2}$, ki je tuje z n . Ker je n tuje s k , je notranja zvezda sestavljena iz enega cikla z n vozlišči. Opazimo, da je posplošeni Petersenov graf $G(n, k)$ podgraf spoja dveh ciklov $C_n + C_n$. Iz izreka 36 o evklidski dimenziji spoja dveh ciklov za $n, k \neq 6$ sledi $\dim(G(n, k)) \leq \dim(C_n + C_n) \leq e(C_n + C_n) \leq 5$. \square



Slika 5.1: Vsi posplošeni Petersenovi grafi $G(n, k)$ za $n > 5$, ki jih lahko dobimo z zasukom. Iz leve proti desni od zgoraj navzdol so: $G(6, 2)$, $G(7, 2)$, $G(7, 3)$, $G(8, 2)$, $G(8, 3)$, $G(9, 2)$, $G(9, 3)$, $G(9, 4)$, $G(10, 2)$, $G(10, 3)$, $G(11, 2)$ in $G(12, 2)$.

Naslednja lema nam pove, da lahko zgornjo mejo za dimenzijo v primeru ko sta n in k tuji naravni števili še dodatno izboljšamo.

Lema 102. *Naj bosta n in k tuji naravni števili, tako da velja $k < \frac{n}{2}$ in naj bo $G(n, k)$ posplošeni Petersenov graf. Potem je*

$$\dim(G(n, k)) \leq 3.$$

Dokaz. Dokaz bo konstruktivne narave. Ker sta n in k tuji naravni števili, je $\gcd(n, k) \neq 1$. Notranja “zvezda” je sestavljena iz $g := \gcd(n, k)$ ločenih ciklov s po $m := \frac{n}{g}$ vozlišči, zunanji cikel pa je en sam. Na krožnico S z radijem

$$r := \frac{1}{2 \sin \frac{\pi k}{gm}}$$

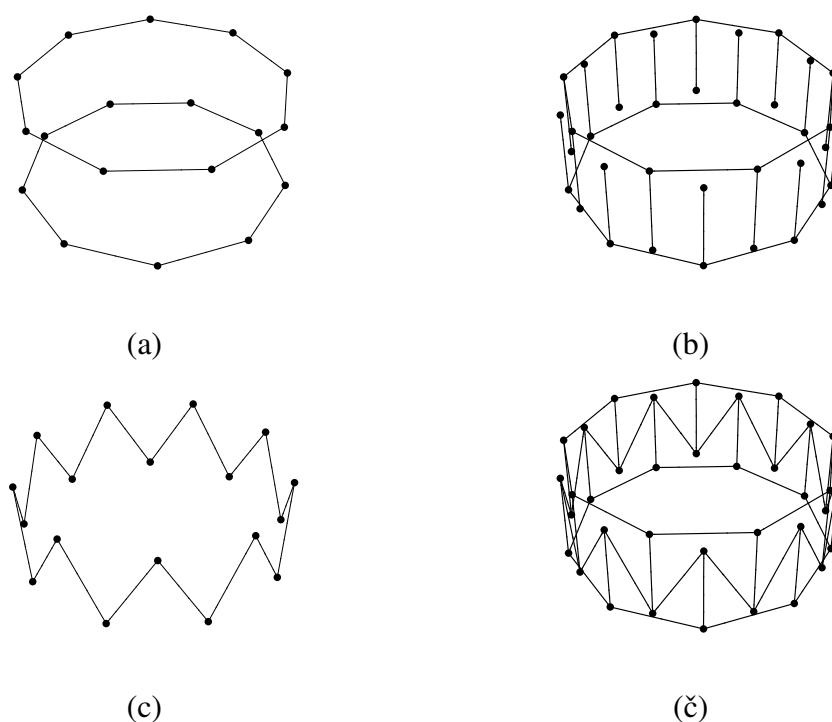
postavimo n točk, tako da so med sabo enako oddaljene. Vsakega izmed g ciklov predstavimo kot zvezdni večkotnik $\rho^*(m, \frac{k}{g})$ na krožnici S . S tem dobimo enotsko koordinatizacijo posameznega m -cikla in hkrati tudi enotsko koordinatizacijo disjunktne unije vseh ciklov; glej na primer sliko 5.2 (a). Predstavitvi vsakega cikla priredimo svoj nivo (različne z -koordinate).

V vsako izmed vozlišč (x_i, y_i, z_i) v m -ciklu obesimo špico (privesek), tako da eno vozlišče špice postavimo v točko (x_i, y_i, z_i) , drugo pa v $(x_i, y_i, z_i - 1)$; glej sliko 5.2 (b).

Zunanji n -cikel bomo “prepletli” v \mathbb{R}^3 tako, da bo nanj mogoče obesiti zvezdne večkotnike s priveski. Vsa vozlišča zunanjega cikla najprej postavimo na krožnico S z radijem r in središčem v izhodišču $\vec{0}$ tako, da je z -koordinata enaka 0. Naj bo $\varepsilon > 0$ poljubno majhno pozitivno število in naj bo $0 \leq i \leq m - 1$ naravno število. Z $w_{i, g+1}$ označimo krajišča priveškov s stopnjo ena, ki so pripeta na zaporedna vozlišča notranjega m -cikla z najnižnim nivojem, z u_j , kjer je $1 \leq j \leq n$ pa vozlišča zunanjega cikla. Indekse beremo po modulu n .

Med $u_{i, g+1}$ in $u_{(i+1), g+1}$ poteka v $G(n, k)$ pot $P_i := u_{i, g+1} \sim \dots \sim u_{(i+1), g} \sim u_{(i+1), g+1}$, ki poteka le po zunanjem ciklu. Očitno je, da je pot P_{i+1} nadaljevanje poti P_i in da imata poti P_{i+1} in P_i skupno le vozlišče $u_{(i+1), g+1}$. Ločimo primera, ko je g sodo oziroma liho število.

- Če je g sodo število naredimo v predstavitvi poti P_i najprej $\frac{g}{2}$ korakov navzgor, nato pa $\frac{g}{2}$ korakov navzdol; spreminjamo le z -koordinate predstavitev vozlišč, tako da so povezave, ki jih dobimo, dolge ena. Postopek nadaljujemo za vseh m “zobov” zunanjega cikla; glej sliko 5.2 (c).
- Če je g liho število v predstavitvi poti P_i najprej naredimo $\frac{g-1}{2}$ korakov navzgor, nato $\frac{g-3}{2}$ korakov navzdol, na koncu pa med zadnje že postavljeno vozlišče $u_{(i+1), g-1}$ poti P_i



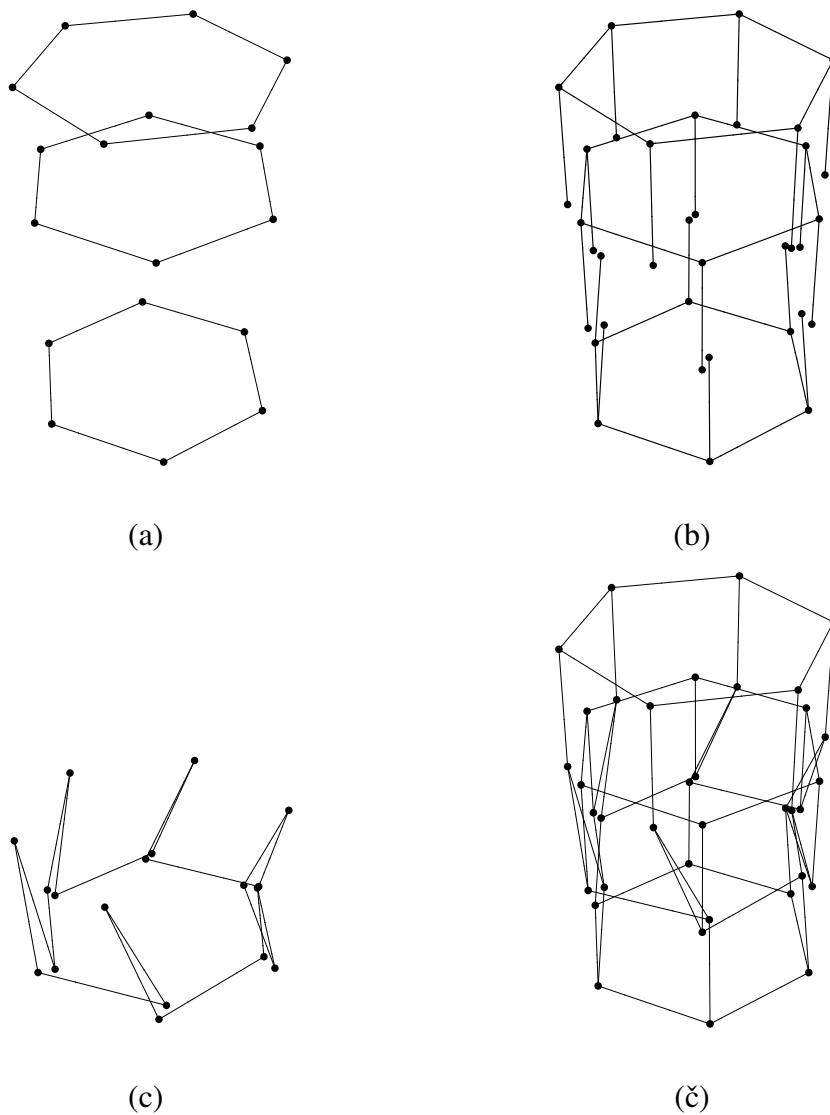
Slika 5.2: Štirje koraki konstrukcije 3-razsežne realizacije z enotsko razdaljo grafa $G(18, 2)$: (a) realizaciji obeh 9-ciklov v obliki zvezdnih večkotnikov $\rho^*(9, 1)$, (b) na zvezdna večkotnika pripnemo špice, (c) realizacija zunanjega cikla in (č) 3-razsežna realizacija z enotsko razdaljo grafa $G(18, 2)$.

in med zadnje vozlišče $u_{(i+1)g+1}$ poti P_i dodamo še vozlišče $u_{(i+1)g}$ tako, da $u_{(i+1)g}$ leži na krožnici z radijem $r - \varepsilon$ s središčem v izhodišču in je ena oddaljeno od $u_{(i+1)g-1}$ in $u_{(i+1)g+1}$. Postopek nadaljujemo za vseh m “zobov” zunanjega cikla; glej sliko 5.3 (c).

Notranje cikle s priveski pripnemo na zunanji cikel. Prvo polovico pripnemo na nivo, ki je ena nižje od vozlišč zunanjega cikla na katera pripenjamo trenutni notranji cikel; glej sliko 5.2 (č). Drugo polovico pa pripnemo na nivo, ki je ena višje od nivoja vozlišč zunanjega cikla kamor pripenjamo. Če je g lih, “posebni primer” zadnjega cikla pripnemo na nivo, ki je ena nižje od najnižjega nivoja zunanjega cikla; glej sliko 5.3 (č).

Predlagana predstavitev z enotsko razdaljo ni toga; visoko degeneriranim primerom se lahko izognemo, saj imamo dovolj prostostnih stopenj. Že z rotacijo špic glede na fiksiran zunanji cikel, ob pogoju, da so zvezdni večkotniki vzporedni ravnini $z = 0$, imamo neskončno možnih kotov rotacij. Dobili smo 3-razsežno realizacijo z enotsko razdaljo.

Naj bo W valj, ki je napet na krožnici S z radijem r in s središčem v izhodišču $\vec{0}$. V sodem primeru ležijo vsa vozlišča na obodu valja W , v lihem primeru pa leži natanko m vozlišč

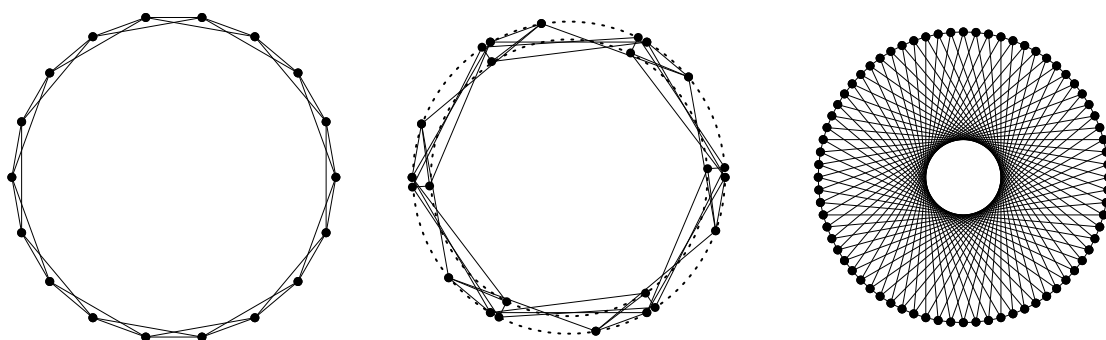


Slika 5.3: Štirje koraki konstrukcije 3-razsežne realizacije z enotsko razdaljo grafa $G(18, 3)$: (a) realizacije treh 6-ciklov v obliki zvezdnih večkotnikov $\rho^*(6, 1)$, (b) na zvezdne večkotnike priprnemo špice, (c) realizacija zunanjega cikla in (č) 3-razsežna realizacija z enotsko razdaljo grafa $G(18, 3)$.

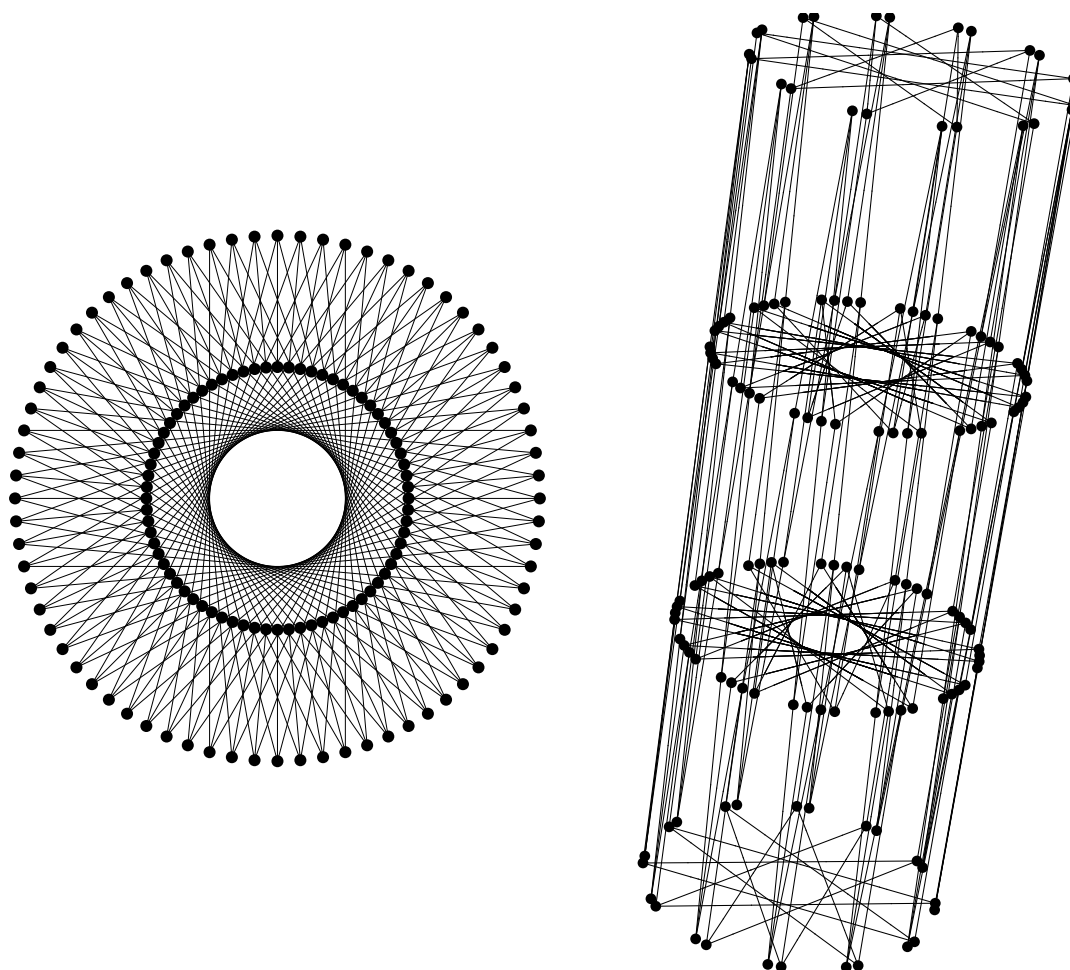
zunanega cikla znotraj valja W , vsa ostala vozlišča pa na obodu valja W ; glej sliko 5.4. \square

Posledica 103. Posplošeni Petersenovi grafi $G(n, 1)$ so grafi z enotsko koordinatizacijo.

Dokaz. Naj bo $n \geq 3$. Grafi $G(n, 1)$ so ravno n -strane prizme, ki jih dobimo kot kartezični produkt cikla C_n in povezave; glej posledico 86. \square



Slika 5.4: Pogled od zgoraj na 3-razsežne realizacije z enotsko razdaljo posplošenih Petersenovih grafov: (a) $G(18, 2)$, (b) $G(18, 3)$ in (c) $G(72, 30)$. Ko je $\gcd(n, k)$ sodo število, so vsa vozlišča na obodu valja, ko pa je $\gcd(n, k)$ liho leži $n - \frac{n}{\gcd(n, k)}$ vozlišč na obodu valja, ostalih $\frac{n}{\gcd(n, k)}$ vozlišč pa na krožnici znotraj tega valja.



Slika 5.5: (a) Posplošeni Petersenov graf $G(72, 30)$ je (b) graf s 3-razsežno realizacijo z enotsko razdaljo.

5.2 I-grafi

I-grafi, ki so bili predstavljeni v [35] naravno posplošujejo družino posplošenih Petersenovih grafov [115]. V [9] so M. Boben, T. Pisanski in A. Žitnik obravnavali potrebne in zadostne pogoje za preverjanje ali sta dva I-grafa izomorfna ali ne. I-grafe so klasificirali glede na ožino, dvodelnost in grupo automorfizmov. Enostavno je mogoče preveriti, da je I-graf $I(n, j, k)$ izomorfen I-grafom $I(n, k, j)$, $I(n, n-j, k)$, $I(n, j, n-k)$ in $I(n, n-j, n-k)$. Grafa $I(n, j, \frac{n}{2})$ in $I(n, \frac{n}{2}, k)$ nista enostavna. Zato bomo (če ni eksplicitno omenjeno drugače) obravnavali le I-grafe $I(n, j, k)$, za katere velja $n \geq 3$ in $1 \leq j \leq k < \frac{n}{2}$. V netrivialnih primerih, ko je $n \geq 3$, I-graf $I(n, j, k)$ vsebuje vsaj en cikel z vsaj tremi vozlišči; torej velja $2 \leq \dim(I(n, j, k)) \leq e(I(n, j, k))$.

Očitno je, da velja $G(n, k) = I(n, 1, k)$, zato družina I-grafov vsebuje družino posplošenih Petersenovih grafov. Nekateri I-grafi, ki so hkrati posplošeni Petersenovi grafi pa imajo lahko tudi drugačno obliko; glej trditev 104 in sliko 5.8 (b).

Trditev 104 ([9]). *I-graf $I(n, j, k)$ je posplošeni Petersenov graf če in samo če velja $\gcd(n, j) = 1$ ali $\gcd(n, k) = 1$. Ko je $\gcd(n, j) = 1$ je $I(n, j, k) = G(n, r)$, kjer je r rešitev enačbe $k \equiv r j \pmod{n}$.*

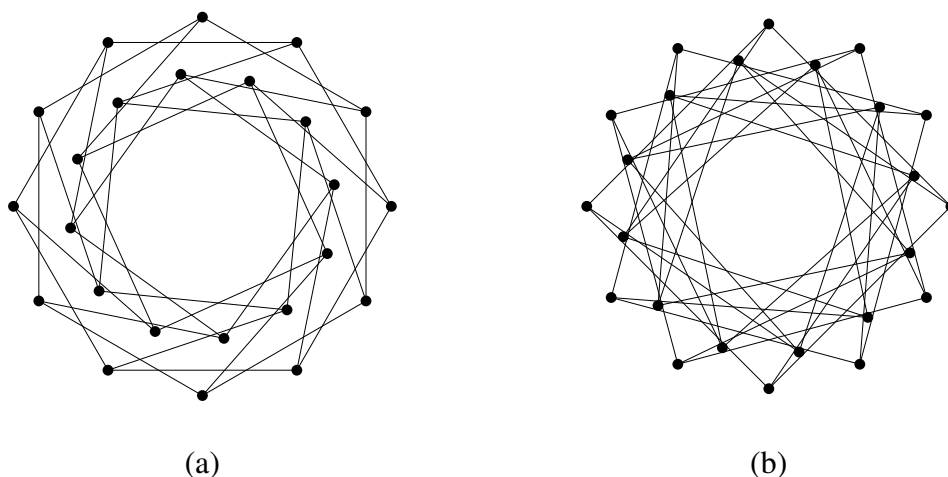
Naslednji dve trditvi in izrek so bili dokazani v [9].

Trditev 105 ([9]). *I-graf $I(n, j, k)$ je povezan če in samo če velja $\gcd(n, j, k) = 1$. Takrat ko je $\gcd(n, j, k) = d > 1$ je I-graf $I(n, j, k)$ sestavljen iz d kopij I-grafov $I(\frac{n}{d}, \frac{j}{d}, \frac{k}{d})$.*

Trditev 106 ([9]). *Naj bodo n, r in s pozitivna cela števila, tako da velja $s \not\equiv \pm r \pmod{n}$. Potem je posplošeni Petersenov graf $G(n, r)$ izomorfen posplošenemu Petersenovemu grafu $G(n, s)$ če in samo če velja $r s \equiv \pm 1 \pmod{n}$.*

Izrek 107 ([9]). *Naj bodo n, j, k in a pozitivna cela števila, tako da velja $\gcd(n, j, k) = 1$ in $\gcd(n, a) = 1$. Potem je I-graf $I(n, a j, a k)$ izomorfen I-grafu $I(n, j, k)$.*

I-graf ki je povezan in ni izomorfen nobenemu posplošenemu Petersenovemu grafu bomo tako kot v [9] poimenovali *pravi I-graf*. Glede na število vozlišč sta najmanjša prava I-grafa $I(12, 2, 3)$ in $I(12, 3, 4)$, ki sta prikazana na sliki 5.6. Ker ima vsak pravi I-graf dve vozliščni orbiti in tri povezavne orbite, ni noben pravi I-graf niti vozliščno niti povezavno tranzitiven; glej [9].



Slika 5.6: I-grafa $I(12, 2, 3)$ (a) in $I(12, 3, 4)$ (b) sta najmanjša prava I-grafa. Na sliki sta realizirana z enotsko razdaljo v evklidski ravnini.

Izrek 108 ([9]). Naj bodo n, j, k, j' in k' pozitivna cela števila, kjer je $\gcd(j, k) = \gcd(j', k') = 1$, $\gcd(n, j) = \gcd(n, j') \neq 1$ in $\gcd(n, k) = \gcd(n, k') \neq 1$. Potem sta I-grafa $I(n, j, k)$ in $I(n, j', k')$ izomorfna, če in samo če $k j' \equiv \pm k' j \pmod{n}$.

Izrek 109, ki za povezane I-grafe razširja izrek 108 dokazan v [9], bomo uporabili pri potrditvi (s pomočjo računalnika) domneve obstoja nedegenerirane predstavitve z enotsko razdaljo za veliko poddružino I-grafov; glej domnevo 1.

Izrek 109 ([64]). Naj bodo j, k, j_1, k_1 in n pozitivna cela števila, tako da velja

$$\gcd(n, j, k) = \gcd(n, j_1, k_1) = 1.$$

Potem je I-graf $I(n, j, k)$ izomorfen I-grafu $I(n, j_1, k_1)$ natanko takrat, ko obstaja celo število a tuje z n za katerega velja

$$\{j_1, k_1\} = \{a j \pmod{n}, a k \pmod{n}\} \text{ ali } \{j_1, k_1\} = \{a j \pmod{n}, -a k \pmod{n}\}.$$

Dokaz. Opazimo najprej, da iz $\gcd(n, j, k) = \gcd(n, j_1, k_1) = 1$ sledi da sta oba I-grafa povezana. Če velja $\{j_1, k_1\} = \{a j \pmod{n}, \pm a k \pmod{n}\}$, potem sta I-grafa $I(n, j, k)$ in $I(n, j_1, k_1)$ izomorfna; upoštevamo izrek 107 in dejstvo, da so med seboj izomorfni tudi I-grafi $I(n, j, k)$, $I(n, j, -k)$ in $I(n, k, j)$.

Poskusimo dokazati še v drugo smer. Recimo, da sta I-grafa $I(n, j, k)$ in $I(n, j_1, k_1)$ izomorfna. Poiskati moramo celo število a , tuje z n , tako da velja $\{j_1, k_1\} = \{a j \pmod{n}, \pm a k \pmod{n}\}$.

Najprej razmislimo o situaciji, kjer sta oba I-grafa posplošena Petersenova grafa. Po trditvi 104 je vsaj eno število j, k tuje z n . Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je to število j . Podobno lahko privzamemo, da je tudi j_1 tuje z n . Po trditvi 104 obstaja enolično število $r \pmod{n}$ in enolično število $r_1 \pmod{n}$, tako da velja $k \equiv r j \pmod{n}$ in $k_1 \equiv r_1 j_1 \pmod{n}$. Ker sta j in j_1 tuji z n , obstajata (modularna) multiplikativna inverza j^{-1} števila j in j_1^{-1} števila j_1 , oba po modulu n , da velja

$$r \equiv k j^{-1} \pmod{n} \text{ in } r_1 \equiv k_1 j_1^{-1} \pmod{n}. \quad (5.1)$$

Upoštevamo trditev 106; posplošena Petersenova grafa $G(n, r)$ in $G(n, r_1)$ sta izomorfna v enem izmed štirih možnih primerov: $r_1 = \pm r \pmod{n}$ ali $r r_1 = \pm 1 \pmod{n}$.

- Privzemimo najprej da velja $r_1 = r$. Po (5.1) velja $k_1 j_1^{-1} \equiv k j^{-1} \pmod{n}$, torej lahko pišemo $k_1 \equiv k (j^{-1} j_1) \pmod{n}$. Podobno velja $j_1 \equiv j (j^{-1} j_1) \pmod{n}$. Naj bo $a := j^{-1} j_1 \pmod{n}$. Ker sta obe števili j^{-1} in j_1 tuji z n , je tudi njun produkt $a = j^{-1} j_1 \pmod{n}$ tuj z n . Dobili smo $j_1 = a j \pmod{n}$ in $k_1 = a k \pmod{n}$. Primer $r_1 = -r$ premislimo podobno; edina razlika je v tem, da velja $k_1 \equiv -k (j^{-1} j_1) \pmod{n}$ in zato velja $k_1 = -a k \pmod{n}$.
- Privzemimo sedaj da velja $r r_1 \equiv 1 \pmod{n}$. Potem sta r in r_1 tuji z n in zato je tudi $k_1 \equiv r_1 j_1 \pmod{n}$ tuje z n . Po (5.1) velja $k j^{-1} k_1 j_1^{-1} \equiv 1 \pmod{n}$, torej velja $j_1 \equiv k (j^{-1} k_1) \pmod{n}$. Velja tudi $k_1 \equiv j (j^{-1} k_1) \pmod{n}$. Zato lahko definiramo celo število $a := j^{-1} k_1 \pmod{n}$, za katerega enostavno preverimo da je tuje z n . Dobimo $j_1 = a k \pmod{n}$ in $k_1 = a j \pmod{n}$. Primer $r r_1 \equiv -1 \pmod{n}$ premislimo podobno; edina razlika je v tem, da velja $j_1 \equiv -k (j^{-1} k_1) \pmod{n}$ in zato je $j_1 = -a k \pmod{n}$.

Naj bosta sedaj oba I-grafa prava I-grafa. Najprej bomo pokazali, da je dovolj da dokažemo situacijo kjer je $\gcd(j, k) = \gcd(j_1, k_1) = 1$. Če velja $c := \gcd(j, k) \neq 1$ in/ali $c_1 := \gcd(j_1, k_1) \neq 1$, potem lahko opazujemo I-grafa $I(n, j/c, k/c)$ in $I(n, j_1/c_1, k_1/c_1)$, ki sta po izreku 107 izomorfna I-grafoma $I(n, j, k)$ in $I(n, j_1, k_1)$. Če nam uspe pokazati $\{j_1/c_1, k_1/c_1\} = \{a' j/c \pmod{n}, \pm a' k/c \pmod{n}\}$ za a' tuje z n , potem velja tudi $\{j_1, k_1\} = \{a j \pmod{n}, \pm a k \pmod{n}\}$ za $a := a' c_1 c^{-1} \pmod{n}$ in je a tuje z n . Privzamemo lahko torej da velja $\gcd(j, k) = \gcd(j_1, k_1) = 1$.

V [9] je bilo dokazano, da pravi I-grafi niso niti vozliščno niti povezavno tranzitivni; vendar pa je očitno, da pod delovanjem grupe avtomorfizmov obstajata le dve orbiti vozlišč. Poljubni izomorfizem med dvema I-grafoma slika orbito prvega v orbito drugega I-grafa. Vozlišča

prve orbite in povezave med njimi tvorijo disjunktno cikle; njihovo število se mora ujemati s številom ciklov na pripadajoči orbiti drugega I-grafa. Torej lahko privzamemo, da velja $\gcd(n, j) = \gcd(n, j_1) = n_j$ in $\gcd(n, k) = \gcd(n, k_1) = n_k$, kjer sta $n_j, n_k \neq 1$ (če je potrebno, zamenjamo vlogi števil j_1 in k_1).

Zaradi lažjega pisanja definirajmo $j = j' n_j$, $j_1 = j'_1 n_j$, $k = k' n_k$ in $k_1 = k'_1 n_k$. Opazimo da velja $\gcd(n_j, n_k) = 1$, zato lahko pišemo $n = n' n_j n_k$. Definirajmo $x := k'^{-1} \pmod{n' n_j}$, $y := k'_1 x \pmod{n' n_j}$ in $z := j'^{-1} \pmod{n' n_k}$. Upoštevamo izrek 108, zato velja $j_1 k \equiv \pm k_1 j \pmod{n}$. Premislimo najprej situacijo, ko velja $j_1 k \equiv k_1 j \pmod{n}$. Takrat je

$$\begin{aligned} j_1 k &\equiv k_1 j \pmod{n}, \\ j_1 k' n_k &\equiv k'_1 n_k j \pmod{n' n_j n_k}, \\ j_1 &\equiv j (k'_1 x) \pmod{n' n_j}, \\ j_1 &\equiv j y \pmod{n' n_j}. \end{aligned}$$

Torej obstaja celo število A za katerega velja $j_1 = j y + A n' n_j$. Radi bi našli celo število a tuje z n , tako da je $j_1 \equiv a j \pmod{n}$ in $k_1 \equiv a k \pmod{n}$. Radi bi torej našli celi števili P in Q , tako da a zadošča spodnjima enakostima (5.2) in (5.3);

$$\begin{aligned} k_1 &\equiv a k \pmod{n}, \\ k'_1 n_k &\equiv a k' n_k \pmod{n' n_j n_k}, \\ k'_1 &\equiv a k' \pmod{n' n_j}, \\ a &\equiv k'_1 x \pmod{n' n_j}, \\ a &= k' x + P n' n_j \end{aligned} \tag{5.2}$$

in

$$\begin{aligned} j_1 &\equiv a j \pmod{n}, \\ j y + A n' n_j &\equiv a j \pmod{n}, \\ j' n_j y + A n' n_j &\equiv a j' n_j \pmod{n' n_j n_k}, \\ y + A n' z &\equiv a \pmod{n' n_k}, \\ a &= y + A n' z + Q n' n_k. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Izenačimo (5.2) in (5.3) in pišemo

$$\begin{aligned} k'_1 x + P n' n_j &= y + A n' z + Q n' n_k, \\ P n' n_j &= A n' z + Q n' n_k, \end{aligned}$$

oziroma $P n_j - Q n_k = A z$. Ker je $\gcd(n_j, n_k) = 1$ ima ta enačba celoštevilski rešitvi P in Q . Torej obstaja celo število a za katerega velja $j_1 \equiv a j \pmod{n}$ in $k_1 \equiv a k \pmod{n}$. Preostane nam le še, da pokažemo, da je a tuje z n . Privzemimo, da je $\gcd(n, a) = n_a \neq 1$. Pišemo lahko $n = n_a n''$, $a = n_a a''$ in

$$\gcd(n, j_1, k_1) = \gcd(n, a j, a k) = \gcd(n_a n'', n_a a'' j, n_a a'' k) = n_a \neq 1,$$

kar je v protislovju s predpostavko $\gcd(n, j_1, k_1) = 1$. Torej je $\gcd(n, a) = 1$.

V primeru ko je $j_1 k \equiv -k_1 j \pmod{n}$ razmislimo podobno; vendar, ker velja $j_1 = -j y \pmod{n' n_j}$, moramo takrat pisati $k_1 = -a k$. \square

Izrek 110 ([64]). Naj bodo j, k, j_1, k_1 in n pozitivna cela števila, tako da velja $\gcd(n, j, k) = d$ in $\gcd(n, j_1, k_1) = d_1$. Če velja $d \neq d_1$ potem I-grafa $I(n, j, k)$ in $I(n, j_1, k_1)$ nista izomorfna. V nasprotnem primeru je I-graf $I(n, j, k)$ izomorfen I-grafu $I(n, j_1, k_1)$ natanko takrat, ko obstaja celo število a tuje z $\frac{n}{d}$, za katerega velja

$$\{j_1, k_1\} = \{a j \pmod{n}, a k \pmod{n}\} \text{ ali } \{j_1, k_1\} = \{a j \pmod{n}, -a k \pmod{n}\}.$$

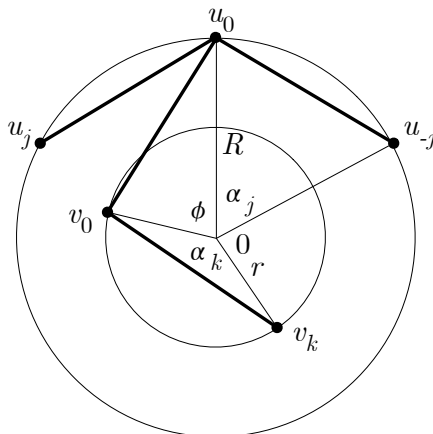
Dokaz. Po trditvi 105 ima I-graf $I(n, j, k)$ d povezanih komponent, I-graf $I(n, j_1, k_1)$ pa d_1 povezanih komponent. Ko velja $d \neq d_1$ grafa očitno nista izomorfna. Predpostavimo sedaj, da velja $d = d_1$. Potem sta I-grafa izomorfna natanko takrat, ko sta izomorfni poljubni povezani komponenti igrafov $I(\frac{n}{d}, \frac{j}{d}, \frac{k}{d})$ in $I(\frac{n}{d}, \frac{j_1}{d}, \frac{k_1}{d})$. Po izreku 109 je $I(\frac{n}{d}, \frac{j}{d}, \frac{k}{d})$ izomorfen I-grafu $I(\frac{n}{d}, \frac{j_1}{d}, \frac{k_1}{d})$ natanko takrat, ko obstaja celo število a tuje z $\frac{n}{d}$, tako da velja $\{\frac{j_1}{d}, \frac{k_1}{d}\} = \{a \frac{j}{d} \pmod{\frac{n}{d}}, a \frac{k}{d} \pmod{\frac{n}{d}}\}$ ali $\{\frac{j_1}{d}, \frac{k_1}{d}\} = \{a \frac{j}{d} \pmod{\frac{n}{d}}, -a \frac{k}{d} \pmod{\frac{n}{d}}\}$. Vsaj eden izmed pogojev je izpolnjen natanko takrat, ko velja $\{j_1, k_1\} = \{a j \pmod{n}, a k \pmod{n}\}$ ali $\{j_1, k_1\} = \{a j \pmod{n}, -a k \pmod{n}\}$ (in je a tuje število z $\frac{n}{d}$). \square

Navadno predstavimo vozlišča I-grafa na dveh koncentričnih krožnicah, vozlišča zunanega obroča u_i na eni krožnici in vozlišča notranjega obroča v_i na drugi krožnici (z manjšim polmerom), glej sliko 5.6 in sliko 5.7. Vozliščem na zunanji (oziroma notranji) krožnici pravimo včasih tudi *vozlišča zunanjega (oziroma notranjega) obroča*. Povezavam med obroči pravimo *špice*.

5.2.1 Predstavitve I-grafov z rotacijsko simetrijo

Vozlišča I-grafa $I(n, j, k)$ postavimo na koncentrični krožnici. Naj bo r polmer notranjega obroča in $R \geq r$ polmer zunanjega obroča. Naj bo $\phi := \angle \rho(v_0) \vec{0} \rho(u_0)$ kot odmika notranjega obroča glede na fiksen zunanji obroč, kjer smo obe krožnici centriralni v koordinatno

izhodišče (točko $\vec{0}$). Zaradi preglednosti označimo notranji kot $\frac{i\pi}{n}$ regularnega n -kotnika z α_i , glej sliko 5.7.



Slika 5.7: Del predstavitve z rotacijsko simetrijo z notacijo, ki jo bomo uporabljali v tem poglavju. Odebeljene daljice označujejo predstavitve z enotsko razdaljo povezav opazovanega I-grafa.

Parametri r , R in ϕ enolično določajo evklidsko predstavitev $\rho := \rho_{n,j,k}$ danega I-grafa $I(n, j, k)$. Koordinate predstavitve z rotacijsko simetrijo ρ I-grafa $I(n, j, k)$ definiramo z:

$$\rho(u_i) = (R \cos(\alpha_i), R \sin(\alpha_i)), i = 0, 1, \dots, n-1,$$

in

$$\rho(v_i) = (r \cos(\phi + \alpha_i), r \sin(\phi + \alpha_i)), i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Za predstavitev z enotsko razdaljo in rotacijsko simetrijo mora veljati:

$$R = \frac{1}{2 \sin(\alpha_j)}, r = \frac{1}{2 \sin(\alpha_k)}$$

in

$$|R - r| \leq 1.$$

Ker je $k < \frac{n}{2}$ lahko enostavno preverimo, da velja $\alpha_k = \frac{k\pi}{n} < \frac{\pi}{2}$, $\sin(\alpha_k) < \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. Torej velja $r > \frac{1}{2}$ in $0 \leq \phi < \pi$. Enostavno lahko preverimo tudi, glej na primer [39], da velja $\sin(\frac{a\pi}{b}) = \frac{1}{2}$ če in samo če je $b = 6a$. Torej je polmer R (in podobno polmer r) enak ena natanko takrat, ko zunanji (notranji) obroč vsebuje cikle z dolžino natanko 6.

Če je razdalja $R - r > 1$ potem ne obstaja noben tak kot odmika ϕ , pri katerem bi imele predstavitve špic dolžino ena. V nasprotnem primeru pa lahko kot ϕ enostavno določimo z uporabo kosinusnega izreka

$$R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\phi) = 1.$$

Enačbo lahko z uporabo trigonometričnih identitet razpišemo v

$$\cos(\phi) = \frac{\cos(\alpha_{j+k}) \cos(\alpha_{j-k}) - \cos(2\alpha_j) \cos(2\alpha_k)}{2 \sin(\alpha_j) \sin(\alpha_k)}.$$

Izrek 111. Naj bo ρ enotska predstavitev z rotacijsko simetrijo I-grafa $I(n, j, k)$ za $1 \leq j \leq k < \frac{n}{2}$. Predstavitev ρ je degenerirana natanko takrat, ko velja $j = k$.

Dokaz. Iz $j = k$ sledi $R = r$. Naj bo $0 \leq i \leq n - 1$. Vozlišče u_i grafa $I(n, j, k)$ je povezano z vozliščema zunanlega obroča $u' := u_{i+j}$ in $u'' := u_{i-j}$ in z vozliščem notranjega obroča v_i . Naj bo S_0 krožnica s polmerom R centrirana v izhodišču $\vec{0}$ in naj bo S_1 krožnica s polmerom 1 s centrom v $\rho(u_i)$. Ker točka $\rho(u_i)$ leži na krožnici S_0 , se krožnici S_0 in S_1 sekata v največ dveh točkah. Torej je vozlišče v_i preslikano v točko $\rho(u')$ ali $\rho(u'')$. Taka predstavitev je degenerirana. Iz $j \neq k$ sledi $R \neq r$, kar pomeni, da predstavitev z rotacijsko simetrijo ρ slika vozlišča grafa $I(n, j, k)$ v različne točke v \mathbb{R}^2 . Edini I-grafi, ki imajo le degenerirano predstavitev z enotsko razdaljo z rotacijsko simetrijo so I-grafi $I(n, j, j)$. \square

Zgornja opažanja zapišimo v trditvah.

Trditev 112. Naj bo $1 \leq j \leq k < \frac{n}{2}$. I-graf $I(n, j, k)$ ima nedegenerirano predstavitev z enotsko razdaljo z rotacijsko simetrijo (ki je morda visoko degenerirana) natanko takrat, ko je $j \neq k$ in

$$\left| \frac{1}{2 \sin(\alpha_j)} - \frac{1}{2 \sin(\alpha_k)} \right| \leq 1.$$

Izrek 113. Naj bo $1 \leq j < \frac{n}{2}$. Potem je $\dim(I(n, j, j)) = 2$.

Dokaz. Naj bo $d = \gcd(n, j)$. Opazimo, da je I-graf $I(n, j, j)$ unija d $\frac{n}{d}$ -prizm. Vsako $\frac{n}{d}$ -prizmo lahko konstruiramo kot kartezični produkt cikla $C_{\frac{n}{d}}$ na $\frac{n}{d}$ vozliščih in povezave K_2 . Iz posledice 80 in lastnosti, da unija grafov ohranja dimenzijo sledi, da ima I-graf $I(n, j, j)$ realizacijo z enotsko razdaljo v \mathbb{R}^2 . \square

Izkaže se, da obstaja neskončno mnogo I-grafov, ki ne zadoščajo pogojem trditve 112; najmanjši tak (po številu vozlišč) je posplošeni Petersenov graf $G(10, 4) = I(10, 1, 4)$. Takim I-grafom bomo rekli *nedopustni*; glej tabelo 5.1. Če je I-graf $I(n, j, k)$ dopusten, pravimo da je tudi trojica (n, j, k) *dopustna*.

Lema 114. Naj bo $1 \leq j \leq k < \frac{n}{2}$ in naj bo $I(n, j, k)$ nedopusten I-graf. Če je $k + 1 < \frac{n}{2}$, potem je $I(n, j, k + 1)$ nedopusten. Če je $j > 1$, potem je $I(n, j - 1, k)$ nedopusten.

n	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	19	20	20	21	21	22	22	23
j	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	2	1	2	1	2	1
k_m	4	3	3	2	2	2	2	2	2	2	8	2	7	2	6	2	5	2
k_M	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	9	9	10	10	10	10	11

n	23	24	24	25	25	26	26	27	27	28	28	28	29	29	29	30	30	30
j	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	3	1	2	3	1	2	3
k_m	5	2	5	2	5	2	4	2	4	2	4	12	2	4	11	2	4	10
k_M	11	11	11	12	12	12	12	13	13	13	13	13	14	14	14	14	14	14

Tabela 5.1: Kratak seznam nedopustnih I-grafov $I(n, j, k)$ za $n \leq 30$, dobljen s pomočjo računalnika. Vsak stolpec preberemo tako: za dana n in j ter za vsak k , za katerega velja $k_m \leq k \leq k_M$, so vsi I-grafi $I(n, j, k)$ nedopustni.

Dokaz. Naj bo $r_k := \frac{1}{2 \sin(\alpha_k)}$ in $R_j := \frac{1}{2 \sin(\alpha_j)}$. Ker je $k + 1 > k$, velja $r_k > r_{k+1}$. Torej velja $R_j - r_{k+1} > R_j - r_k > 1$ in I-graf $I(n, j, k + 1)$ ni dopusten. Ker je $j > j - 1$, je $R_{j-1} > R_j$ in $R_{j-1} - r_k > R_j - r_k > 1$; zato I-graf $I(n, j - 1, k)$ ni dopusten. \square

Lema 115. Naj bo $1 \leq j \leq k < \frac{n}{2}$ in naj bo $I(n, j, k)$ dopusten I-graf. Če je $j < k$, sta tudi $I(n, j, k - 1)$ in $I(n, j + 1, k)$ dopustna I-grafa.

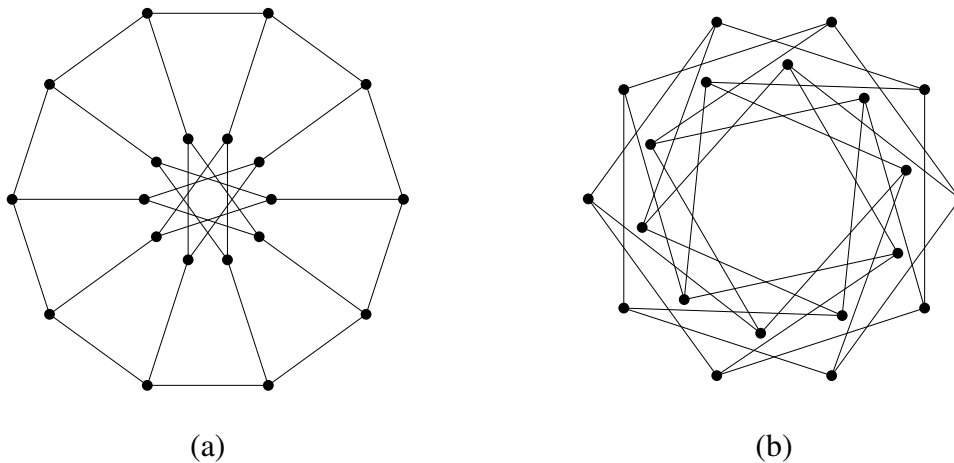
Dokaz. Naj bosta r_k in R_j notranji in zunanji polmer predstavitve z rotacijsko simetrijo grafa $I(n, j, k)$. Ker je $k - 1 < k$, je $r_{k-1} > r_k$ in velja $R_j - r_{k-1} < R_j - r_k < 1$; zato je graf $I(n, j, k - 1)$ dopusten. Ko je $j < j + 1$, velja $R_j > R_{j+1}$ in $R_{j+1} - r_k < R_j - r_k < 1$; zato je tudi I-graf $I(n, j + 1, k)$ dopusten. \square

Obstajajo pa tudi I-grafi, ki jih je mogoče predstaviti z enotsko razdaljo, kljub temu da niso dopustni. Čeprav I-graf $I(10, 1, 4)$ nima predstavitve z enotsko razdaljo in rotacijsko simetrijo, jo ima njemu izomorfnega graf $I(10, 2, 3)$, glej sliko 5.8.

Za dokaz naslednje leme bomo uporabili trditev 106.

Lema 116. I-graf $I(12, 1, 5)$ (simetrični kubični graf F_{24}) je najmanjši I-graf, ki nima dopustnega izomorfnega I-grafa.

Dokaz. Opazimo, da je I-graf $I(12, 1, 5)$ posplošeni Petersenov graf $G(12, 5)$. Naj bosta $n', k' \in \mathbb{N}$ naravni števili. Iz trditve 106 sledi, da morajo za posplošeni Petersenov graf $G(n', k')$, ki bi bil izomorfen posplošenemu Petersenovemu grafu $G(12, 5)$ veljati naslednje lastnosti: $n' = 12$, $\gcd(12, k') = 1$ in $k' \neq 5$. Edina možnost je $k' = 7$. Enostavno je mogoče preveriti, da predstavlja situacija $5 \equiv \pm 7 \pmod{12}$ zrcaljenje ciklov notranjega obroča. Torej I-graf $I(12, 1, 5)$



Slika 5.8: I-grafa $I(10, 1, 4)$ (a) in $I(10, 2, 3)$ (b) sta izomorfna. Prvi je posplošeni Petersenov graf $G(10, 4)$, ki je nedopusten. Po drugi strani pa je I-graf $I(10, 2, 3)$ graf z enotsko razdaljo in rotacijsko simetrijo.

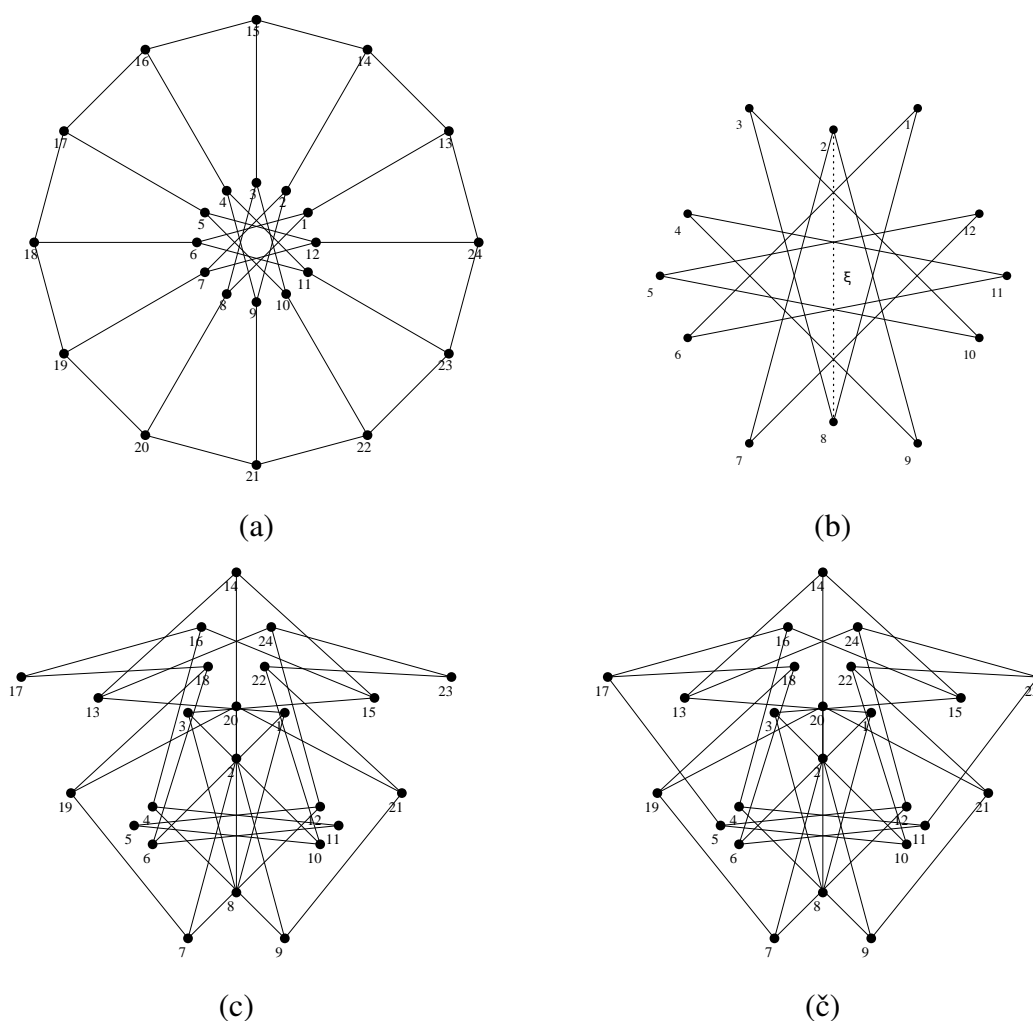
nima netrivialnega izomorfa. Nedegenerirana enotska predstavitev z rotacijsko simetrijo I-grafa $I(12, 1, 5)$ določa $R = \frac{\sqrt{2}}{-1+\sqrt{3}}$ in $r = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$. Torej je $R - r = \sqrt{2}$ in je I-graf $I(12, 1, 5)$ nedopusten. \square

Posplošeni Petersenov graf $I(12, 1, 5)$ pa lahko predstavimo z enotsko razdaljo brez rotacijske simetrije.

Trditev 117. $\dim(I(12, 1, 5)) = 2$.

Dokaz. Dokaz bo konstrukcijske narave. Vozlišča I-grafa $I(12, 1, 5)$ označimo tako kot na sliki 5.9 (a). Najprej bomo konstruirali predstavitev ρ notranjega obroča. Z $\xi := \|\rho(2) - \rho(8)\|$ definiramo razdaljo med predstavitvama vozlišč 2 in 8. Vozlišči 2 in 8 postavimo v točki $(0, \frac{\xi}{2})$ in $(0, -\frac{\xi}{2})$. Vzemimo $\angle 381 = \angle 618 = \angle 8310 = \frac{\pi}{6}$ in predstavimo pot $6 \sim 1 \sim 8 \sim 3 \sim 10$ tako kot je mogoče videti na sliki 5.9 (b). Vzemimo kopijo poti $6 \sim 1 \sim 8 \sim 3 \sim 10$ in jo zrcalimo preko x -osi, tako da dobimo pot $4 \sim 9 \sim 2 \sim 7 \sim 12$. Vozlišče 11 postavimo v točko, ki je na razdalji ena od vozlišč 4 in 6, vozlišče 5 pa v točko, ki je na razdalji ena od predstavitev vozlišč 10 in 12. Glede na izbrano vrednost za parameter ξ lahko notranji obroč predstavimo z enotsko razdaljo na nedegeneriran način.

Naj bo G podgraf I-grafa $I(12, 1, 5)$ z množico vozlišč $V(G) := V(I(12, 1, 5))$ in množico povezav $E(G) := E(I(12, 1, 5)) \setminus \{5 \sim 17, 11 \sim 23\}$. Enostavno je dobiti simetrično nedegenerirano predstavitev z enotsko razdaljo grafa G , ki je zaradi simetrije konstrukcije visoko degenerirana, glej sliko 5.9 (c). Zaradi simetrije velja $\ell := \|\rho(5) - \rho(17)\| = \|\rho(11) - \rho(23)\|$.



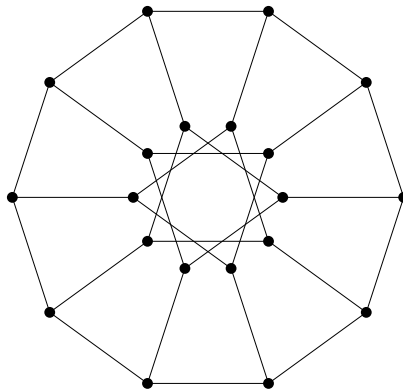
Slika 5.9: (a) Posplošeni Petersenov graf $G(12, 5) = I(12, 1, 5)$ (simetrični kubični graf F_{24}) z označenimi vozlišči. (b) Notranji obroč predstavimo z enotsko razdaljo glede na vrednost parametra $\xi = \|\rho(2) - \rho(8)\|$. (c) Nedegenerirana predstavitev grafa $G(12, 5)$ brez povezav $\{5 \sim 17, 11 \sim 23\}$. (č) I-graf $I(12, 1, 5)$ je graf z enotsko razdaljo.

Simetrična konstrukcija z enotsko razdaljo predstavljena na sliki 5.9 (c) ni toga ampak fleksibilna s parametrom $\xi := \|\rho(2) - \rho(8)\|$. Če izberemo $\xi = 0,72$, je v konstrukciji razdalja $\ell \approx 1,00004 > 1$, pri $\xi = 0,73$ pa razdalja ℓ znaša $\ell \approx 0,98935 < 1$. S tem ko povečujemo vrednost parametra ξ iz $0,72$ na $0,73$ se zvezno premikamo iz predstavitve z $\ell > 1$ v predstavitve z $\ell < 1$. Zaradi zveznosti obstaja realizacija z $\ell = 1$, torej obstaja vrednost za ξ ($\sim 0,72003458376584$) pri kateri velja $\dim(I(12, 1, 5)) = 2$. \square

Lema 118. *I-grafi $I(10m, m, 3m)$, kjer je $m \in \mathbb{N}$ so dopustni. Še več, vse njihove realizacije z enotsko razdaljo in rotacijsko simetrijo imajo obroča oddaljena natanko ena.*

Dokaz. Vsaka izmed m komponent I-grafa $I(10m, m, 3m)$ je posplošeni Petersenov graf $I(10, 1, 3)$ (Desarguesov graf), glej sliko 5.10. Naj bosta $n', k' \in \mathbb{N}$ naravni števili. Upoštevamo trditev 106, ki pravi, da morajo za $G(n', k')$, ki bi bil izomorfen $G(10, 3)$ veljati naslednje ena-kosti: $n' = 10$, $\gcd(10, k') = 1$ and $k' \neq 3$. Ponovno je edina možnost $k' = 7$. Ker je $3 \equiv \pm 7 \pmod{10}$, predstavlja ta situacija zrcaljenje ciklov notranjega obroča. Torej I-graf $I(10, 1, 3)$ nima netrivialnega izomorfa. Po drugi strani pa lahko pišemo

$$\begin{aligned} R - r &= \frac{1}{2 \sin\left(\frac{m\pi}{10m}\right)} - \frac{1}{2 \sin\left(\frac{3m\pi}{10m}\right)} \\ &= \frac{1}{2 \sin\left(\frac{\pi}{10}\right)} - \frac{1}{2 \sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)} \\ &= \frac{2}{-1 + \sqrt{5}} - \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = 1. \end{aligned} \quad \square$$



Slika 5.10: I-graf $I(10, 1, 3)$ ima realizacijo z enotsko razdaljo in rotacijsko simetrijo z obročema, ki sta oddaljena natanko ena.

Naslednji rezultat pove, da je velika večina (približno $\frac{8}{9}$ vseh) I-grafov dopustnih.

Trditev 119. Naj bo $1 \leq j \leq k < \frac{n}{2}$. I-graf $I(n, j, k)$ ima (morda visoko degenerirano) nedegenerirano predstavitev z enotsko razdaljo in rotacijsko simetrijo, če velja $j \geq \frac{n}{9}$.

Dokaz. Opazimo, da je $\sin(x)$ monotonno naraščajoča funkcija na intervalu $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Ker je $k < \frac{n}{2}$, je $\alpha_k < \frac{\pi}{2}$ in $\sin(\alpha_k) < \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Podobno iz $j \geq \frac{n}{9}$ sledi, da je $\alpha_j \geq \frac{\pi}{9}$, $\sin(\alpha_j) \geq \sin\left(\frac{\pi}{9}\right)$ in $\frac{1}{2 \sin(\alpha_j)} \leq \frac{1}{2 \sin\left(\frac{\pi}{9}\right)} \approx 1.4619$. Torej je

$$\left| \frac{1}{2 \sin(\alpha_j)} - \frac{1}{2 \sin(\alpha_k)} \right| \leq \left| \frac{1}{2 \sin\left(\frac{\pi}{9}\right)} - \frac{1}{2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} \right| \leq 1,$$

kar dokazuje našo trditev. □

Iz leme 118 sledi, da obstajajo I-grafi $I(n, j, k)$, ki so dopustni brez izomorfov in za katere velja $j < \frac{n}{9}$; za dopustnost I-grafa pogoj $j \geq \frac{n}{9}$ iz trditve 119 torej ni potreben pogoj. Kot primer so v tabeli 5.2 prikazani vsi dopustni I-grafi za $n = 60$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
1	○	7	7	7	7	7	7	11	11	7	7	7	7	7	7	11	7	7	7	7	7	7	7	7	11	7	7	7	
2	7	○	7	7	7	7	7	11	11	7	7	7	7	7	7	11	7	7	7	7	7	7	7	11	11	7	7	7	
3	7	7	○	*	7	7	7	11	11	7	7	7	7	7	7	11	11	7	7	7	7	7	7	11	11	7	7	7	
4	7	7	*	○	*	*	7	11	11	7	7	7	7	7	7	11	11	7	7	7	7	7	7	11	11	7	7	7	
5	7	7	7	*	○	*	*	*	*	*	7	7	7	7	7	11	13	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	
6	7	7	7	*	*	○	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	⊙	7	7	7	7	7	7	13	11	7	7	7	
7	7	7	7	7	*	*	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗		
8	11	11	11	11	*	*	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗		
9	11	11	11	11	*	*	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗		
10	7	7	7	7	*	*	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗		
11	7	7	7	7	7	*	*	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗		
12	7	7	7	7	7	*	*	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗		
13	7	7	7	7	7	*	*	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗		
14	7	7	7	7	7	*	*	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗		
15	7	7	7	7	7	*	*	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗		
16	7	7	7	7	7	*	*	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗		
17	11	11	11	11	11	*	*	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗		
18	7	7	11	11	13	⊙	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗		
19	7	7	7	7	7	7	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗		
20	7	7	7	7	7	7	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗		
21	7	7	7	7	7	7	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗		
22	7	7	7	7	7	7	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗		
23	7	7	7	7	7	7	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗		
24	7	7	7	7	7	7	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗		
25	7	11	11	11	7	7	7	13	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗		
26	11	11	11	11	17	11	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗		
27	7	7	7	7	7	7	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗		
28	7	7	7	7	7	7	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗		
29	7	7	7	7	7	7	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗		

Tabela 5.2: Vsi I-grafi za $n = 60$, ki imajo predstavitev z enotsko razdaljo in rotacijsko simetrijo v evklidski ravnini. S simbolom \circ so označene vse degenerirane situacije, glej izrek 111. S simbolom \otimes so označeni vsi dopustni I-grafi (tisti, za katere je pogoj iz trditve 119 resničen). Primera opisana v lemi 118 sta označena s simbolom \odot . Situaciji obravnavani v trditvi 117 sta označeni s simbolom \aleph . Ostali dopustni I-grafi $I(n, j, k)$, ki ne zadoščajo pogoju $j \geq \frac{n}{9}$ so označeni s simbolom $*$; opazimo, da velja $\lceil \frac{60}{9} \rceil = 7$. Pri I-grafih $I(n, j, k)$, ki niso dopustni je označeno najmanjše tako celo število tuje z n , ki ga dobimo iz izreka 109 za poljubno komponento I-grafa; vsako komponento narišemo z rotacijsko simetrijo, vsak graf pa je unija svojih komponent.

Čeprav lahko enostavno povemo kdaj I-graf $I(n, j, k)$ ni dopusten, je vprašanje ali obstaja dopusten I-graf $I(n', j', k')$, ki je izomorfen $I(n, j, k)$ veliko težje. Zato da bi pokazali da so

vsi I-grafi grafi z enotsko razdaljo, moramo pokazati le še naslednjo domnevo, ki smo jo z uporabo računalnika preverili za vse I-grafe $I(n, j, k)$ za $n \leq 1000$. Pri dokazu domneve 1 bo uporaben izrek 109, glej tudi tabelo 5.2.

Domneva 1. Naj velja $1 \leq j \leq k < \frac{n}{2}$ in $m \in \mathbb{N}$. Naj bo (n, j, k) trojica, ki ni oblike $(12m, m, 5m)$. Potem obstaja celo število $a \in \mathbb{Z}_n^*$ tuje z n , tako da je trojica (n, j', k') dopustna (in zadošča pogojem trditve 112), kjer je $j_1 = aj \pmod{n}$, $k_1 = ak \pmod{n}$, $j_2 = \min(j_1, n - j_1)$, $k_2 = \min(k_1, n - k_1)$, $j' = \min(j_2, k_2)$ in $k' = \max(j_2, k_2)$.

Ob preverjanju zgornje domneve z računalnikom se je izkazalo, da imajo med vsemi I-grafi $I(n, j, k)$ za $n \leq 1000$, samo I-grafi oblike $I(10m, m, 3m)$ za poljubno naravno število $m \leq 100$ obroča oddaljena natanko ena. Izkazalo se je tudi, da so za $n \leq 1000$ vse dopustne trojice (n, j, k) , ki nimajo izomorfa (n, j', k') za katerega bi veljalo $j' \geq \frac{n}{9}$, le trojice oblike $(10m, m, 3m)$ za neko naravno število m .

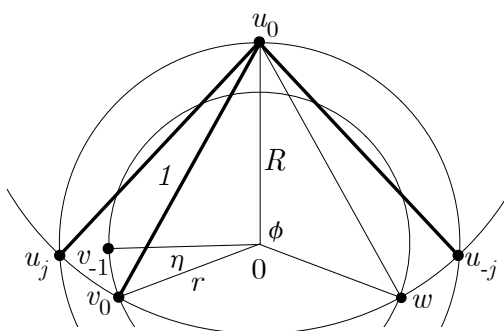
5.2.2 Koordinatizacije z enotsko razdaljo in rotacijsko simetrijo

Trditev 120. Naj bo ρ nedegenerirana (lahko tudi visoko degenerirana) predstavitev z enotsko razdaljo in rotacijsko simetrijo povezanega I-grafa $I(n, j, k)$ določena z r, R, ϕ . Potem je ρ koordinatizacija z enotsko razdaljo natanko takrat, ko velja $\frac{n\phi}{\pi} \notin \mathbb{N}$.

Dokaz. Ker je ρ nedegenerirana predstavitev z rotacijsko simetrijo, slika vozlišča grafa $I(n, j, k)$ v različne točke evklidske ravnine \mathbb{R}^2 in velja $R \neq r$ ter $j \neq k$. Naj bosta S_R, S_r koncentrični krožnici s polmeroma R in r ter središčem v izhodišču $\vec{0}$ in naj bo S_1 krožnica s polmerom 1 in središčem v $\rho(u_0) \in S_R$. Ker točka $\rho(u_0)$ leži na S_R in ker velja $R > r > \frac{1}{2}$, se krožnici S_R in S_1 sekata v natančno dveh točkah $\rho(u_{\pm j})$. Podobno razmislimo, da imata tudi krožnici S_r in S_1 največ dve skupni točki, saj je ρ predstavitev z enotsko razdaljo in velja $|R - r| \leq 1$.

Če ρ ni koordinatizacija, potem obstaja vozlišče $w \neq u_{\pm j}$, tako da vozlišči u_0 in w nista sosednji in velja $\rho(w) \in S_1$. Torej je $\rho(w) \in S_r$, glej sliko 5.11. Po definiciji je vsako vozlišče zunanjega obroča povezano z natanko enim vozliščem notranjega obroča. Torej velja $w \neq v_0$ in $\rho(w) \in S_r$. Naj bo $\angle \rho(w)\vec{0}\rho(v_0)$ ostri kot na sliki 5.11. Ker je w vozlišče na notranjem obroču je kot $\angle \rho(w)\vec{0}\rho(v_0) = a\frac{2\pi}{n}$, kjer je $a \in \mathbb{N}$. Opazimo, da je predstavitev ρ simetrična glede na zrcaljenje preko premice, ki gre skozi izhodišče $\vec{0}$ in točko $\rho(u_0)$. Torej je kot $\angle \rho(u_0)\vec{0}\rho(v_0) = \angle \rho(w)\vec{0}\rho(u_0) = \phi$. Zato za naravno število a velja $2\phi = a\frac{2\pi}{n}$ in $\frac{n\phi}{\pi} = a$.

Privzemimo sedaj, da velja $a = \frac{n\phi}{\pi} \in \mathbb{N}$. Potem je $\phi = a\frac{\pi}{n}$ in $2\phi = a\frac{2\pi}{n}$. Spomnimo, da je $\eta = \frac{2\pi}{n}$ velikost središčnega kota regularnega n -kotnika. Torej je $a\frac{2\pi}{n}$ velikost kota med



Slika 5.11: Situacija pri kateri nedegenerirana predstavitev z enotsko razdaljo in rotacijsko simetrijo ni koordinatizacija; razdalja $d(u_0, w) = 1$.

predstavitvijo vozlišča v_0 in predstavitevama vozlišč $v_{\pm a}$. Ker je $d(u_0, v_0) = 1$, je resnična vsaj ena izmed naslednjih enakosti: $d(u_0, v_{-a}) = 1$ oziroma $d(u_0, v_a) = 1$. Toda vozlišče u_0 ni sosednje z nobenim vozliščem v_{-a}, v_a . Torej predstavitev ρ ni koordinatizacija. \square

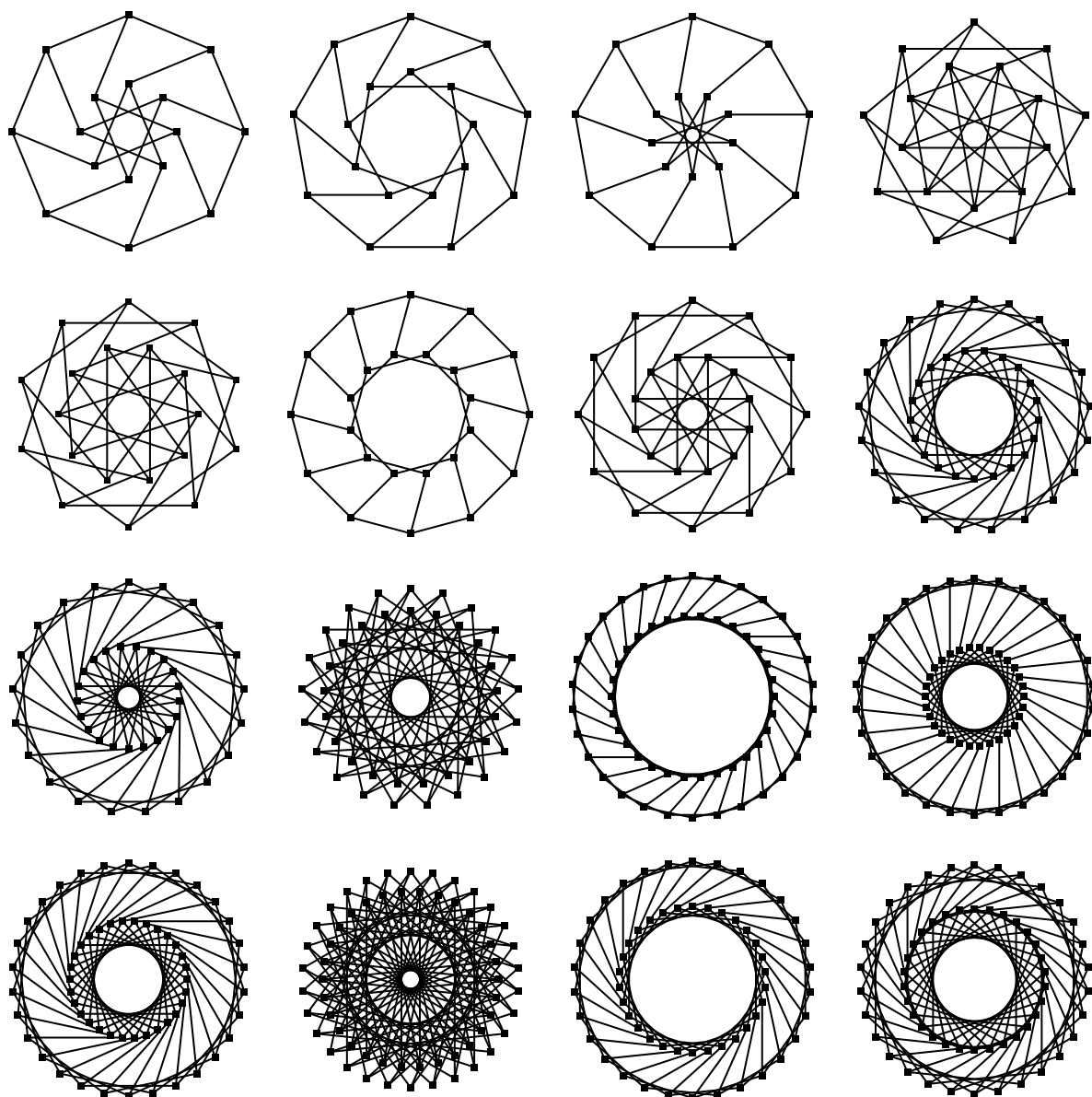
Naslednji domnevi smo potrdili z računalnikom za vse I-grafe $I(n, j, k)$ za $n \leq 1000$; glej slike 5.12, 5.13 in 5.14.

Domneva 2. Naj bo ρ nedegenerirana predstavitev z enotsko razdaljo (ki je lahko tudi visoko degenerirana) in rotacijsko simetrijo I-grafa $I(n, j, k)$. Če je $n > 30$, potem je ρ koordinatizacija.

Domneva 3. Naj bo ρ nedegenerirana predstavitev z enotsko razdaljo (ki je lahko tudi visoko degenerirana) in rotacijsko simetrijo I-grafa $I(n, j, k)$ in naj bo \mathcal{M} množica vseh grafu $I(n, j, k)$ izomorfnih grafov. Če ρ ni koordinatizacija z enotsko razdaljo, noben graf $G \in \mathcal{M}$ nima koordinatizacije z enotsko razdaljo in rotacijsko simetrijo.

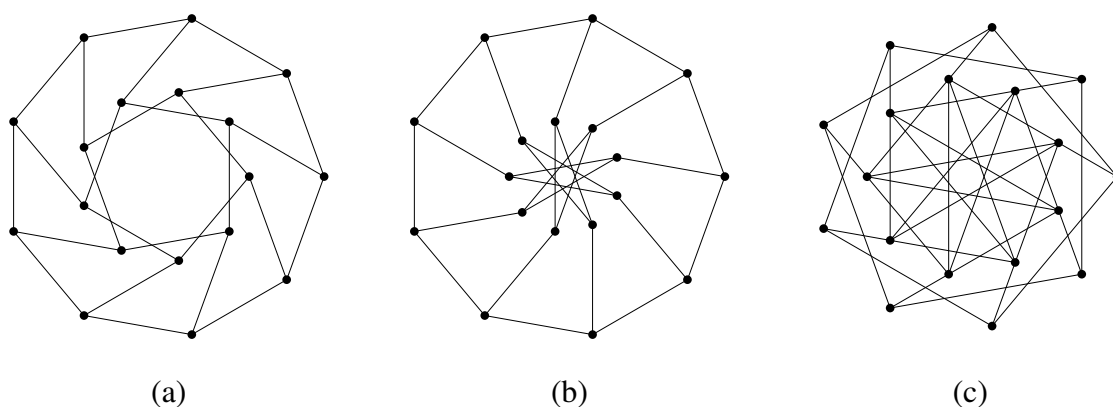
5.2.3 Visoko degenerirane predstavitve z enotsko razdaljo in rotacijsko simetrijo

Opazimo, da je predstavitev z enotsko razdaljo ρ , ki slika k ciklov na m vozliščih v k zvezdnih poligonov pripetih na oglišča regularnega (k, m) -kotnika nedegenerirana in ni visoko degenerirana. Ker velja $R \geq r$, se visoko degenerirane situacije lahko pojavijo le v dveh primerih; najprej, ko vsebuje špica predstavitev vozlišča notranjega obroča (glej sliko 5.13 (c)) in drugič, ko je predstavitev vozlišča notranjega obroča vsebovana v predstavitvi povezave zunanjega obroča.

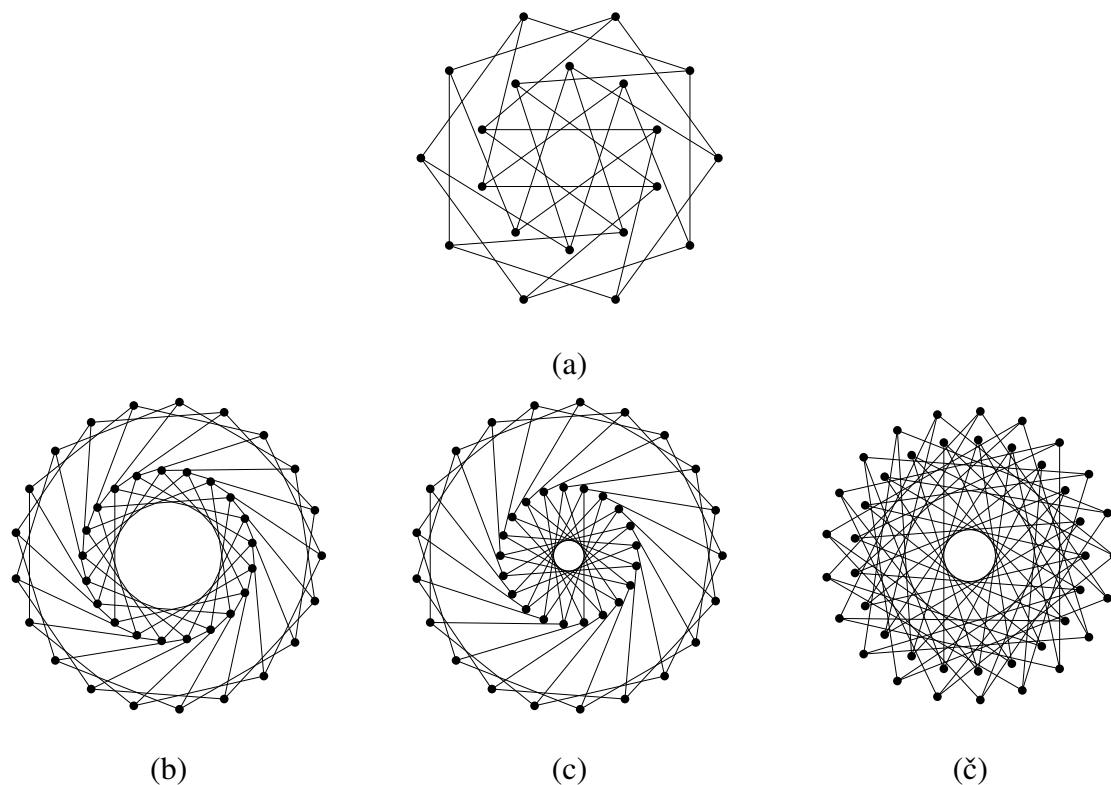


Slika 5.12: Vsi I-grafi $I(n, j, k)$ (za $n \leq 1000$), ki imajo nedegenerirano predstavitev z enotsko razdaljo in rotacijsko simetrijo, ki ni koordinatizacija. Od leve proti desni, od zgoraj navzdol so: $I(8, 1, 3)$, $I(9, 1, 2)$, $I(9, 1, 4)$, $I(9, 2, 4)$, $I(10, 2, 4)$, $I(12, 1, 2)$, $I(12, 2, 5)$, $I(21, 3, 6)$, $I(21, 3, 9)$, $I(21, 6, 9)$, $I(30, 2, 3)$, $I(30, 3, 8)$, $I(30, 4, 9)$, $I(30, 9, 14)$, $I(30, 3, 5)$ in $I(30, 5, 9)$. Opozoriti velja, da I-grafi $I(10, 2, 4)$, $I(21, 3, 6)$, $I(21, 3, 9)$ in $I(21, 6, 9)$ niso povezani. Zanimivo je tudi, da sta vlogi notranjega in zunanjega obroča pri predstavitvah z enotsko razdaljo in rotacijsko simetrijo izomorfnih I-grafov $I(30, 2, 3)$ in $I(30, 3, 8)$ zamenjani.

Trditev 121. Na bo ρ predstavitev z enotsko razdaljo in rotacijsko simetrijo I-grafa $I(n, j, k)$, ki je določena z r , R in ϕ . Potem je predstavitev vozlišča notranjega obroča vsebovana na špicah,



Slika 5.13: Izomorfni I-grafi $I(9, 1, 2)$ (a), $I(9, 1, 4)$ (b) in $I(9, 2, 4)$ (c) z nedegeneriranimi predstavitvami z enotsko razdaljo in rotacijsko simetrijo, ki niso koordinatizacije. Predstavitev na sliki (c) je visoko degenerirana.



Slika 5.14: Dopustni nepovezani I-grafi (a) $I(10, 2, 4)$, (b) $I(21, 3, 6)$, (c) $I(21, 3, 9)$ in (č) $I(21, 6, 9)$, ki nimajo koordinatizacije z enotsko razdaljo in rotacijsko simetrijo a so sestavljeni iz komponent, ki jo imajo. Graf (a) je sestavljen iz dveh kopij Petersenovega grafa $G(5, 2)$. Spodnji trije grafi na 21 vozliščih so med seboj izomorfni in so sestavljeni iz treh komponent s po sedmimi vozlišči.

ki povezuje notranji in zunanji obroč natanko takrat, ko je

$$\frac{n}{\pi} \arcsin \left(\frac{1 + r^2 - R^2}{2r} \right) \in \mathbb{N};$$

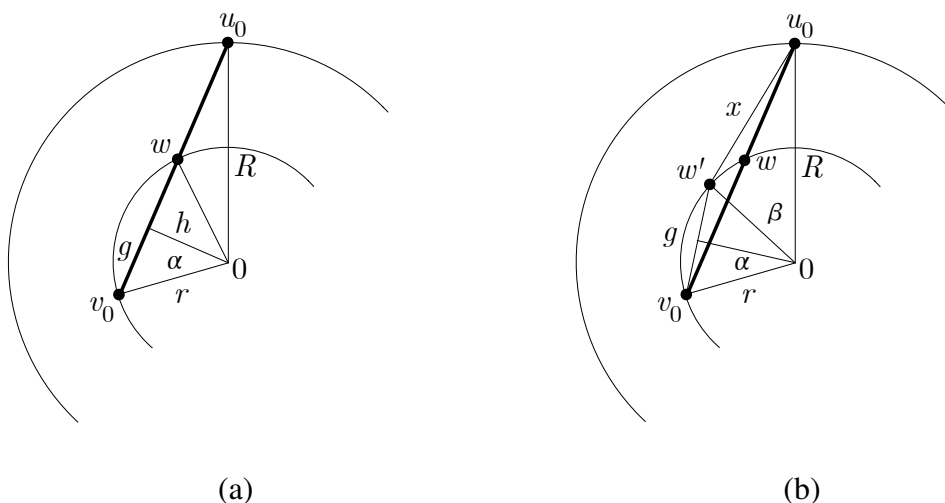
predstavitev ρ je visoko degenerirana.

Dokaz. Naj bo $\phi = \angle v_0 \vec{0} u_0$. Za naravno število $a \in \mathbb{N}$ definirajmo kot $\alpha = a \frac{\pi}{n}$, tako kot na sliki 5.15 (a). Ker je $R \geq r > \frac{1}{2}$, $0 \leq \phi < \pi$ in $0 < \alpha < \frac{\phi}{2} < \frac{\pi}{2}$, veljajo naslednje neenakosti

$$-1 \leq \frac{1 - 2R}{2R} \leq \frac{1 - 2R}{2r} \leq \frac{1 - (r + R)}{2r} \leq \frac{1 + r^2 - R^2}{2r} \leq \frac{1 + R^2 - R^2}{2r} = \frac{1}{2r} \leq 1.$$

Torej lahko namesto $\alpha = \arcsin \left(\frac{1 + r^2 - R^2}{2r} \right)$ pišemo $\sin(\alpha) = \frac{1 + r^2 - R^2}{2r}$.

Naj bo $e_i = u_i \sim v_i$ špica pripeta na vozlišče u_i zunanjega obroča in na vozlišče v_i notranjega obroča in naj w označuje eno izmed visoko degeneriranih vozlišč. Zaradi simetrije lahko predpostavimo, da leži predstavitev vozlišča w na predstavitvi špice e_0 . Spomnimo se, da je $\frac{2\pi}{n}$ velikost središčnega kota regularnega n -kotnika. Torej obstaja tako naravno število $a \in \mathbb{N}$, tako da je $a \frac{2\pi}{n} = 2\alpha$ enaka velikosti kota $\angle v_0 \vec{0} w$, napetega med vozliščem v_0 in vozliščem w . Definirajmo $g = \frac{d(v_0, w)}{2}$ in $h = r \cos(\alpha)$, glej sliko 5.15 (a). Pišemo lahko $g = r \sin(\alpha)$ in $r^2 = g^2 + h^2$. Ker je $h^2 = R^2 - (1 - g)^2$, je $h^2 + g^2 = r^2 = R^2 + 1 - 2g$ in velja $\sin(\alpha) = \left(\frac{1 + r^2 - R^2}{2r} \right)$.



Slika 5.15: (a) Visoko degenerirana situacija pri kateri špica $e_0 = u_0 \sim v_0$ vsebuje vozlišče w notranjega obroča. (b) Potreben pogoj, da predstavitev z enotsko simetrijo izenači točki w in w' , je $d(v_0, w') + d(w', u_0) = 1$.

Dokažimo najprej nasprotno; torej dokažimo, da iz $\sin(\alpha) = \frac{1 + r^2 - R^2}{2r}$ sledi, da je ρ visoko degenerirana, tako da preslika vozlišče notranjega obroča na špico. Privzemimo situacijo na

sliki 5.15 (b). Radi bi dokazali, da je vozlišče w' slikano v točko w . Enostavno je premisliti, da velja $w = w'$ natanko takrat, ko velja $d(v_0, w') + d(w', u_0) = 1$. Opazimo, da je $g = d(v_0, w') = 2r \sin(\alpha) = 1 + r^2 - R^2$. Naj bo $\beta = \phi - 2\alpha$. Iz kosinusnega izreka sledi $x^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\beta)$ in $1 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\phi)$. Opazimo, da prestavlja enakost $R^2 = r^2 + 1$ situacijo, ki ni visoko degenerirana; natančneje, situacijo kjer je $h = r$ in $v_0 = w$. Ker je $R \geq r > \frac{1}{2}$, lahko pišemo

$$\begin{aligned}
x^2 &= R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\beta) \\
&= R^2 + r^2 - 2Rr (\cos(\phi) \cos(2\alpha) + \sin(\phi) \sin(2\alpha)) \\
&= R^2 + r^2 - 2Rr (\cos(\phi)(1 - 2\sin^2(\alpha)) + 2\sin(\phi) \sin(\alpha) \cos(\alpha)) \\
&= r^2 + R^2 + \frac{(1 + r^2 - R^2)^2(-1 + r^2 + R^2)}{4r^2} - (-1 + r^2 + R^2) \cos^2(\alpha) + \\
&\quad + 2R(-1 - r^2 + R^2) \cos(\alpha) \sin(\phi) \\
&= \frac{r^6 - r^4(-1 + R^2) + (-1 + R^2)^3 + r^2(1 + 2R^2 - R^4)}{2r^2} + \\
&\quad + 2R(-1 - r^2 + R^2) \cos(\alpha) \sin(\phi),
\end{aligned}$$

zato velja

$$\cos(\alpha) \sin(\phi) = \frac{2r^2 x^2 - (r^6 - r^4(-1 + R^2) + (-1 + R^2)^3 + r^2(1 + 2R^2 - R^4))}{4r^2 R(-1 - r^2 + R^2)}.$$

Velja tudi

$$\begin{aligned}
\cos^2(\alpha) \sin^2(\phi) &= (1 - \sin^2(\alpha))(1 - \cos^2(\phi)) \\
&= \frac{(r^4 + (-1 + R^2)^2 - 2r^2(1 + R^2))^2}{16r^4 R^2},
\end{aligned}$$

zato je

$$\frac{(r^6 - r^4(-1 + R^2) + (-1 + R^2)^3 - r^2(-1 - 2R^2 + R^4 + 2x^2))^2}{(1 + r^2 - R^2)^2 (r^4 + (-1 + R^2)^2 - 2r^2(1 + R^2))^2} = 1. \quad (5.4)$$

Opazimo, da ima leva stran enačbe (5.4) pole v situacijah, ki ali niso visoko degenerirane ali pa niso dopustne. Edini realni rešitvi enačbe (5.4) sta $x_1 = r^2 - R^2$ in $x_2 = R^2 - r^2$. Ker je $x \geq 0$ in velja $R \geq r > \frac{1}{2}$, je $x_1 \leq 0$ in $x_2 \geq 0$. Torej je $x = d(w', u_0) = R^2 - r^2$ in $d(v_0, w') + d(w', u_0) = g + x = 2r \sin(\alpha) + R^2 - r^2 = 1$. \square

Trditev 122. Naj bo ρ nedegenerirana predstavitev z enotsko razdaljo in rotacijsko simetrijo I-grafa $I(n, j, k)$, ki je določena z r, R in ϕ . Naj bodo $\phi = \angle v_0 \vec{0} u_0$, $\beta = \angle z \vec{0} w = \angle z \vec{0} w'$ in $\gamma = \angle u_j \vec{0} u_0 = j \frac{2\pi}{n}$. Če obstaja naravno število $a \in \mathbb{N}$, tako da drži ena izmed naslednjih

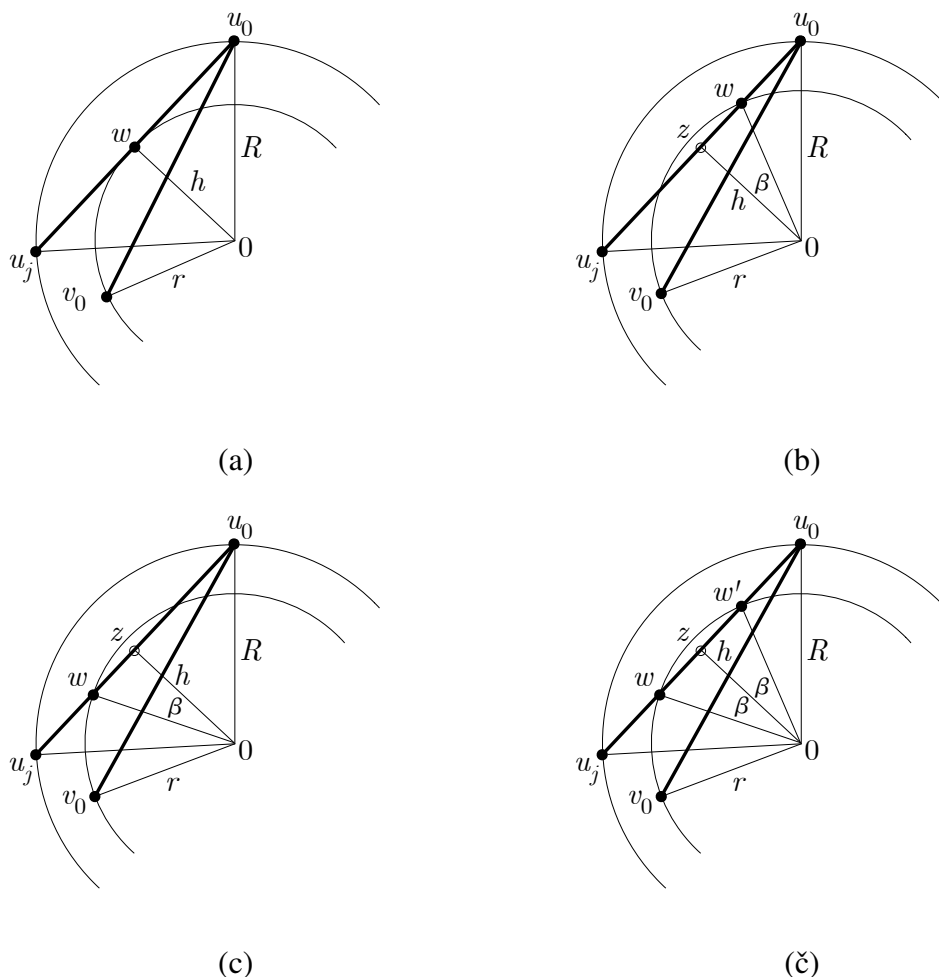
enakosti:

$$\phi = \frac{\pi}{n}(j + 2a), \quad (\text{slika 5.16 (a)})$$

$$\phi = \frac{\pi}{n}(j + 2a) \pm \beta, \quad (\text{slika 5.16 (b-č)})$$

potem predstavitev vozlišča notranjega obroča leži na predstavitvi povezave zunanega obroča in je predstavitev ρ visoko degenerirana.

Dokaz. Vse različne situacije pri katerih je vozlišče notranjega obroča vsebovano na povezavi zunanega obroča so predstavljene na sliki 5.16. Zgornji enačbi je iz situacij na sliki 5.16 mogoče enostavno razbrati.



Slika 5.16: Vse visoko degenerirane situacije, kjer predstavitev povezave zunanega obroča $u_0 \sim u_j$ vsebuje predstavitev vsaj enega vozlišča w (in včasih še enega vozlišča w') notranjega obroča.

S pomočjo računalnika smo za $n \leq 1000$ za vse I-grafe $I(n, j, k)$ potrdili domnevo 4 in domnevo 5.

Domneva 4. Naj bo ρ nedegenerirana predstavitev z enotsko razdaljo in rotacijsko simetrijo I-grafa $I(n, j, k)$. Če je $n > 30$, potem v predstavitvi ρ vozlišče notranjega obroča ni vsebovano na nobeni špici.

Domneva 5. Naj bo ρ visoko degenerirana predstavitev z enotsko razdaljo in rotacijsko simetrijo I-grafa $I(n, j, k)$, pri kateri je vozlišče notranjega obroča vsebovano na eni izmed špic. Potem predstavitev ρ ni koordinatizacija z enotsko razdaljo.

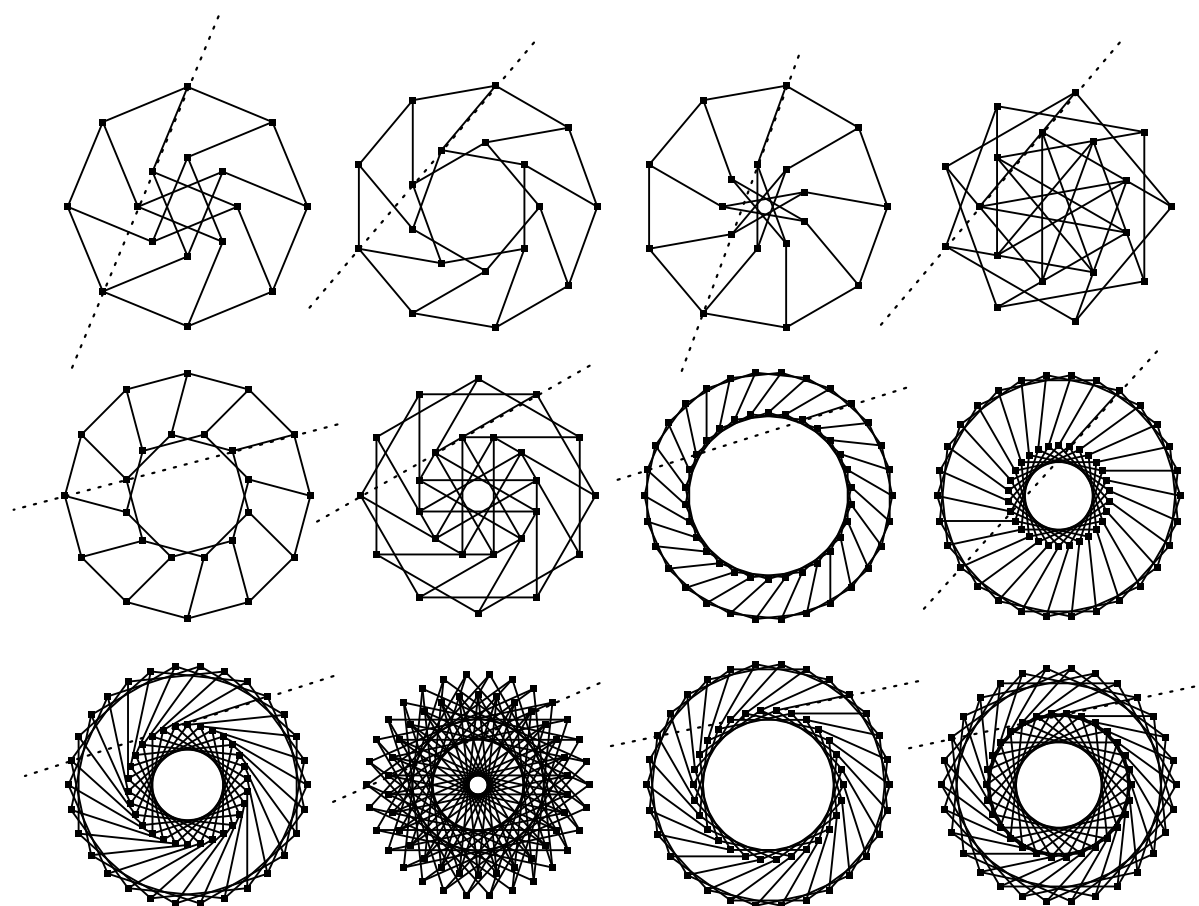
Za vsak primer na sliki 5.16 lahko z uporabo enačbe iz trditve 121, kosinusnega izreka, sinusnega izreka in trigonometričnih identitet dobimo enačbo, ki izenačuje $\cos\left(a\frac{2\pi}{n}\right)$ s funkcijo dveh parametrov R in r . Torej lahko za dana R in r numerično izračunamo a in preverimo ali je rezultat naravno število (dovolj blizu naravnega števila). Za $n \leq 1000$ smo s pomočjo računalnika pripravili seznam vseh povezanih I-grafov $I(n, j, k)$, ki nimajo koordinatizacije z enotsko razdaljo in rotacijsko simetrijo in seznam vseh povezanih I-grafov $I(n, j, k)$, ki imajo visoko degenerirano nedegenerirano predstavitev z enotsko razdaljo in rotacijsko simetrijo pri kateri leži vozlišče notranjega obroča na špici; glej tabelo 5.2.3.

Na koncu kot zanimivost povejmo, da če pri predstavitvi z enotsko razdaljo in rotacijsko simetrijo poljubnega povezanega I-grafa na sliki 5.12, ki ni koordinatizacija "podaljšamo" špice v premice, dobimo situacije, kjer vsaka premica vsebuje natanko štiri predstavitve vozlišč I-grafa; glej sliko 5.17. L. W. Berman je v [5] dokazala, da je seznam astralnih konfiguracij [8], ki ga je predstavil B. Grünbaum popoln in našela vse takoimenovane *sporadične* primere, ki obstajajo. Zanimivo je tudi, da imajo sporadične astralne konfiguracije največ 60 točk, tako kot največji I-grafi, ki nimajo koordinatizacije z enotsko razdaljo in rotacijsko simetrijo; glej domnevo 2. Podobnost konfiguracij s koordinatizacijami z enotsko razdaljo in rotacijsko simetrijo I-grafov bi bilo zanimivo še dodatno raziskati.

n	j	k	$\rho_{n,j,k}$ je koordinatizacija	$\rho_{n,j,k}$ je visoko degenerirana	$\cos(\phi)$	$\frac{n\phi}{\pi} \in \mathbb{N}$
8	1	3	ne	ne	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	2
9	1	2	ne	ne	0,7660 ^a	2
9	1	4	ne	ne	0,9397 ^a	1
9	2	4	ne	da	-0,1736 ^a	5
10	2	4	ne	ne	0	5
12	1	2	ne	ne	$\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	1
12	2	5	ne	da	$\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	5
21	3	6	ne	ne	$\frac{1}{2}$	7
21	3	9	ne	ne	$\frac{1}{2}$	7
21	6	9	ne	ne	$-\frac{1}{2}$	14
30	2	3	ne	ne	$\sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}}$	3
30	3	8	ne	ne	$\sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}}$	3
30	4	9	ne	ne	$\sqrt{\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}}$	9
30	9	14	ne	da	$\sqrt{\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}}$	21
30	3	5	ne	ne	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	6
30	5	9	ne	da	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	12

Tabela 5.3: Vsi I-grafi $I(n, j, k)$ za $n \leq 1000$, ki imajo nedegenerirano predstavitev z enotsko razdaljo $\rho_{n,j,k}$ in rotacijsko simetrijo, ki zadošča vsaj eni izmed naslednjih lastnosti: $\rho_{n,j,k}$ ni koordinatizacija z enotsko razdaljo oziroma $\rho_{n,j,k}$ je visoko degenerirana, tako da leži vozlišče notranjega obroča na špici. Vse visoko degenerirane predstavitve z enotsko razdaljo in rotacijsko simetrijo iz trditve 121 so koordinatizacije z enotsko razdaljo. Izomorfni grafi sestavljajo označene skupine in najmanjši graf glede na leksikografsko ureditev (predstavnik skupine) je označen odebeljeno. Nekateri izmed naštetih I-grafov imajo več kot eno komponento.

^aZnano je, da trigonometrične funkcije v $\frac{a\pi}{9}$, kjer je a celo število, ki ni deljivo s 3, ne morejo biti izražene kot vsote, produkti oziroma (končni) koreni racionalnih števil.

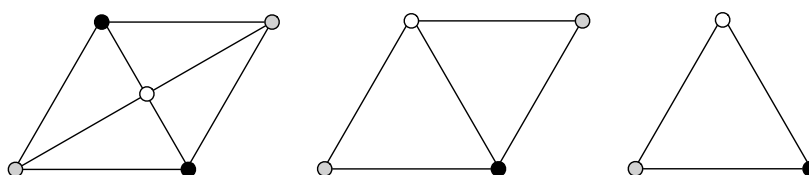


Slika 5.17: Vse predstavitve z enotsko razdaljo in rotacijsko simetrijo povezanega I-grafa, ki niso koordinatizacije z enotsko razdaljo. Od leve proti desni, od zgodaj navzdol so: $I(8, 1, 3)$, $I(9, 1, 2)$, $I(9, 1, 4)$, $I(9, 2, 4)$, $I(12, 1, 2)$, $I(12, 2, 5)$, $I(30, 2, 3)$, $I(30, 3, 8)$, $I(30, 4, 9)$, $I(30, 9, 14)$, $I(30, 3, 5)$ in $I(30, 5, 9)$. Vsaka premica, ki poteka po predstavitvi poljubne špice vsebuje natanko štiri točke.

Poglavje 6

Izračunljivost

Kljub temu, da je dimenzija kolesa W_5 na petih vozliščih $\dim(W_5) = e(W_5) = 3$, glej trditve 29, obstajata degenerirani predstavitvi grafa W_5 z enotsko razdaljo v ravnini, glej sliko 6.1.



Slika 6.1: Kolo W_5 (levo), ki ga je mogoče pobarvati s tremi barvami ni graf z enotsko razdaljo v ravnini. Če identificiramo vozlišči pobarvani s črno barvo dobimo degenerirano predstavitev z enotsko razdaljo v ravnini (sredina). S tem, ko identificiramo še vozlišči pobarvani s sivo barvo, dobimo novo degenerirano predstavitev z enotsko razdaljo v ravnini (desno).

Torej lahko postavimo vprašanje: “Ali za dani graf G in naravno število k obstaja degenerirana k -razsežna predstavitev z enotsko razdaljo grafa G ?”. Namesto na to lahko odgovorimo na ekvivalentno vprašanje: “Ali je za dani graf G in naravno število k graf G homomorfen grafu z dimenzijo k ?”. Podobni vprašanji si lahko zastavimo tudi za evklidsko dimenzijo grafa.

Za graf z vsaj eno povezavo potrebujemo vsaj eno dimenzijo, zato je K_1 edini (enostaven, povezan) graf z dimenzijo nič. Na premici obstajata le dve točki, ki sta ena oddaljeni od izbrane točke, zato za nedegenerirano predstavitev vozlišča s stopnjo vsaj tri potrebujemo vsaj dve dimenziji. Cikla na premici ne moremo nedegenerirano predstaviti z enotsko razdaljo; torej velja, da so (povezani) grafi z dimenzijo ena brez ciklov in z vozlišči s stopnjami največ 2, takim zahtevam ustrezajo le poti na vsaj dveh vozliščih. Tako lahko v linearnem času preverimo

ali je povezan graf na vsaj dveh vozliščih homomorfen grafu z enotsko razdaljo na premici – preverimo, da je stopnja grafa največ dva in da obstajata natanko dve vozlišči s stopnjo ena. Podobno razmislimo za evklidsko dimenzijo grafa.

V razdelku 6.2 bomo pokazali, da sta problem odločitve “Ali je dani graf G homomorfen grafu z dimenzijo $k \geq 2$?” in problem odločitve “Ali je dani graf G homomorfen grafu z evklidsko dimenzijo $k \geq 2$?” \mathcal{NP} -polna problema.

6.1 Sfere

S $S_k(\vec{s}, r)$ bomo označili k -dimenzionalno (hiper)sfero v \mathbb{R}^k s središčem v točki \vec{s} in z radijem r . Kjer središče in radij ne bosta pomembna, bomo pisali S_k . Vemo, da se krožnici v evklidski ravnini z različnima središčema lahko sekata v največ dveh točkah; ta rezultat v lemi 123 posplošimo na višje dimenzije.

Lema 123. *Naj bo naravno število $k > 1$. Neprazen nedegeneriran presek dveh k -dimenzionalnih sfer z različnima središčema je $(k - 1)$ -dimenzionalna sfera.*

Dokaz. Naj bo $c, r, R > 0$. Zaradi simetrije lahko brez škode za splošnost postavimo prvo sfero v izhodišče $\vec{0}$ in drugo na x_1 koordinatno os v točko $\vec{c} = (c, 0, \dots, 0)$. Potem sta sferi $S_k(\vec{0}, r)$ in $S_k(\vec{c}, R)$ določeni z enačbama

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2 = r^2$$

in

$$(x_1 - c)^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2 = R^2.$$

Enačbi odštejemo in dobimo linearno enačbo za x_1 z rešitvijo $a := \frac{r^2 + c^2 - R^2}{2c}$. Vstavimo v prvo enačbo in dobimo $x_2^2 + \dots + x_k^2 = r^2 - a^2$. Ko je $r^2 - a^2 < 0$, sistem nima rešitve in sferi se ne sekata. Situacija $|a| = r$ predstavlja tangenti sferi, ki se sekata v točki (ki predstavlja degenerirano sfero). Naj bo torej $r^2 - a^2 > 0$. Potem enačba $x_2^2 + \dots + x_k^2 = r^2 - a^2$ določa presek, ki je $(k - 1)$ -dimenzionalna sfera v hiperravnini $x_1 = a$ v \mathbb{R}^k . \square

Lema 124. *Naj bo S_2 krožnica v \mathbb{R}^2 , ki je očrtana enotski predstavitvi polnega grafa K_3 na treh vozliščih. Naj bo G povezan graf, ki ima predstavitev z enotsko razdaljo, ki vsa vozlišča iz G preslika na krožnico S_2 . Potem $\chi(G) \leq 3$.*

Dokaz. Graf K_3 lahko z enotsko razdaljo vložimo v ravnino le kot enakostranični trikotnik s stranico ena, temu pa lahko le na en način očrtamo krožnico v ravnini (sfero dimenzije 2);

recimo ji S_2 . Vsaka točka na S_2 ima natanko dve točki, ki sta od nje oddaljeni ena in ležita na S_2 . Ker ima graf G predstavitev z enotsko razdaljo na S_2 lahko zasede največ tri točke, ki so ravno ogljišča (morda nekega drugega) enakostraničnega trikotnika s stranico ena. Torej obstaja pravilno 3 barvanje grafa G - vozlišča pobarvamo kar s točkami enakostraničnega trikotnika. \square

Lemo 124 lahko posplošimo. Naj bo $G_{k,r,\alpha}$ graf, ki ga dobimo, če za vozlišča vzamemo točke k -dimenzionalne sfere $S_k(\vec{0}, r)$ z radijem r v \mathbb{R}^k , ter definiramo, da sta dve vozlišči sosednji natanko takrat, ko je (tetivna) razdalja med njima enaka α . L. Lovász je v [73] predstavil *krepko sebi dualne politope* dokazal naslednji neenakosti; glej tudi [81, 107, 112].

Izrek 125 ([73]). Naj bo $k \geq 3$. Potem za $0 \leq \alpha \leq 2$ velja

$$k \leq \chi(G_{k,1,\alpha})$$

in

$$\chi(G_{k,1,\sqrt{\frac{2(k+1)}{k}}}) \leq k + 1.$$

Izrek 126. Naj bo naravno število $k \geq 3$ in naj bo S_k sfera v \mathbb{R}^k , ki je očrtana enotski predstavitvi polnega grafa K_{k+1} na $k + 1$ vozliščih. Naj bo G povezan graf, ki ima predstavitev z enotsko razdaljo, ki vsa vozlišča iz G preslika na sfero S_k . Potem $\chi(G) \leq k + 1$.

Dokaz. Znano je, da je radij sfere, ki je očrtana regularnemu simpleksu s $k + 1$ vozlišči in stranico a enak $a\sqrt{\frac{k}{2(k+1)}}$. Torej je radij sfere S_k enak $\sqrt{\frac{k}{2(k+1)}}$. Predstavitev grafa $G_{k,\sqrt{\frac{k}{2(k+1)}},1$ na sferi S_k lahko skrčimo (skaliramo), da dobimo predstavitev na k -dimenzionalni enotski sferi z radijem ena, ki je očrtana regularnemu simpleksu s stranico dolžine $\sqrt{\frac{2(k+1)}{k}}$. Uporabimo izrek 125. Barvanje grafa $G_{k,1,\sqrt{\frac{2(k+1)}{k}}}$ implicira barvanje grafa $G_{k,\sqrt{\frac{k}{2(k+1)}},1$ na sferi S_k . Ker je G podgraf grafa $G_{k,\sqrt{\frac{k}{2(k+1)}},1$, velja $\chi(G) \leq k + 1$. \square

V knjigi [66] sta T. Jensen and B. Toft izpostavila podoben problem, ki v splošnem še vse do danes ni rešen: "Ali je res, da velja $\chi(G_{k,r,1}) = k + 1$ za $k \geq 3$ in $r > \frac{1}{2}$?" Leta 1988 sta C. D. Godsil in J. Zaks [42] pritrdila vprašanju na še en podoben problem [111], ki sta ga zastavila C. Blatter in J. Greene in se glasi: "Naj bo G graf, katerega vozlišča določajo točke na enotski sferi $S_3(\vec{0}, 1)$ v \mathbb{R}^3 in kjer sta vozlišči sosednji natanko takrat, ko je njuna sferična razdalja enaka $\frac{\pi}{2}$ (natanko takrat, ko sta njuna enotska vektorja pravokotna). Ali velja $\chi(G) = 4$?"

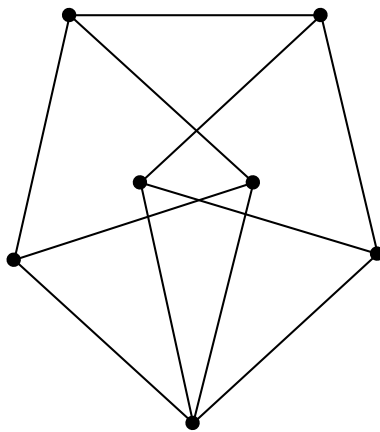
6.2 Problem obstoja degenerirane predstavitve grafa z enotsko razdaljo

Izrek 127 ([57]). *Problem odločitve ali je dani graf G homomorfen grafu z dimenzijo 2 in problem odločitve ali je dani graf G homomorfen grafu z evklidsko dimenzijo 2 sta \mathcal{NP} -polna problema.*

Dokaz. Zanima nas torej, ali za dani graf G obstaja tak graf H , da je $H = \phi(G)$, kjer je $\phi : G \mapsto H$ surjektivni homomorfizem grafov G in H in kjer je H graf z enotsko razdaljo (oz. graf z enotsko koordinatizacijo) v ravnini.

Pokažimo najprej, da sta problema tega izreka nedeterministično polinomska. Recimo, da nam je orakelj nedeterminističnega Turingovega stroja v odgovor podal seznam koordinat v \mathbb{R}^2 v katere slikamo vozlišča grafa G . Preveriti moramo, da sta poljubni sosednji vozlišči v G preslikani v točki, ki sta na razdalji ena. To storimo s kvadratično časovno zahtevnostjo v številu vozlišč grafa G . Pri evklidski dimenziji še preverimo, da sta poljubni točki, ki sta na razdalji ena sliki dveh sosednjih vozlišč v G ; tudi to storimo s kvadratično časovno zahtevnostjo. Oba problema sta torej iz \mathcal{NP} .

Redukcijo bomo izpeljali iz problema 3-izpolnjenosti (3SAT) in pri njej uporabili dobro znani Moserjev graf, glej sliko 6.2.



Slika 6.2: Moserjev graf je graf z enotsko koordinatizacijo v ravnini.

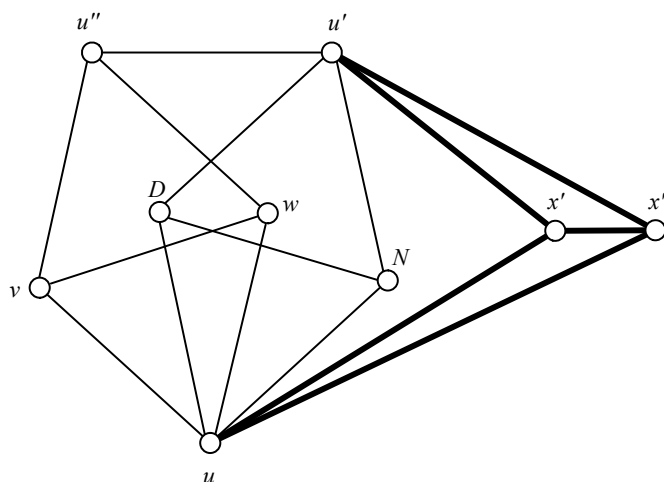
Moserjev graf (Moserjevo vreteno), glej [83], je graf z evklidsko dimenzijo 2, z natanko eno koordinatizacijo z enotsko razdaljo v ravnini. Po Lamanovem izreku (glej posledico 24) sledi, da je Moserjev graf (generično) tog. Še več, Moserjev graf nima druge (tudi degenerirane) predstavitve z enotsko razdaljo v ravnini (ne obstaja homomorfizem, ki bi slikal Moserjev

graf v drug graf z enotsko razdaljo). Če Moserjevemu grafu dodamo poljubno povezavo med nesosednjima vozliščema, potem dobimo graf z dimenzijo večjo od 2 (ki nima predstavitve z enotsko razdaljo v ravnini).

Problem 3-izpolnjenosti (3SAT) sprašuje po izpolnjenosti izjavne formule, ki je zapisana kot konjunkcija disjunkcij s po natanko tremi literali. Podano imamo množico logičnih spremenljivk X_Θ in izjavno formulo $\Theta = c_1 \wedge c_2 \wedge \dots \wedge c_t$, kjer so c_i , $1 \leq i \leq t$, člani oblike $c_i = \lambda_{c_i,1} \vee \lambda_{c_i,2} \vee \lambda_{c_i,3}$, in kjer $\forall j$, $1 \leq j \leq 3$, velja, da je $\lambda_{c_i,j}$ ali njegova negacija iz X_Θ . Problem sprašuje ali obstaja tak nabor logičnih vrednosti za spremenljivke iz X_Θ , da je Θ izpolnjena (resnična). Problem 3SAT je znan \mathcal{NP} -poln problem.

Za Θ bomo (v polinomskem času) skonstruirali graf G_Θ in pokazali, da je G_Θ homomorfen grafu z enotsko koordinatizacijo v ravnini, če je izjavna formula Θ izpolnjiva. Nato bomo pokazali, da v primeru, ko Θ ni izpolnjiva, graf G_Θ ni homomorfen nobenemu grafu z enotsko razdaljo v ravnini. Vsak graf z enotsko koordinatizacijo je graf z enotsko razdaljo, zato bomo s tem pokazali obe izjavi tega izreka.

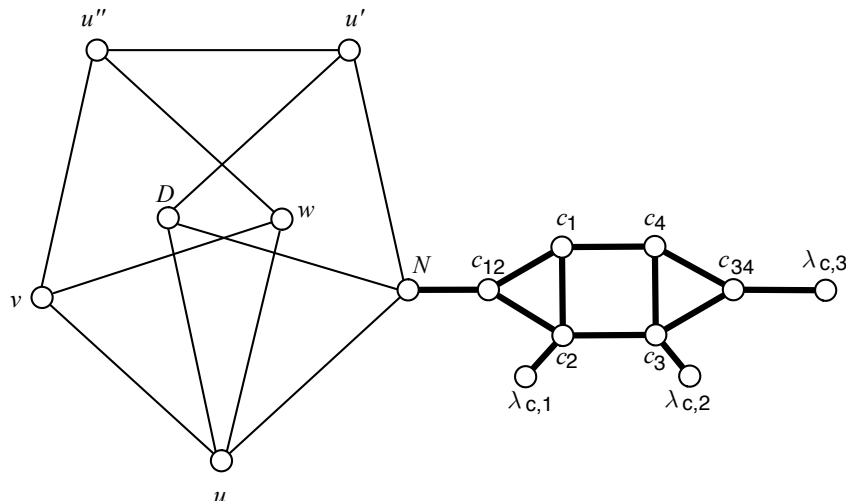
Vzemimo Moserjev graf in poimenujmo njegova vozlišča z u, v, w, u', u'', D, N , tako kot na neodebeljenem delu grafa na sliki 6.3. Vozlišči D in N bosta predstavljal vrednosti da in ne. Za vsako logično spremenljivko $x \in X_\Theta$ Moserjevemu grafu dodamo vozlišči x' in x'' ter povezave $x' \sim x''$, $x' \sim u$, $x'' \sim u$, $x' \sim u'$ in $x'' \sim u'$, tako kot je prikazano na odebeljenem delu grafa na sliki 6.3. Vozlišče x' predstavlja situacijo, ko je $x = da$, vozlišče x'' pa situacijo, ko je $x = ne$.



Slika 6.3: Konstrukcija dela grafa G_Θ k spremenljivki x .

Za vsak člen $c = \lambda_{c,1} \vee \lambda_{c,2} \vee \lambda_{c,3}$ dosedanji konstrukciji dodamo gradnik, ki je prikazan odebeljeno na sliki 6.4. Vozlišča z valenco ena $\lambda_{c,1}$, $\lambda_{c,2}$ in $\lambda_{c,3}$ predstavljajo literale, ki nasto-

pajo v členu c . Natančneje, če je i -ti literal v členu c logična spremenljivka $x \in \Theta$ (ali njena negacija), potem je vozlišče ki ustreza $\lambda_{c,i}$ kar vozlišče x' (oziroma x'' v primeru negacije).



Slika 6.4: Konstrukcija dela grafa G_Θ k členu $c = \lambda_{c,1} \vee \lambda_{c,2} \vee \lambda_{c,3}$.

Formalno je tako graf G_Θ graf z množico vozlišč

$$V(G_\Theta) = \{u, v, w, u', u'', D, N\} \cup \bigcup_{x \in X_\Theta} \{x', x''\} \cup \bigcup_{c \in \Theta} \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_{12}, c_{34}\}$$

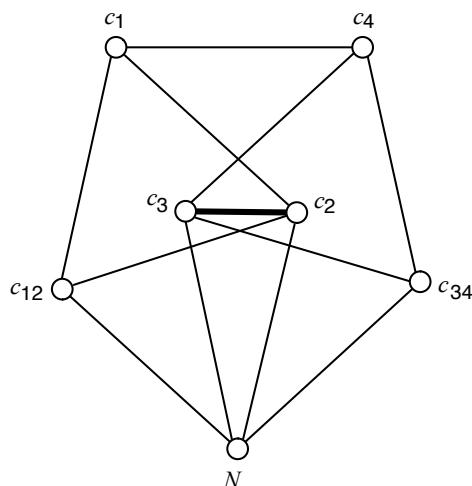
in množico povezav

$$\begin{aligned} E(G_\Theta) = & \{u \sim D, u \sim N, D \sim N, D \sim u', N \sim u', u \sim v, u \sim w, v \sim w, \\ & v \sim u'', w \sim u'', u' \sim u''\} \cup \\ & \bigcup_{x \in X_\Theta} \{x' \sim x'', x' \sim u, x'' \sim u, x' \sim u', x'' \sim u'\} \cup \\ & \bigcup_{c \in \Theta} \{c_1 \sim c_2, c_2 \sim c_3, c_3 \sim c_4, c_4 \sim c_1, c_1 \sim c_{12}, c_2 \sim c_{12}, c_3 \sim c_{34}, \\ & c_4 \sim c_{34}, c_{12} \sim N, c_2 \sim \lambda_{c,1}, c_3 \sim \lambda_{c,2}, c_{34} \sim \lambda_{c,3}\}. \end{aligned}$$

Predpostavimo da je G_Θ homomorfen grafu H z enotsko koordinatizacijo v ravnini. Potem ima H nedegenerirano predstavitev z enotsko razdaljo v ravnini, recimo ji ρ . Med dvema točkama v ravnini obstajata največ dve poti dolžine dve, ki sta sestavljeni iz po dveh daljic dolžine ena. Med predstavitvama vozlišč u in u' obstajata poti dolžine dve, ena vsebuje predstavitev vozlišča D in druga predstavitev vozlišča N . Zato mora ρ podgraf G_x , ki predstavlja logično spremenljivko x , preslikati čez inducirani podgraf $G_\Theta[\{u, u', D, N\}]$ grafa G_Θ , ki je napet na vozliščih u, u', D, N . Torej $\rho(x') = \rho(D)$ (ali $\rho(x') = \rho(N)$) ter $\rho(x'') = \rho(N)$ (ali

$\rho(x'') = \rho(D)$). Rekli bomo, da je vrednost spremenljivke $x = \text{da}$, če je $\rho(x') = \rho(D)$. V nasprotnem primeru bo vrednost $x = \text{ne}$. Pokazati moramo, da je Θ izpolnjena. Dokazovali bomo s protislovjem. Privzemimo, da Θ ni izpolnjena. Potem obstaja člen c , za katerega velja

$$\lambda_{c,1} = \lambda_{c,2} = \lambda_{c,3} = \text{ne}.$$

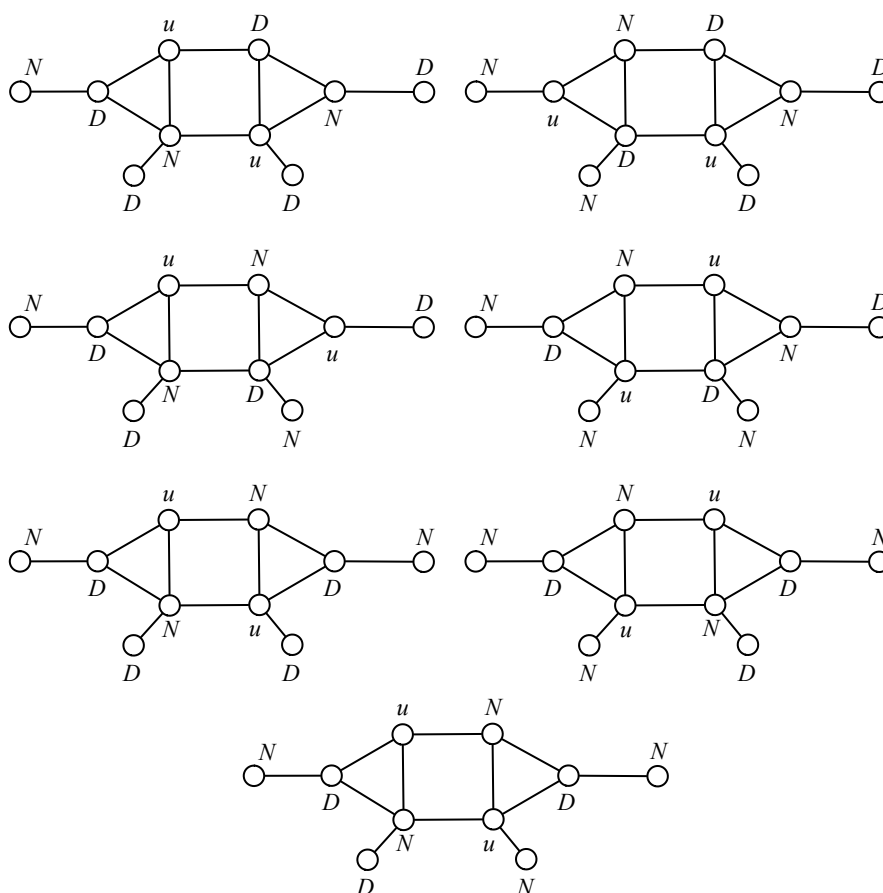


Slika 6.5: Konstrukcija grafa G_c k členu c , za katerega velja $\lambda_{c,1} = \lambda_{c,2} = \lambda_{c,3} = \text{ne}$. Graf G_c ni graf z enotsko razdaljo, saj vsebuje povezavo $c_2 \sim c_3$, ki v ravnini ne more biti dolga ena.

Zato vsebuje skonstruiran podgraf G_c k členu c Moserjev graf, kjer je vozlišče stopnje 4 Moserjevega podgrafa pripeto v $N = \text{ne}$, glej sliko 6.5. Med vozliščema c_2 in c_3 pa obstaja povezava, ki je v Moserjevem grafu ni. Vsak podgraf grafa G_Θ mora biti (ne nujno surjektivno) homomorfen grafu H z enotsko razdaljo v ravnini, torej tudi G_c . Vendar G_c ni graf z enotsko razdaljo, saj povezava $c_2 \sim c_3$ dodana Moserjevemu grafu, ne more biti dolga ena. Torej smo v protislovju.

Predpostavimo sedaj, da je izjavna formula Θ izpolnjena z naborom logičnih spremenljivk iz množice X_Θ . Osnovni Moserjev podgraf grafa G_Θ vložimo z enotsko razdaljo v ravnino s predstavitvijo ρ . Vrednost logične spremenljivke $x \in X_\Theta$ definira sliki vozlišč x', x'' ; če je $x = \text{da}$, potem je $\rho(x') = \rho(D)$ in $\rho(x'') = \rho(N)$, sicer sliki vozlišč med seboj zamenjamo. Grafe prirejene členom vložimo glede na vrednosti literalov $\lambda_{c,1}, \lambda_{c,2}, \lambda_{c,3}$ v skladu s pravili na sliki 6.6. Vsaj eden izmed literalov v vsakem členu ima vrednost da, zato moramo definirati sedem pravil, ki bodo definirala homomorfizem podgrafa prirejenega poljubnemu členu.

Preverimo lahko, da je neodvisno od vrednosti treh literalov v členu c , graf prirejen členu c homomorfen polnemu grafu K_3 z vozlišči u, N, D , ki ga je mogoče homomorfno preslikati na Moserjev graf. Homomorfna slika grafa G_Θ je torej Moserjev graf z evklidsko dimenzijo 2. \square



Slika 6.6: Pravila za predstavitev z enotsko razdaljo grafa prirejenega izpolnjenemu členu c izjavne formule Θ .

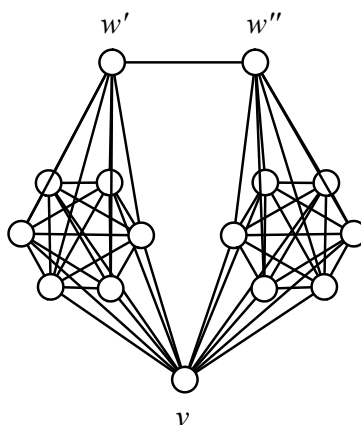
Izrek 128. *Problem odločitve ali je dani graf G homomorfen grafu z dimenzijo $k \geq 3$ in problem odločitve ali je dani graf G homomorfen grafu z evklidsko dimenzijo $k \geq 3$ sta \mathcal{NP} -polna problema.*

Dokaz. Podobno kot pri dokazu izreka 127 dokažemo, da sta problema iz \mathcal{NP} .

“Ali za podana graf G in naravno število $c > 0$ obstaja pravilno barvanje za G , ki uporabi največ c barv?” oziroma ekvivalentno “Ali je za podana graf G in naravno število $c > 0$ kromatično število grafa $\chi(G) \leq c$?” je znan \mathcal{NP} -poln problem. Redukcijo problemov tega izreka bomo izpeljali iz problema kromatičnega števila grafa.

Naj bosta K'_k in K''_k dve kopiji polnega grafa s po $k \geq 3$ vozlišči. Naj bodo v, w', w'' vozlišča, za katere velja $v, w', w'' \notin V(K'_k) \cup V(K''_k)$. Konstruirajmo grafa $M'_k = K'_k * \{v, w'\}$ in $M''_k = K''_k * \{v, w''\}$ ter graf $M_k = M'_k \cup M''_k \cup \{w' \sim w''\}$, za primer glej sliko 6.7. Taki konstrukciji pravimo *Moser-Raiskii-jevo vreteno*.

Po izreku 26 sta evklidska dimenzija in dimenzija polnega grafa na k vozliščih enaki $k -$



Slika 6.7: Graf M_6 je sestavljen iz simetričnih delov, ki sta spoj polnega grafa na šestih vozliščih in dveh nesosednjih vozlišč.

1. Ko naredimo spoj z vozliščem v , se dimenziji povečata za ena (dobimo ravno K_{k+1}), ko povežemo vozlišča polnega grafa na k vozliščih še z vozliščem w' (ali w'') pa se dimenziji sestavljenega grafa ne spremenita. Torej je $e(M'_k) = e(M''_k) = \dim(M'_k) = \dim(M''_k) = k$. Tako M'_k kot M''_k sta toga. Grafa M'_k in M''_k realiziramo z enotsko razdaljo v \mathbb{R}^k . Potem lahko v uniji $M'_k \cup M''_k$ zarotiramo M''_k okoli slike vozlišča v , tako da sta w' in w'' ena oddaljeni druga od druge. Torej ima tudi M_k dimenzijo k . Podgraf K''_k zarotiramo okoli premice, ki poteka skozi predstavitvi vozlišč v in w'' . Enostavno je premisliti da ležijo fiksne točke (točke, katerih koordinate rotacija ohranja) le na osi rotacije in da na osi rotacije ni predstavitve vozlišča iz K''_k ; vozlišča K''_k ležijo namreč na $(k-1)$ -dimenzionalni sferi in so oddaljena ena tako od v kot od w . Ker imamo neštavno mnogo možnih kotov rotacije in le števno mnogo problemov (degeneracij in nekoordinatizacij), se problemom brez težav izognemo. Z rotacijo lahko torej dosežemo, da ima M_k k -razsežno koordinatizacijo z enotsko razdaljo; torej je evklidska dimenzija $e(M_k) = k$.

Konstruiramo graf H_k , tako da $V(H_k) = V(G) \cup V(M_k)$ in

$$E(H_k) = E(G) \cup E(M_k) \cup \bigcup_{u \in V(G)} \{u \sim v, u \sim w'\},$$

kjer sta vozlišči v, w' prej omenjeni vozlišči iz M_k . Pokazali bomo, da ko je H_k homomorfen k -razsežnemu grafu z enotsko razdaljo, je $\chi(G) \leq k$. Nato bomo pokazali, da iz $\chi(G) \leq k$ sledi da je H_k homomorfen k -razsežnemu grafu z enotsko koordinatizacijo.

Naj ima H_k predstavitev z enotsko razdaljo ρ v \mathbb{R}^k . Potem so vsa vozlišča grafa G oddaljena ena tako od $\rho(v)$ kot od $\rho(w')$ ter ležijo na preseku dveh enotskih sfer dimenzij k s središči v $\rho(v)$ in $\rho(w')$. Na istem preseku sfer ležijo tudi vsa vozlišča polnega grafa K'_k . Po lemi 123

je neprazen nedegeneriran presek dveh sfer dimenzije k sfera dimenzije $k - 1$, ki je v našem primeru očrtana realizaciji z enotsko razdaljo polnega grafa K'_k v \mathbb{R}^{k-1} . Če je graf G povezan, lahko uporabimo izrek 126 in $\chi(G) \leq k$. Če G ni povezan, lahko podobno obravnavamo vsako njegovo komponento.

Naj bo sedaj $\chi(G) \leq k$. Potem lahko vsako vozlišče grafa G preslikamo v vozlišča polnega grafa K'_k , glej na primer [50]. Tako je $H_k = M_k$ in H_k je k -razsežen graf z enotsko koordinatizacijo.

Vsak k -razsežen graf z enotsko koordinatizacijo je k -razsežen graf z enotsko razdaljo, zato smo s tem pokazali obe izjavi tega izreka. \square

6.3 Problem obstoja nedegenerirane predstavitve grafa z enotsko razdaljo

Problem *rekonstrukcije grafa* sprašuje po koordinatah evklidske realizacije danega grafa, ki zadoščajo pogojem, ki izhajajo iz znanih (podanih) dolžin povezav, glej na primer [116]. Problem rekonstrukcije grafa je \mathcal{NP} -težek problem, J. B. Saxe je v [104] pokazal, da je problem rekonstrukcije grafa v eni dimenziji krepko \mathcal{NP} -poln, v višjih dimenzijah pa krepko \mathcal{NP} -težek. Podoben problem *enolične realizacije* sprašuje po tem “ali za dani graf obstaja natanko ena (toga) evklidska realizacija z danimi dolžinami povezav”, kjer odmislimo translacije, rotacije in zrcaljenja evklidskega prostora. J. B. Saxe je v [104] pokazal, da je problem enolične realizacije v splošnem vsaj tako težek kot problem rekonstrukcije. V praksi to pomeni, da je malo verjetno, da bi našli učinkovita splošna algoritma, ki bi rešila zgornja problema v splošni obliki.

P. Eades in S. Whitesides sta v [27] prevedla znani \mathcal{NP} -težek problem NAE3SAT (posebna izpeljanka problema 3SAT, pri kateri zahtevamo, da vsak člen vsebuje vsaj en resničen in vsaj en neresničen literal) na problem konstrukcije ravninske predstavitve z enotsko razdaljo za dani ravninski graf. Za konstrukcijo mehanske naprave, ki sta ji rekla “logični okvir” in ki je preverjala resničnost izjavne formule problema NAE3SAT, sta uporabila kar izjavni formuli prirejen graf vžigalic.

Izrek 129 ([27]). *Problem realizacije ravninskega grafa G kot graf vžigalic v ravnini je \mathcal{NP} -težek problem.*

V splošnem je torej razpoznavanje grafa vžigalic \mathcal{NP} -težek problem. Znani so tudi rezul-

tati, ki govorijo o razpoznavanju posebnih družin grafov vžigalic.

Izrek 130 ([28]). *Problem realizacije dva-povezanega grafa G kot graf vžigalic v ravnini je \mathcal{NP} -težek problem.*

Naj bo P problem “Kako je mogoče realizirati tri-povezan infinitezimalno togi graf G v ravnini kot graf vžigalic?”. S polinomsko prevedbo problema P na problem ravninske tri-izpolnjenosti (P3SAT), ki je krepko \mathcal{NP} -poln, so avtorji v [13] pokazali, da je problem P \mathcal{NP} -težek problem. Tudi njihova prevedba je vsebovala izjavni formuli prirejeno mehansko napravo, realizirano z grafom vžigalic.

Izrek 131 ([13]). *Problem realizacije tri-povezanega infinitezimalno togega grafa G v ravnini kot graf vžigalic \mathcal{NP} -težek problem.*

Vemo, da je, ko opazujemo le generične evklidske realizacije, graf tog natanko takrat, ko je infinitezimalno tog. Zato ostane problem \mathcal{NP} -težek tudi takrat, ko je graf generično tog. Problem ostane \mathcal{NP} -težek tudi takrat, ko privzamemo da imajo lica (razen morda zunanega lica) omejene stopnje, glej [13]. Zanimivo je, da je mogoče zelo podobne grafe - ravninske tri-povezane triangulacije, tudi ko zunanje lica ni nujno trikotnik, v ravnino vložiti v linearnem času.

Izrek 132 ([13]). *Naj bo $G = (V, E)$ tri-povezan graf z znanimi dolžinami povezav. Na modelu RAM, ki podpira aritmetične operacije $+$, $-$, \times , \div , $\sqrt{\quad}$, je mogoče v linearnem času $O(|V|)$ odločiti ali ima G evklidsko vložitev v ravnini, ki upošteva dolžine povezav in za katero velja, da so vsa lica trikotniki (izjema je lahko le zunanje lica).*

Poglavje 7

Dilacijski koeficient

Za motivacijo si pogledjmo naslednji primer. V poljubni ravninski evklidski predstavitvi K_4 je razmerje med najdaljšo in najkrajšo povezavo vedno vsaj $\sqrt{2}$. Spodnja meja je dosežena, ko vsako izmed vozlišč grafa K_4 preslikamo v svoje oglišče kvadrata s stranico dolgo ena. Če bi lahko polni graf na štirih vozliščih narisali v ravnini z enotsko razdaljo bi to pomenilo, da bi bilo razmerje med najdaljšo in najkrajšo povezavo enako ena, kar pa je manj kot $\sqrt{2}$. Za dano predstavitev ρ grafa G nam razmerje med najdaljšo in najkrajšo povezavo intuitivno predstavlja “kako blizu” je ρ predstavitvi grafa z enotsko razdaljo.

V tem poglavju bomo obravnavali teoretično ozadje algoritmičnega risanja grafov v evklidsko ravnino, ki temelji na lokalni optimizaciji skupne “energije” evklidske predstavitve grafa, glej na primer [91, 98]. Algoritmi za risanje grafov pri izračunavanju skupne “energije” navadno upoštevajo le razdalje med sosednjimi in nesosednjimi vozlišči; za različne modele glej tudi [24, 37, 69, 95, 96, 97, 7].

Energija evklidske predstavitve ρ grafa G , ki jo bomo opazovali v tem poglavju bo kar kvocient med najdaljšo in najkrajšo predstavitvijo povezave grafa G . Temu kvocientu pravimo *dilacijski koeficient* predstavitve ρ . Najmanjši dilacijski koeficient po vseh ravninskih evklidskih predstavitev grafa G imenujemo dilacijski koeficient grafa G . Dilacijski koeficient grafa je grafovski invarianta. Molekularni grafi imajo dilacijski koeficient blizu 1, za splošne grafe pa je izračun dilacijskega koeficienta kar težka naloga. Grafi za katere je dilacijski koeficient enak 1 so ravno grafi z enotsko razdaljo, po drugi strani pa ima polni graf K_n za dano število vozlišč n maksimalni dilacijski koeficient in zato predstavlja zgornjo mejo za dilacijski koeficient poljubnega grafa na n vozliščih.

Obravnavali bomo dilacijske koeficiente več ravninskih evklidskih predstavitev polnih grafov. S študijem koncentričnih predstavitev polnih grafov bomo dobili spodnje in zgornje meje

za dilacijski koeficient polnega grafa. Analizirali bomo algoritme za risanje grafov v ravnini, ki minimizirajo dilacijski koeficient predstavitve. Predstavili bomo dva iterativna algoritma za risanje grafov in dilacijske koeficiente njunih predstavitev polnega grafa primerjali z zgornjimi in s spodnjimi mejami za dilacijski koeficient polnega grafa.

7.1 Dilacijski koeficient

Motivirani z zgornjim primerom bomo torej opazovali razmerje med najdaljšo in najkrajšo dolžino povezave nedegenerirane 2-razsežne evklidske predstavitve danega grafa. Naj bo k pozitivno naravno število, G poljuben graf in ρ nedegenerirana evklidska predstavitve grafa G v \mathbb{R}^k , tako da za vsako povezavo $e \in E(G)$ velja $\|\rho(e)\| > 0$. *Dilacijski koeficient* $\text{dil}(\rho, G)$ nedegenerirane evklidske predstavitve ρ grafa G je definiran kot

$$\text{dil}(\rho, G) = \frac{\max_{e \in E(G)} \|\rho(e)\|}{\min_{e \in E(G)} \|\rho(e)\|}.$$

Opazimo, da za dilacijski koeficient poljubne nedegenerirane evklidske predstavitve ρ poljubnega grafa G velja $\text{dil}(\rho, G) \geq 1$. Grafi, ki imajo v \mathbb{R}^k dilacijski koeficient enak ena, so natanko grafi z enotsko razdaljo v \mathbb{R}^k . Zanima nas torej predstavitve danega grafa G s čim manjšim dilacijskim koeficientom.

Pravimo, da sta evklidski predstavitvi ρ in ρ' grafa G *ekvivalentni*, če obstaja pozitivna konstanta $c \geq 0$, tako da za vsak par vozlišč $u, v \in V(G)$ grafa G velja

$$d(\rho(u), \rho(v)) = c d(\rho'(u), \rho'(v)),$$

kjer je d evklidska razdalja med dvema točkama. Lahko je preveriti, da imata ekvivalentni evklidski predstavitvi enaka dilacijska koeficienta. To pomeni, da lahko privzamemo, da je najmanjša dolžina povezave evklidske predstavitve ρ grafa G enaka $\min_{e \in E(G)} \|\rho(e)\| = 1$. Rekli bomo, da je dilacijski koeficient (v prostoru \mathbb{R}^k) grafa G enak

$$\text{dil}(G) = \min_{\rho} \text{dil}(\rho, G),$$

po vseh (k -razsežnih) nedegeneriranih evklidskih predstavitev ρ grafa G .

Naslednje vprašanje se ponuja samo po sebi: “Kako v \mathbb{R}^k nedegenerirano evklidsko predstaviti enostaven, povezan graf G , tako da bo dilacijski koeficient minimalen?”. V naslednjem razdelku bomo predstavili dva algoritma, ki bosta z optimizacijskim postopkom narisala graf v

evklidski ravnini. Njune predstavitve bomo primerjali s predstavitevami, ki jih dobimo z dobro znanim algoritmom za vlaganje z vzmetmi. Vsaka predstavitev, ki jo dobimo na tak način poda zgornjo mejo za dil (G), spodnje meje pa dobimo veliko težje.

7.2 Energija predstavitev in algoritmi za risanje grafov v ravnini

V tem razdelku bomo kot orodje za medsebojno primerjavo evklidskih predstavitev definirali energijo evklidske predstavitve grafa. Iskanje optimalne evklidske predstavitve grafa lahko predstavimo kot problem minimizacije energije predstavitve za primeren energijski model.

Naj bosta k in p pozitivni števili in naj bo ρ evklidska predstavitev grafa G v \mathbb{R}^k . Predstavitvi ρ grafa G priredimo pozitivno število $\mathcal{E}(\rho) > 0$, ki mu pravimo *energija predstavitve* ρ , [98]. *Energijsko funkcijo* $\mathcal{E} : \rho \rightarrow \mathbb{R}$ predstavitve ρ grafa G lahko izberemo na več načinov. Algoritmi za risanje grafov pogosto uporabljajo bolj splošne energijske funkcije [1, 37, 68, 98], v tej disertaciji pa se bomo osredotočili na $\mathcal{E}_\infty(\rho, G) := \max_{e \in E(G)} \|\rho(e)\|$. Če opazujemo le predstavitve z $\min_{e \in E(G)} \|\rho(e)\| = 1$, algoritmi, ki minimizirajo energijsko funkcijo \mathcal{E}_∞ , obenem minimizirajo tudi dilacijski koeficient grafa G . Opazimo, da je \mathcal{E}_∞ limita energijske funkcije

$$\mathcal{E}_p(\rho, G) = \sqrt[p]{\sum_{e \in E(G)} \|\rho(e)\|^p},$$

ko gre $p \rightarrow \infty$, glej [98].

Pomembna družina algoritmov za risanje grafov so tako imenovani *algoritmi za vlaganje z vzmetmi* (ang. spring embedders, znani tudi kot force-directed placement algorithms). Poenostavljeno, algoritmi za vlaganje z vzmetmi obravnavajo graf kot fizikalni mehanizem, tako da vsako povezavo v grafu nadomestijo z vzmetjo, ki je pripeta med krajišči povezave in definirajo dve sili, prva deluje odbojno med poljubnima vozliščema, druga pa privlačno med sosednjima vozliščema. Velikost sile, ki deluje med vozliščema, je odvisna od razdalje med tema dvema vozliščema. Energijska funkcija predstavitve je definirana kot vsota vseh delnih energij, ki nastanejo med vsemi pari vozlišč. Minimalna energija predstavitve ustreza ravnovesju sil. Problem minimiziranja energije je potem rešen z lokalno optimizacijo ali s tehnikami simuliranega ohlajanja, za več glej na primer [24].

Algoritem za vlaganje z vzmetmi, ki deluje dobro na splošnih grafih sta predstavila T. Fruchterman in E. Reingold v [37]. Definirala sta privlačno silo $f_p(l) = \frac{l^2}{k}$ in odbojno silo

$f_o(l) = \frac{k^2}{l}$, kjer je $l = \|\rho(u) - \rho(v)\|$. Odbojna sila $f_o(l)$ deluje na vseh parih vozlišč, medtem ko deluje privlačna sila $f_p(l)$ le na sosednjih parih vozlišč. Konstanta $k > 0$ predstavlja "željeno" dolžino (vseh) povezav in je navadno izbrana tako, da predstavlja polmer praznega prostora okoli predstavitve (vsakega) vozlišča; za več glej [37]. Čeprav sta avtorja govorila o privlačnih in odbojnih silah, energijske funkcije ne omenjata. Naslednja enačba je energijska funkcija za njun algoritem:

$$\mathcal{E}_{FR}(\rho, G) = \sum_{v \in V} \left(\sum_{u \in N(v)} \frac{\|\rho(u) - \rho(v)\|^3}{3k} - k^2 \sum_{u \in V} \log \|\rho(u) - \rho(v)\| \right),$$

kjer $N(v)$ predstavlja množico vseh v grafu G vozlišču v sosednjih vozlišč in $V = V(G)$.

Dilacijske koeficiente predstavitev, ki jih bomo dobili s tremi algoritmi za risanje grafov, bomo primerjali s teoretično dobljenimi mejami za dilacijski koeficient polnih grafov, glej tabelo 7.1. Algoritem za vlaganje z vzmetmi, ki uporablja odbojne in privlačne sile kot sta jih definirala T. Fruchterman and E. Reingold (poimenovali ga bomo *FRAIlg*) bo služil za osnovo, s katero bomo primerjali rezultate drugih dveh algoritmov.

Naj bo r_{ij} željena razdalja (ali *zveza*, kot ji pravi D. K. Agrafiotis v [1]) med sosednjima vozliščema i in j in naj bo d_{ij} dejanska (trenutna) razdalja med predstavitevama sosednjih vozlišč i in j . Prvi algoritem, poimenovali ga bomo *SPEAlg*, uporablja idejo stohastične predstavitve grafov glede na bližino (ang. stochastic proximity embedding, oziroma SPE) [1]. V linearnem času poskuša konstruirati optimalno predstavitev polnega grafa tako, da minimizira vsoto kvadratov napak, kot sta na primer *Sammonova napetost*

$$\frac{\sum_{i < j} \frac{(d_{ij} - r_{ij})^2}{r_{ij}}}{\sum_{i < j} r_{ij}}$$

ali *Kruskalova napetost*

$$\sqrt{\frac{\sum_{i < j} (d_{ij} - r_{ij})^2}{\sum_{i < j} d_{ij}^2}}.$$

V našem primeru je $r_{ij} = 1$, zato lahko zgornji enačbi prepisemo v $\frac{2}{n(n-1)} \sum_{i < j} (d_{ij} - 1)^2$ in $\sqrt{\frac{\sum_{i < j} (d_{ij} - 1)^2}{\sum_{i < j} d_{ij}^2}}$.

SPEAlg iteracijsko krči oziroma razteguje predstavitve povezav grafa. Algoritem izvede izbrano število iteracij in znotraj vsake iteracije izbrano število korakov. Začne v naključni postavitvi vozlišč v k -dimenzionalnem evklidskem prostoru in iterativno izboljšuje trenutno predstavitev, tako da v vsakem koraku vsake iteracije izbere naključno povezavo in prilagodi njene koordinate, da postane dolžina povezave enaka ena. Velikost teh prilagoditev kontroliramo

s parametrom (navadno ga imenujemo *temperatura*), ki ga zmanjšujemo (oziroma *ohlajamo*) in se s tem izogibamo oscilacijam. Algoritem je robusten, kljub linearni časovni zahtevnosti dobro konvergira in ga je mogoče enostavno implementirati.

Drugi algoritem za risanje grafov *SAAI*g za minimiziranje energijske funkcije $\mathcal{E}_\infty(\rho)$ in s tem dilacijskega koeficienta uporablja paradigmo simuliranega ohlajanja [24]. Predstavitve grafov obravnavamo kot stanja v diskretnem iskalnem prostoru in definiramo, da je predstavitev grafa ρ' *sosejna* predstavitvi grafa ρ , če se ρ' in ρ razlikujeta v natanko dveh točkah, ki sta predstavitvi sosednjih vozlišč u in v z lastnostjo $\|\rho'(u) - \rho(v)\| = 1$. Na vsakem koraku algoritma *SAAI*g z verjetnostjo, ki je odvisna od razlike med pripadajočima dilacijskima koeficientoma in od globalnega parametra T (pogosto mu pravimo kar *temperatura*) zamenjamo trenutno stanje ρ z naključnim sosednjim stanjem ρ' . Če je energija $\mathcal{E}_\infty(\rho) > \mathcal{E}_\infty(\rho')$ se v diskretnem sistemu stanj vedno premaknemo “navzdol” v boljše stanje ρ' , v nasprotnem primeru, če je $\mathcal{E}_\infty(\rho) \leq \mathcal{E}_\infty(\rho')$, pa se z verjetnostjo

$$e^{\frac{\mathcal{E}_\infty(\rho) - \mathcal{E}_\infty(\rho')}{T}}$$

premaknemo “navzgor” v slabše stanje ρ' . Temperaturo in s tem verjetnost prehodov v slabša stanja “navzgor” na vsakem koraku postopoma zmanjšujemo, oziroma kot pravimo, *sistem ohlajamo*. Ko je temperatura T velika sistem skoraj vedno prehaja v novo stanje, z ohlajanjem sistema pa se verjetnost prehodov “navzgor” zmanjšuje. Ker smo ob visoki temperaturi omogočili prehode tudi v slabša stanja smo s tem preprečili, da bi metoda obtičala v lokalnem minimumu.

7.3 Polni grafi

Naj bo naravno število $n > 2$. V tem razdelku bomo obravnavali dilacijski koeficient polnega grafa K_n na n vozliščih v ravnini.

Predpostavimo, da je $m \leq n$ vozlišč grafa K_n predstavljeno v ogljiščih konveksnega m -kotnika. Spomnimo se, da je imenovalec $\text{dil}(K_m)$ enak $\min_{\rho} \min_{e \in E(K_m)} \|\rho(e)\|$ in da lahko brez škode za splošnost privzamemo, da je enak 1. Ker želimo dobiti čimboljšo zgornjo mejo za dilacijski koeficient, moramo torej zmanjšati števec dilacijskega koeficienta. To lahko storimo tako, da zmanjšamo največjo diagonalo večkotnika - vsa vozlišča postavimo na krožnico in hkrati poskrbimo, da so vozlišča med seboj enako oddaljena.

Ta razmislek nas motivira, da bomo opazovali posebno predstavitev polnega grafa pri kateri vsa vozlišča ležijo na koncentričnih krožnicah (krožnicah z istim središčem).

Oglejmo si najprej dilacijski koeficient nedegenerirane ravninske evklidske predstavitev polnega grafa K_m na m vozliščih, kjer so vozlišča predstavljena enakomerno na (eni) orbiti (krožnici), tako da predstavljajo regularni m -kotnik. Takšni predstavitvi pravimo *orbitalna predstavitev* in jo označimo z $\rho_{\{m\}}$, kjer notacija pomeni, da imamo m vozlišč enakomerno razporejenih na eni sami orbiti. Za primer glej orbitalno predstavitev $\rho_{\{23\}}$ grafa K_{23} na sliki 7.2 (a). Dilacijski koeficient $\text{dil}_{\{m\}}(K_m)$ orbitalne predstavitve lahko izračunamo kot

$$\text{dil}_{\{m\}}(K_m) = \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{(m-1)\pi}{2m}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}, & m \text{ je lih,} \\ \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}, & m \text{ je sod.} \end{cases}$$

Vrednost $\text{dil}_{\{m\}}(K_m)$ predstavlja razmerje med dolžino najdaljše diagonale regularnega m -kotnika in dolžino njegove stranice. V regularnem m -kotniku velja, da je za $m \geq 4$ stranica krajša kot katerakoli izmed diagonal in da je za $m \geq 7$ stranica krajša kot polmer očrtanega kroga.

Ker je $\text{dil}_{\{i\}}(K_i) > \text{dil}_{\{j\}}(K_j)$ za $i > j$, i vozlišč na eni sami orbiti ne da vedno optimalnega dilacijskega koeficienta. Če je mogoče je smiselno postaviti j vozlišč na zunanjo orbito in $(i - j)$ vozlišč znotraj krožnice, tako da velja:

1. razdalja med poljubnima notranjima vozliščema je vsaj ena,
2. razdalja med poljubnim vozliščem na zunanji orbiti in poljubnim vozliščem znotraj krožnice je vsaj ena.

Naj bo $n = m_1 + m_2 + \dots + m_t$ razbitje celega števila n , kjer je $m_1 > 0$ in $m_2 \geq \dots \geq m_t > 0$. Takemu razbitju bomo rekli *regularno celoštevilsko razbitje* in ga označili z $\{m_1, m_2, \dots, m_t\}$. Definirajmo *regularno koncentrično predstavitev* $\rho_{\{m_1, m_2, \dots, m_t\}}$ grafa K_n glede na regularno celoštevilsko razbitje $\{m_1, m_2, \dots, m_t\}$, tako da obravnavamo dve možnosti: $m_t > 1$ in $m_t = 1$.

1. Prva možnost, $m_t > 1$. Vozlišča predstavimo kot enakomerno razporejene točke na t koncentričnih krožnicah z naraščajočimi polmeri $1, 2, \dots, t$ in s središči v izhodišču $\vec{0}$. Koordinate predstavitve i -tega vozlišča na j -ti krožnici s polmerom $t + 1 - j$, kjer je $1 \leq i \leq m_j$, so:

$$(t + 1 - j) \left\{ \cos\left(i \frac{2\pi}{m_j}\right), \sin\left(i \frac{2\pi}{m_j}\right) \right\}.$$

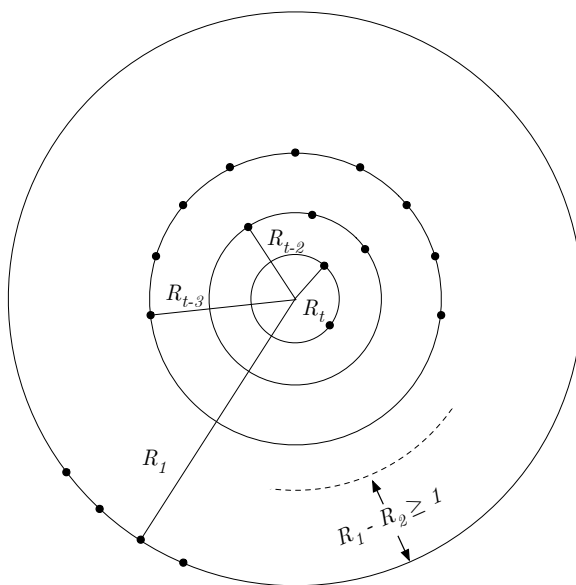
Predpostavimo lahko, da je $m_t < 7$, saj sta v nasprotnem primeru vsaj dve vozlišči na razdalji manj kot ena.

2. Druga možnost, $m_t = 1$. Eno vozlišče postavimo v izhodišče $\vec{0}$, ostala vozlišča pa na $(t - 1)$ koncentričnih krožnic z naraščajočimi polmeri $1, 2, \dots, t - 1$ in s središči v izhodišču $\vec{0}$. Lahko si mislimo da je polmer r_t enak 0 in opazujemo prvo možnost za razbitje $n - 1 = m_1 + m_2 + \dots + m_{t-1}$.

Za primer regularne koncentrične predstavitev $\rho_{\{4,12,6,1\}}$ grafa K_{23} glej sliko 7.2 (b).

Regularna koncentrična predstavitev $\rho_{\{m_1, m_2, \dots, m_t\}}$ polnega grafa K_n bo določala zgornjo mejo $\text{dil}_{\{m_1, m_2, \dots, m_t\}}(K_n)$ za $\text{dil}(K_n)$, ki jo bo mogoče enostavno izračunati. Lahko je razmisliti, da je največja razdalja med poljubnima vozliščema omejena s premerom največje orbite. Torej je $\text{dil}_{\{m_1, m_2, \dots, m_t\}}(K_n) \leq 2t$. V drugem primeru, ko je $m_t = 1$, je mogoče zgornjo mejo še izboljšati na $2t - 2$. V izrojenem primeru na vsaki orbiti leži natanko eno vozlišče, torej je takrat $\text{dil}_{\{m_1, m_2, \dots, m_n\}}(K_n) \leq n - 1$.

To grobo zgornjo mejo lahko še dodatno izboljšamo, glej sliko 7.1. Brez škode za splošnost privzemimo, da velja $m_t > 1$ in obravnavamo prvo možnost. S tem ko želimo zmanjšati števec dilacijskega koeficienta $\text{dil}_{\{m_1, m_2, \dots, m_t\}}(K_n)$, želimo v resnici zmanjšati število orbit t regularne koncentrične predstavitev $\rho_{\{m_1, m_2, \dots, m_t\}}$.



Slika 7.1: Vsaka nedegenerirana evklidska predstavitev grafa G poda zgornjo mejo za dilacijski koeficient $\text{dil}(G)$. Vozlišča polnega grafa lahko predstavimo na koncentričnih krožnicah s polmeri, ki se razlikujejo za več kot za ena. Obenem poskrbimo, da sta poljubni sosednji vozlišči na isti krožnici oddaljeni vsaj ena.

Polmer očrtanega kroga regularnemu m -kotniku s stranico s je podan z enačbo $r_m(s) =$

$\frac{s}{2 \sin(\frac{\pi}{m})}$. Enostavno je preveriti, da iz $i > j$ sledi $r_i > r_j$. Naj bo R pozitivno število. Največje število vozlišč krožnici s polmerom R včrtanega regularnega večkotnika s stranico s lahko izračunamo s pomočjo enačbe $m_R(s) = \left\lfloor \frac{\pi}{\arcsin(\frac{s}{2R})} \right\rfloor$. Smiselno je, da postavimo čimveč vozlišč na eno orbito (začenši z najmanjšo s polmerom t) in hkrati zagotovimo, da so razdalje med vozlišči na orbiti vsaj ena. Torej lahko predpostavimo, da je stranica večkotnika dolga ena in pišemo $m_R := m_R(1) = \left\lfloor \frac{\pi}{\arcsin(\frac{1}{2R})} \right\rfloor$ ter $r_m := r_m(1)$.

Za celo število $i \geq 1$ lahko s pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto preverimo, da je $\sin\left(\frac{\pi}{6i}\right) \geq \frac{1}{2i}$ in torej $m_i \geq 6i$. V točko

$$\left\{ j \cos\left(i \frac{2\pi}{6j}\right), j \sin\left(i \frac{2\pi}{6j}\right) \right\},$$

kjer $0 \leq i \leq 6j - 1$, postavimo i -to vozlišče na j -ti orbiti. Število vozlišč m_i na i -ti orbiti je $m_i = 6(t - i + 1)$, kjer je $1 < i \leq t$ in $m_1 \leq 6t$. Potem velja, $n = m_1 + 6(t - 1) + 6(t - 2) + \dots + 6$ in $n = m_1 + 3t(t - 1)$. Ker je $0 \leq m_1 \leq 6t$ in $k > 0$, velja $n \geq 3t^2 + 3t$. Enačbo $3t^2 + 3t - n = 0$ rešimo in dobimo $t_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4n}{3}} \right)$. Ker je $1 + \frac{4n}{3} > 1$ ima enačba dve rešitvi, eno negativno in eno pozitivno. Upoštevamo, da je $m_1 \geq 0$. Najmanjše število, ki je večje ali enako pozitivni rešitvi

$$t = \left\lceil \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4n}{3}} - 1 \right) \right\rceil,$$

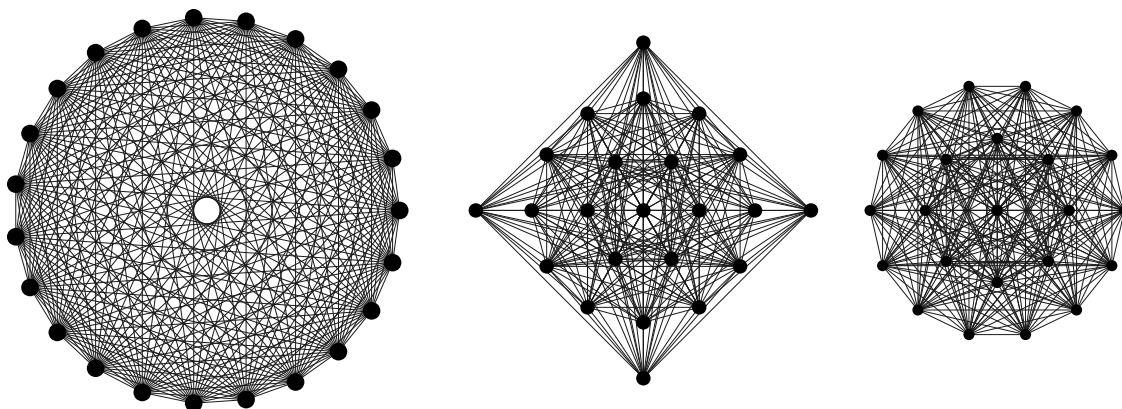
predstavlja iskano število orbit. Ker lahko vedno postavimo eno vozlišče v izhodišče $\vec{0}$ (na krožnico s polmerom nič), lahko pišemo

$$\text{dil}_{\{m_1, m_2, \dots, m_t\}}(K_n) \leq 2 \left\lceil \sqrt{1 + \frac{4(n-1)}{3}} - 1 \right\rceil = 2 \left\lceil \sqrt{\frac{4n-1}{3}} - 1 \right\rceil.$$

Izračunane zgornje meje so predstavljene v tabeli 7.1. Izkaže se, da bi lahko v nekaterih primerih na i -to orbito dodali $6i + 1$ namesto $6i$ vozlišč, kar bi lahko še dodatno zmanjšalo dilacijski koeficient regularne koncentrične predstavitve. Veliko več pa pridobimo s tem, če dovolimo, da se polmera dveh sosednjih orbit v koncentrični predstavitvi razlikujeta za od ena različno število; v nekaterih primerih lahko na zunanji orbiti dobimo več vozlišč in zato manj orbit. V taki predstavitvi se bomo osredotočili na minimiziranje števila orbit in torej na maksimiziranje števila vozlišč na prvi orbiti, nato na drugi orbiti, itd.

Razbitju pozitivnega celega števila n , za katerega velja $n = m_1 + m_2 + \dots + m_t$ in $m_1 > m_2 > \dots > m_t > 0$, pravimo *urejeno celoštevilsko razbitje* in ga označimo z $[m_1, m_2, \dots, m_t]$. Splošna koncentrična predstavitve $\rho_{[m_1, m_2, \dots, m_t]}(K_n)$ polnega grafa K_n glede na urejeno celoštevilsko razbitje $[m_1, m_2, \dots, m_t]$ je definirana kot sledi: n vozlišč postavimo v n točk na

t koncentričnih orbit s središči v izhodišču $\vec{0}$, tako da za vsak $1 \leq i \leq t$ postavimo m_i vozlišč v m_i enakomerno razporejenih točk na i -to orbito s polmerom R_i , tako da je vsak par točk na razdalji vsaj ena in da sta poljubni dve sosednji orbiti oddaljeni vsaj ena; torej $R_i = \max\{r_{m_i}, R_{i+1} + 1\}$. Dilacijski koeficient splošne koncentrične predstavitve polnega grafa K_n bomo označevali z $\text{dil}_{[m_1, m_2, \dots, m_t]}(K_n)$. Za primer glej splošno koncentrično predstavitev $\rho_{[14, 8, 1]}$ polnega grafa K_{23} na sliki 7.2 (c).



Slika 7.2: Koncentrične predstavitve polnega grafa K_{23} v ravnini z: (a) $\text{dil}_{\{23\}}(K_{23}) = 7,32682$, (b) $\text{dil}_{\{4, 12, 6, 1\}}(K_{23}) = 6$ in (c) $\text{dil}_{[14, 8, 1]}(K_{23}) = 4,61313$.

Naj bo $\{n_1, n_2, \dots, n_s\}$ regularno in $[m_1, m_2, \dots, m_t]$ urejeno celoštevilsko razbitje celega števila n . Potem velja

$$\text{dil}_{\{n\}}(K_n) > \text{dil}_{\{n_1, n_2, \dots, n_s\}}(K_n) \geq \text{dil}_{[m_1, m_2, \dots, m_t]}(K_n) \geq \text{dil}(K_n).$$

Urejeno celoštevilsko razbitje $[m_1, m_2, \dots, m_t]$ celega števila n , ki da optimalni dilacijski koeficient splošne koncentrične predstavitve $\text{dil}_{[m_1, m_2, \dots, m_t]}(K_n)$ polnega grafa K_n , lahko izračunamo z uporabo metod dinamičnega programiranja s pristopom od zgoraj navzdol in pomnjenjem že izračunanih vmesnih rezultatov (ang. top-down approach with memoization) [4]. Pristop od zgoraj navzdol s pomnjenjem že izračunanih vmesnih rezultatov uporabimo takrat, ko bi morali isti podproblem reševati znova in znova. V našem primeru razbijemo osnovni problem na podprobleme, jih (rekurzivno) rešimo in si njihove rešitve zapomnimo. Dovolj majhne probleme rešimo nerekurzivno. *Bellmanova enačba* za rekurziven izračun najmanjšega polmera R_n zunanega cikla optimalne splošne koncentrične predstavitve polnega grafa K_n se glasi

$$R_n = \min_{0 \leq m < n} \left\{ \{r_{n-m} \mid r_{n-m} - R_m > 1\} \cup \{R_m + 1 \mid r_{n-m} - R_m \leq 1\} \right\},$$

kjer je

$$r_m = \frac{1}{2 \sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}$$

polmer regularnemu m -kotniku s stranico ena očrtanega kroga.

Zapisana Bellmanova enačba opisuje postopek, kjer poskušamo postaviti nekaj vozlišč na zunanjo orbito z najmanjšim možnim polmerom in optimalno (na rekurziven način) razporediti preostala vozlišča znotraj zunanje orbite. Razmisliti moramo o dveh situacijah:

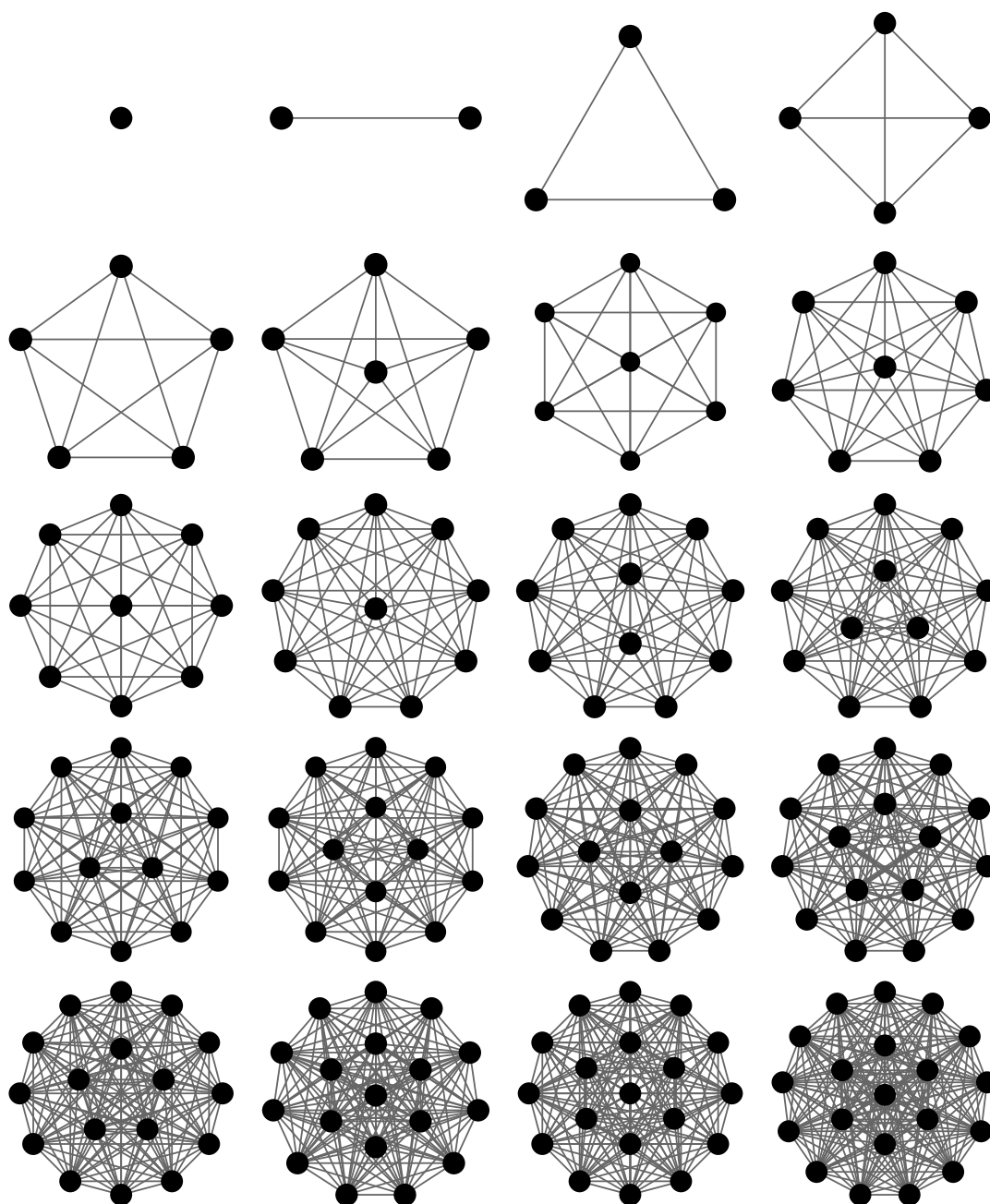
1. v oglišča regularnega $(n - m)$ -kotnika s stranico ena postavimo $n - m$ vozlišč polnega grafa K_n , preostalih m vozlišč pa rekurzivno vložimo znotraj diska s polmerom manjšim od $r_{n-m} - 1$,
2. v oglišča regularnega $(n - m)$ -kotnika s polmerom očrtanega kroga $(R_m + 1)$ postavimo $n - m$ vozlišč polnega grafa K_n , kjer je R_m polmer najmanjšega diska, ki vsebuje preostalih m vozlišč.

Na vsakem koraku rekurzije nam optimalni polmer in število preostalih vozlišč, ki jih bomo postavili na naslednjem koraku, določata urejeno celoštevilsko razbitje števila n in splošno koncentrično predstavitev za katero velja $\text{dil}_{[m_1, m_2, \dots, m_t]}(K_n) = \text{dil}_{\{m_1\}}(K_{m_1})$; glej sliko 7.3 in sliko 7.4.

Splošna koncentrična predstavitev $\rho_{[5,1]}(K_6)$ polnega grafa K_6 , glej tabelo 7.1, predstavlja primer druge situacije. Razdalja med orbitama $\rho_{[5,1]}(K_6)$ je enaka ena in ker je polmer regularnemu petkotniku očrtanega kroga približno 0,8506, je najmanjša razdalja med dvema vozliščema na zunanji orbiti večja kot ena. Preveriti je mogoče, da je dilacijski koeficient $\text{dil}_{[5,1]}(K_6) = 1,9044 \leq 2 = \text{dil}_{\{6\}}(K_6)$, glej sliko 7.5. Podoben primer je mogoče videti na sliki 7.6 (b).

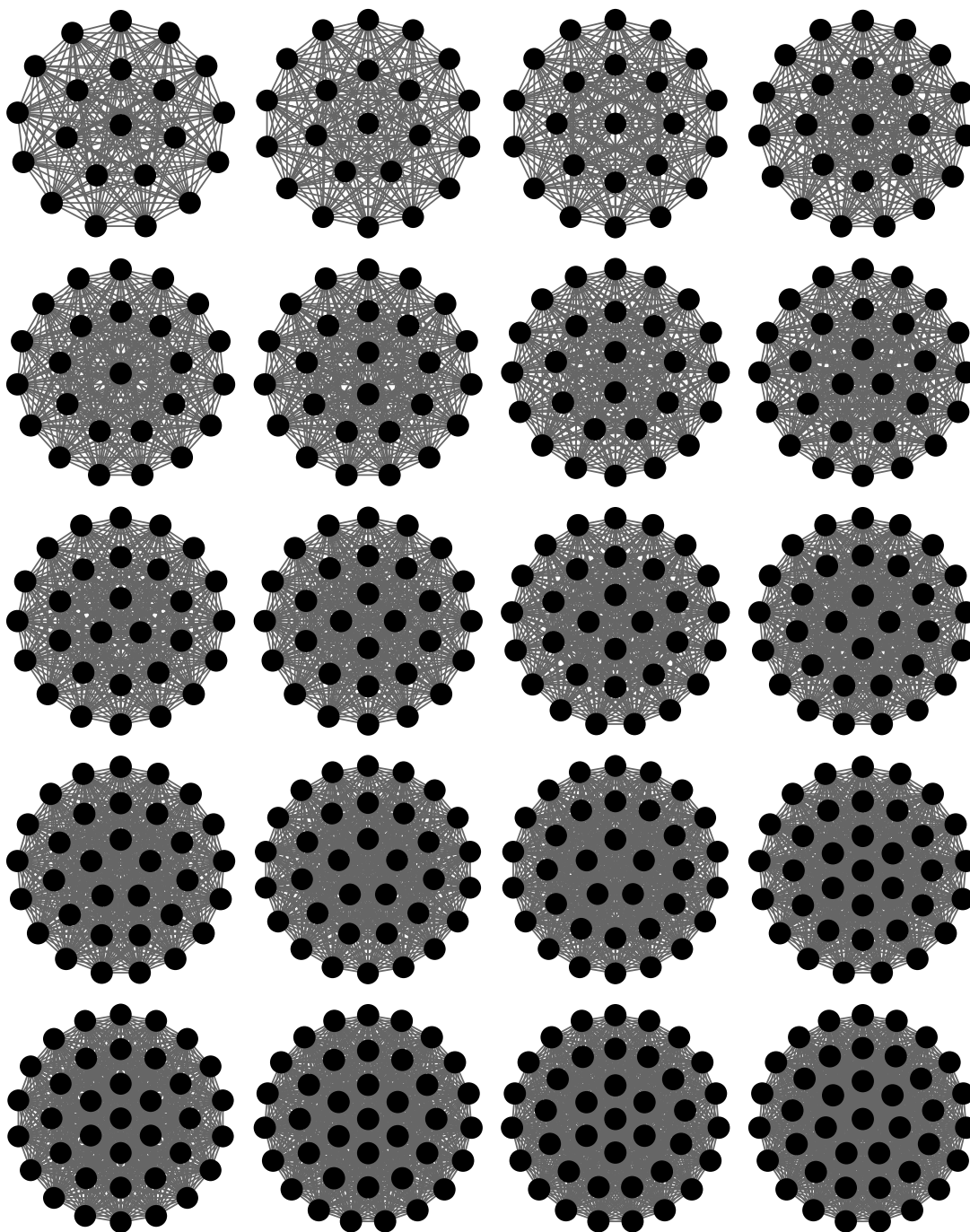
Včasih je dobljena predstavitev visoko degenerirana, glej na primer sliko 7.6 (a). Ko opazujemo končne (oz. števne) grafe, imamo končno (oz. števno) mnogo degeneriranih situacij. Z rotiranjem notranje orbite, ob tem, da zunanjo orbito fiksiramo, se degeneriranim situacijam brez težav izognemo, saj imamo neštevno mnogo izbir za kot rotacije. Z rotacijo orbit lahko torej še dodatno zmanjšamo število vozlišč na zunanji orbiti in zato tudi polmer največje orbite, ki nastopa v števcu dilacijskega koeficienta koncentrične predstavitve. Zato $\text{dil}_{[m_1, m_2, \dots, m_t]}(K_n)$ ni natančna zgornja meja za dilacijski koeficient polnega grafa K_n . Tesna zgornja meja za dilacijski koeficient polnega grafa ostaja tako še vedno odprto vprašanje.

Ocenimo sedaj še spodnjo mejo za $\text{dil}(K_n)$. Predpostavimo, da imamo nedegenerirano evklidsko predstavitev ρ' grafa K_n v ravnini z najmanjšim možnim dilacijskim koeficientom.



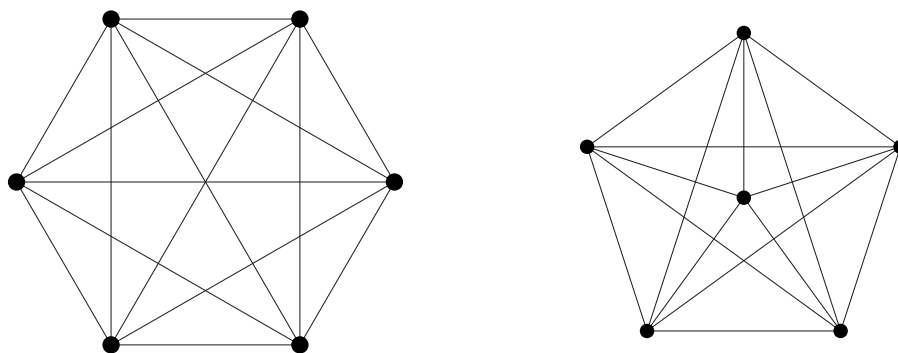
Slika 7.3: Splošne koncentrične predstavitve polnih grafov K_n z optimalnim dilacijskim koeficientom za $1 \leq n \leq 20$.

Naj bo najmanjša razdalja med poljubnima vozliščema enaka ena. Potem lahko v ravnino postavimo mrežo sestavljeno iz kvadratov z diagonalo, ki je dolga malo manj kot ena, tako da nobeno vozlišče grafa K_n ne leži na mreži, glej sliko 7.7. Ker je najmanjša razdalja med poljubnima vozliščema enaka ena, v vsakem kvadratu leži največ eno vozlišče grafa K_n . Naj bo P najmanjši pravokotnik na mreži, ki vsebuje vsa vozlišča grafa K_n . Označimo stranici pravokotnika P z a in b . Število kvadratov vsebovanih v P je vsaj n , zato je $a \cdot b \geq n$. Brez

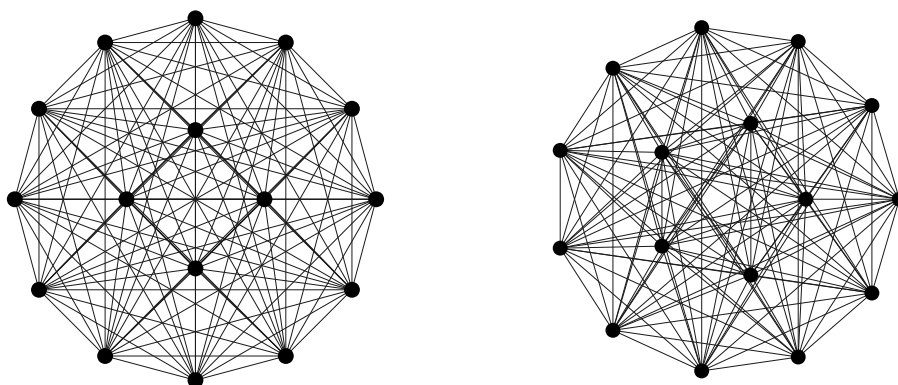


Slika 7.4: Splošne koncentrične predstavitve polnih grafov K_n z optimalnim dilacijskim koeficientom za $21 \leq n \leq 40$.

škode za splošnost lahko predpostavimo da je $a \geq b$. Potem velja $a \geq \lceil \sqrt{n} \rceil$. Vsa vozlišča grafa K_n projiciramo na stranico a pravokotnika P . Razdalja med dvema vozliščema, ki sta v projekciji najbolj oddaljeni je vsaj $\frac{\sqrt{2}}{2}(a-1)$; v nasprotnem primeru bi lahko premaknili mrežo za malo v desno in dobili pravokotnik s krajšo stranico a . Dobimo $\frac{\sqrt{2}(\lceil \sqrt{n} \rceil - 1)}{2} \leq$



Slika 7.5: (a) Orbitalna predstavitev polnega grafa K_6 v ravnini z $\text{dil}_{\{6\}}(K_6) = 2$. (b) Splošna koncentrična predstavitev polnega grafa K_6 v ravnini z $\text{dil}_{[5,1]}(K_6) = 1,9044$.



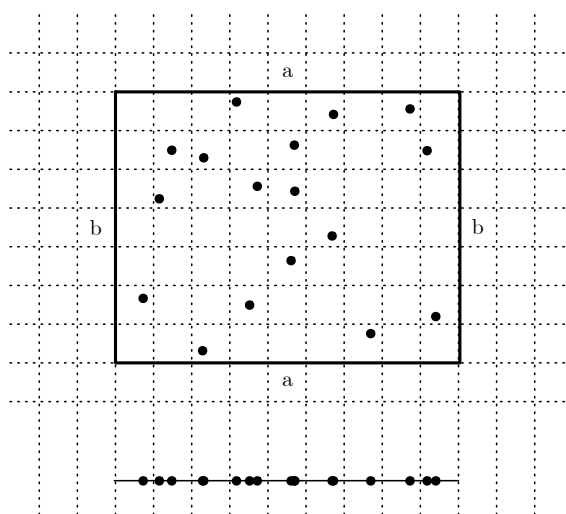
Slika 7.6: (a) Visoko degenerirana splošna koncentrična predstavitev polnega grafa K_{16} v ravnini z $\text{dil}_{[12,4]}(K_{16}) = 3,8637$. (b) Splošna koncentrična predstavitev polnega grafa K_{16} v ravnini z $\text{dil}_{[11,5]}(K_{16}) = 3,6636$, kjer je $r_{11} - r_5 < 1$.

$\max_{e \in E(K_n)} \|\rho'(e)\|$, kar je hkrati tudi spodnja meja za dilacijski koeficient grafa K_n .

Boljšo spodnjo mejo $\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{\pi}n} - 1 \leq \text{dil}(K_n)$ je mogoče dobiti z uporabo rezultata, ki sta ga predstavila A. Bezdek in F. Fodor [6] v drugem kontekstu; glej tudi M. Kaminski, P. Medvedev in M. Milanič [68]. Izračun spodnje meje je predstavljen v tabeli 7.1.

7.4 Rezultati in diskusija

S pojmom *enotski krog* bomo označili krog s polmerom $\frac{1}{2}$. Opazovani problem dilacijskega koeficienta polnega grafa je povezan s še enim znanim problemom, to je *problemom pakiranja enotskih krogov* [44, 92, 109], ki sprašuje po najmanjšem polmeru kroga v katerega lahko vsta-

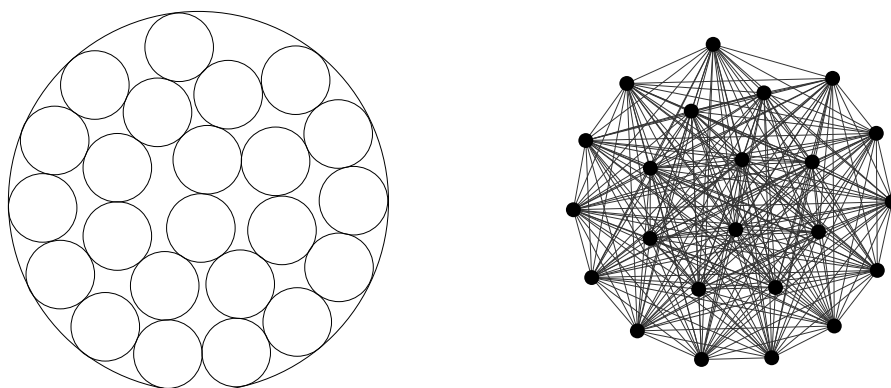


Slika 7.7: Kvadratna mreža v ravnini, ki določa spodnjo mejo za dilacijski koeficient polnega grafa K_n .

vimo dano število enotskih krogov. Polmer kateregakoli (velikega) kroga, ki vsebuje n enotskih krogov, predstavlja zgornjo mejo za dilacijski koeficient polnega grafa K_n . Če vzamemo središča n enotskih krogov za vozlišča polnega grafa K_n , je predstavitev vsakega vozlišča za vsaj $\frac{1}{2}$ oddaljena od roba velikega kroga. Torej velja, da je najdaljša razdalja med dvema centroma enaka $r - 1$, kjer je r premer zunanega kroga. Še boljšo mejo dobimo, če izračunamo dilacijski koeficient polnega grafa, ki ga dobimo iz centrov enotskih krogov vloženi na (skoraj) optimalen način, glej sliko 7.8.

Nekatera do sedaj znana optimalna pakiranja, glej [109] in sliko 7.8, vsebujejo postavitve enotskih krogov, ki dovoljujejo nesimetrijo, ekscentričnost (navideznih) orbit, neenakomerno razporejenost enotskih krogov na orbitah in podobno. Dilacijski koeficienti takih nesimetričnih postavitve lahko definirajo boljšo zgornjo mejo za dilacijski koeficient polnega grafa K_n , kot smo jo dobili s (simetrično) splošno koncentrično predstavitvijo polnega grafa. Dilacijski koeficient najboljšemu znanemu pakiranju z n enotskimi krogi prirejenega polnega grafa bomo označili z $\text{dil}_{\text{CP}}(K_n)$.

Pakiranje z enotskimi krogi uporablja le kroge s premerom 1, zato postavi centra dveh krogov na razdaljo vsaj ena, kar pa ni pogoj za predstavitev polnega grafa z optimalnim dilacijskim koeficientom; glej tabelo 7.1 za $n = 6$ in $n = 15$, ter primerjaj dilacijski koeficient splošne koncentrične predstavitve z dilacijskim koeficientom (do sedaj znanemu najboljšemu) pakiranju z enotskimi krogi prirejenega polnega grafa. U. Pirl je v [92] pokazal, da je meja za $n = 6$ natančna, kar pomeni, da problem pakiranja z enotskimi krogi in problem dilacijskega koeficienta polnega grafa nista enaka.



Slika 7.8: (a) Do sedaj znano najboljšo pakiranje kroga s 23 enotskimi krogi [109]. (b) Polni graf K_{23} prirejen temu pakiranju ima dilacijski koeficient 4,5445.

V tabeli 7.1 so prikazani dilacijski koeficienti grafovskih predstavitev, ki so dobljene s pomočjo algoritmov za risanje grafov, ki smo jih obravnavali v tem poglavju. Njihova vrednost je primerjana z zgornjimi mejami dobljenimi iz orbitalne, regularne koncentrične in splošne koncentrične predstavitve ter s spodnjo mejo za dilacijski koeficient polnega grafa. V tabeli so predstavljeni tudi dilacijski koeficienti do sedaj znanih najboljših pakiranj z enotskimi krogi, podatki so vzeti iz podatkovne baze [109].

Primerjava vrednosti v tabeli 7.1 pokaže, da je $\text{dil}_{\text{CP}}(K_n)$ nekoliko boljši kot $\text{dil}_{[m_1, \dots]}(K_n)$, njun kvocient je v povprečju približno enak 0,96. Potrebno je upoštevati, da je bilo večino pakiranj iz [109] dobljenih ročno za vsak n posebej, medtem ko smo zgornjo mejo za splošno koncentrično predstavitev izračunali s pomočjo enačbe.

Oglejmo si sedaj še zadnje tri stolpce v tabeli 7.1. Dilacijski koeficienti predstavitev polnega grafa dobljeni z algoritmi za risanje grafov so v splošnem bistveno večji (slabši) kot zgornja meja za dilacijski koeficient polnega grafa dobljena iz splošne koncentrične predstavitve. Lahko je premisliti, da je zgornja meja za dilacijski koeficient polnega grafa tudi zgornja meja za dilacijski koeficient vseh njegovih podgrafov. Čeprav predstavljeni algoritmi za risanje grafov bolj slabo minimizirajo dilacijski koeficient polnega grafa, pa jih je mogoče uporabiti tudi pri minimiziranju dilacijskega koeficienta enostavnega grafa, ki ni poln.

Pozoren bralec bo v tabeli 7.1 opazil, da dilacijski koeficienti dobljeni z algoritmi za risanje grafov ne naraščajo monotono; primerjaj rezultate za $n = 35$ in $n = 36$. Ta pojav je mogoče enostavno razložiti, če upoštevamo hevristično naravo algoritmov. Vsi trije algoritmi namreč na prvem koraku postavijo vozlišča polnega grafa v naključno izbrane točke v notranjosti kvadrata s stranico 1; tej naključni postavitvi vozlišč grafa pravimo *začetna* predstavitev. Algoritmi vnaprej definirano število iteracij iterativno izboljšujejo trenutno predstavitev, SA-

n	Spodnja meja [6, 68]	Regularna koncentrična predstavitev		Splošna koncentrična predstavitev		Pakiranje enotskih krogov [109]		SAAlg	FRAAlg	SPEAlg
		Zgornja meja dil $\{m_1, \dots\}$ (K_n)	Zgornja meja dil $[m_1, \dots]$ (K_n)	Urejeno celoštevilsko razbitje $[m_1, \dots]$	Zgornja meja dil (K_n)	Kvocien $\frac{\text{dil}(K_n)}{\text{dil}_{CP}(K_n)}$				
2	0,4850	2	1,0000	[2]	1,0000	100,00%	1,0000	1,0000	1,0000	
3	0,8188	2	1,0000	[3]	1,0000	100,00%	1,0000	1,0000	1,0000	
4	1,1002	2	1,4142	[4]	1,4142	100,00%	1,4142	1,4164	1,4201	
5	1,3480	2	1,6180	[5]	1,6180	100,00%	1,6297	1,6383	1,6374	
6	1,5722	2	1,9021	[5, 1]	2,0000	105,15%	1,9044	2,0781	1,9906	
7	1,7782	2	2,0000	[6, 1]	2,0000	100,00%	2,0055	2,0566	2,0795	
8	1,9701	4	2,2470	[7, 1]	2,2470	100,00%	2,2568	2,3307	2,3591	
9	2,1502	4	2,6131	[8, 1]	2,6131	100,00%	2,6979	2,8162	2,7269	
10	2,3206	4	2,8794	[9, 1]	2,7938	97,03%	3,3205	3,3825	3,0530	
11	2,4827	4	2,9544	[9, 2]	2,8794	97,46%	3,3523	3,6682	3,2387	
12	2,6376	4	3,1068	[9, 3]	2,9960	96,43%	3,1614	3,7134	3,5829	
13	2,7861	4	3,2361	[10, 3]	3,2361	100,00%	3,4372	4,0166	3,7671	
14	2,9290	4	3,4142	[10, 4]	3,3251	97,39%	3,6075	4,3921	4,0907	
15	3,0669	4	3,5133	[11, 4]	3,5202	100,19%	3,9151	4,2499	4,5065	
16	3,2003	4	3,6636	[11, 5]	3,5933	98,08%	3,7454	4,6231	4,8885	
17	3,3296	4	3,8637	[12, 5]	3,7837	97,93%	4,0499	4,6431	4,6870	
18	3,4551	4	3,9593	[11, 6, 1]	3,8637	97,59%	3,9928	5,1883	5,2157	
19	3,5772	4	4,0000	[12, 6, 1]	3,8637	96,59%	4,2001	5,1174	5,6607	
20	3,6961	6	4,1481	[13, 6, 1]	4,1015	98,88%	4,4755	5,2817	5,9600	
21	3,8121	6	4,2734	[13, 7, 1]	4,2348	99,10%	5,2243	5,7495	6,5630	
22	3,9253	6	4,4940	[14, 7, 1]	4,4389	98,77%	5,4136	5,6523	6,8137	
23	4,0360	6	4,6131	[14, 8, 1]	4,5445	98,51%	5,3458	5,8755	6,8752	
24	4,1443	6	4,7834	[15, 8, 1]	4,6449	97,10%	5,6482	5,7917	7,4315	
25	4,2504	6	4,8968	[15, 9, 1]	4,7526	97,05%	5,8130	6,4269	7,6314	
26	4,3544	6	4,9726	[15, 9, 2]	4,8281	97,09%	5,8125	6,7805	7,9892	
27	4,4564	6	5,1258	[16, 9, 2]	4,8856	95,31%	5,8360	6,5777	7,8196	
28	4,5565	6	5,1547	[16, 9, 3]	5,0149	97,29%	6,1285	6,9569	8,5486	
29	4,6548	6	5,2361	[16, 10, 3]	5,1384	98,13%	6,5785	6,4743	7,9189	
30	4,7515	6	5,4142	[16, 10, 4]	5,1977	96,00%	6,3015	7,3133	9,5919	
31	4,8466	6	5,4190	[17, 10, 4]	5,2915	97,65%	6,5744	7,4074	8,5796	
32	4,9401	6	5,5258	[17, 11, 4]	5,4274	98,22%	7,0711	7,9482	10,3989	
33	5,0322	6	5,6770	[17, 11, 5]	5,4697	96,35%	6,8092	8,0789	10,5514	
34	5,1229	6	5,7588	[18, 11, 5]	5,6108	97,43%	7,2694	7,6486	10,6985	
35	5,2123	6	5,8637	[18, 12, 5]	5,6962	97,14%	7,5832	7,9259	12,4338	
36	5,3005	6	5,9744	[17, 12, 6, 1]	5,7467	96,19%	7,1789	7,6474	11,7903	
37	5,3874	6	6,0000	[18, 12, 6, 1]	5,7588	95,98%	7,6798	7,6583	11,5260	
38	5,4731	8	6,0548	[19, 12, 6, 1]	5,9532	98,32%	7,8716	8,0515	11,6702	
39	5,5577	8	6,1575	[19, 13, 6, 1]	6,0482	98,23%	7,7182	9,0842	12,6976	
40	5,6413	8	6,2832	[19, 13, 7, 1]	6,1091	97,23%	8,1228	9,9491	13,8120	

Tabela 7.1: Primerjava zgornjih in spodnjih mej za dilacijski koeficient polnega grafa K_n na n vozliščih z dilacijskim koeficientom pakiranja z enotskimi krogi prirejenega polnega grafa in z dilacijskimi koeficienti nedegeneriranih evklidskih predstavitev dobljenih z algoritmi za risanje grafov: SAAlg, FRAAlg in SPEAlg.

Alg in SPEAlg na vsakem koraku celo izbirata če, oziroma na kakšen način bosta to izboljšavo tudi naredila. Zaradi hevrstične narave algoritmov smo vsakega izmed njih zagnali 30 krat ter za vsak n in vsak algoritem izbrali predstavitev z najmanjšim dilacijskim koeficientom. Dilacijski koeficienti izbranih predstavitev so predstavljeni v zadnjih treh stolpcih tabele 7.1.

Naj bo n število vozlišč danega grafa G , naj bo $N > 0$ izbrano število iteracij in naj bo

$S > 0$ izbrano število korakov, ki jih izvedemo v vsaki iteraciji. Časovne zahtevnosti izbranih algoritmov so: $T_{\text{FR}}(n) = \mathcal{O}(Nn^2)$, $T_{\text{SA}}(n) = \mathcal{O}(NS)$ in $T_{\text{SPE}}(n) = \mathcal{O}(NSn)$. Časovne zahtevnosti izbranih algoritmov so različne, zato detaljna primerjava rezultatov iz tabele 7.1 med seboj ne bi bila poštena. Upoštevati moramo tudi, da smo (namensko) izbrali algoritme različnih tipov. Izkaže se, da SPEAlg dobro deluje v primerih, ko je podani graf mogoče narisati s predefiniranimi razdaljami (v našem primeru so vse povezave dolge ena) in da deluje slabo, ko grafa ni mogoče narisati z željenimi razdaljami v izbranem evklidskem prostoru. SPEAlg torej ni primerna izbira, če poskušamo z enotsko razdaljo narisati graf z visoko (grafovsko) dimenzijo v evklidskem prostoru premajhne (evklidske oz. prostorske) dimenzije.

Pred kratkim so avtorji v [68] predstavili novo grafovsko invarianto imenovano *širina ravnine* (ang. plane-width), ki je podobna dilacijskemu koeficientu. Širina ravnine $pw(G)$ grafa G je definirana kot najmanjši premer predstavitve vozlišč v ravnini po vseh (lahko tudi) degeneriranih preslikavah vozlišč grafa G v evklidsko ravnino, ki slikajo sosednji vozlišči v točki oddaljeni vsaj ena. Za polne grafe obe invarianti, dilacijski koeficient in širina ravnine sovpadata. To pomeni, da predstavljeni rezultati veljajo tudi za $pw(K_n)$.

Poglavje 8

Zaključek

V disertaciji je zbrana vsa pomembnejša teorija grafov z enotsko razdaljo. Zbrani izreki uporabljajo poenoteno terminologijo, dokazani so tudi nekateri novi izreki, ki govorijo o lastnostih grafov z enotsko razdaljo. Dokazano je, da kartezični produkt grafov z enotsko razdaljo ohranja realizacije z enotsko razdaljo. Obravnavane so tudi druge grafovske operacije. Ovržena je domneva, da Heawoodov graf ni graf z enotsko razdaljo. Prikazane so vse degenerirane predstavitve z enotsko razdaljo Petersenovega grafa in raziskane relacije med njimi. Dokazan je izrek o izomorfizmih I-grafov. Dokazano je, da ima velika poddružina I-grafov nedegenerirano predstavitev z enotsko razdaljo v ravnini. Postavljeno je več domnev o realizacijah in koordinatizacijah z enotsko razdaljo I-grafov na podlagi rezultatov preverjanja reprezentativnega vzorca I-grafov z računalnikom. Dokazano je, da je odločitveni problem obstoja degenerirane predstavitve (koordinatizacije) z enotsko razdaljo danega grafa \mathcal{NP} -poln problem. Definirana je nova grafovska invarianta dilacijski koeficient. Predstavljeni sta tako zgornja kot spodnja meja za dilacijski koeficient polnega grafa. Predstavljena je heuristika za predstavitev grafa z enotsko razdaljo, ki temelji na algoritmu SPE, glej [1]. Disertacija vsebuje rezultate treh znanstvenih prispevkov, ki so v času pisanja disertacije sprejeti v objavo [58, 59, 63] in štirih znanstvenih prispevkov v delu [56, 60, 57, 64]. S teorijo ki je predstavljena v tej disertaciji so (posredno) povezani tudi naslednji trije že sprejeti znanstveni prispevki [55, 61, 62].

Glavna motivacija za nadaljnje raziskave je zagotovo izboljšanje zgornje in spodnje meje za kromatično število ravnine (ter drugih evklidskih prostorov). Zato so zelo pomembne predvsem nadaljne klasifikacije lastnosti grafov z enotsko razdaljo, predvsem v smeri iskanja lastnosti iz katere bi bilo mogoče razbrati kromatično število ravnine (k -dimenzionalnega evklidskega prostora).

Pomemben napredek k temu odgovoru pa bi predstavljala že heuristika za nedegenerirano

vlaganje grafov z enotsko razdaljo oziroma enotsko koordinatizacijo v ravnini. Zanimivo bi bilo rešiti nalogo: “Poišči algoritem, ki odgovori ali je graf mogoče (nedegenerirano) predstaviti z enotsko razdaljo v danem prostoru.”. Ob odkrivanju minimalnih prepovedanih grafov z enotsko razdaljo se izkaže, da sta zelo pogosti oviri grafa K_4 in $K_{2,3}$ in da grafi, ki teh ovir ne vsebujejo zelo redko vsebujejo druge ovire; heuristika bi lahko upoštevala tudi ti dejstvi.

Postavimo lahko naslednja zanimiva vprašanja: “Ali ima dani graf nedegenerirano predstavitev (realizacijo, koordinatizacijo) z enotsko razdaljo v k -dimenzionalnem evklidskem prostoru?”, “Katere predstavitve z enotsko razdaljo (vključno z degeneriranimi in visoko degeneriranimi) danega grafa obstajajo in kakšne so njihove simetrije?”, “Koliko je vseh različnih nedegeneriranih predstavitev (realizacij, koordinatizacij) z enotsko razdaljo danega grafa, ob tem da štejemo le nezvezne prehode?”, “Poišči vse podgrafe danega grafa, ki nimajo k -razsežne nedegenerirane predstavitve (realizacije, koordinatizacije) z enotsko razdaljo.”. Bolj splošen problem se glasi: “Za dani graf G poišči nedegenerirano predstavitev v \mathbb{R}^2 z minimalnim številom vozliščnih orbit oz. povezavnih orbit.”.

Zanimivo bi bilo odkriti ali veljajo podobni rezultati kot veljajo za dimenzijo kartezičnega produkta grafov, tudi za evklidsko dimenzijo kartezičnega produkta grafov. Znano je, glej na primer [65], da je razpoznavanje kartezičnega produkta grafov enostavno. Torej predstavlja izziv odkritje hitrega algoritma za predstavitev kartezičnega produkta k -razsežnih grafov z enotsko razdaljo v nekem evklidskem prostoru, če faktorjev vnaprej ne poznamo. Zanimivo bi bilo tudi raziskati pod katerimi pogoji ohranjajo enotsko razdaljo tudi drugi grafovski produkti. Raziskati bi bilo potrebno subdivizijsko število, dimenzijo in evklidsko dimenzijo vseh pomembnejših grafovskih operacij.

V nadaljevanju raziskovalnega dela bi bilo potrebno dokazani izrek o izomorfizmih I-grafov uporabiti pri dokazih, ki potrjujejo v disertaciji podane domneve. Posplošeni rezultat bi bilo smiselno uporabiti pri razvoju algoritma za izračun ekvivalenčnih razredov izomorfnih I-grafov, kar bo pomagalo pri dokazu domneve, da je v ravnini mogoče z enotsko razdaljo predstaviti vse I-grafe. Dodatno bi bilo potrebno raziskati tudi obstoj koordinatizacij z enotsko razdaljo za I-grafe in se posvetiti podobnostim med vsemi znanimi sporadičnimi primeri astralnih konfiguracij ter rotacijskimi predstavitevami I-grafov z enotsko razdaljo.

Ob upoštevanju nesimetrije bi bilo mogoče zgornjo in spodnjo mejo za dilacijski koeficient še izboljšati.

Literatura

- [1] D. Agrafiotis. Stochastic proximity embedding. *J. Comput. Chem.*, 24:1215–1221, 2003.
- [2] G. E. Andrews. *The Theory of Partitions*. Cambridge University Press, 1998.
- [3] K. Appel and W. Haken. Solution of the four color map problem. *Scientific American*, 237(4):108–121, 1977.
- [4] R. Bellman and R. E. Bellman. *Dynamic programming*. Courier Dover Publications, 1957 edition, 2003.
- [5] L. W. Berman. A characterization of astral (n_4) configurations. *Discrete Comput. Geom.*, 26(4):603–612, 2001.
- [6] A. Bezdek and F. Fodor. Minimal diameter of certain sets in the plane. *J. Combin. Theory Ser. A*, 85(1):105–111, 1999.
- [7] T. Bıyıkoglu, W. Hordijk, J. Leydold, T. Pisanski, and P. F. Stadler. Graph laplacians, nodal domains, and hyperplane arrangements. *Linear Algebra Appl.*, 390:155–174, 2004.
- [8] M. Boben and T. Pisanski. Polycyclic configurations. *European J. Combin.*, 24(4):431–457, 2003.
- [9] M. Boben, T. Pisanski, and A. Žitnik. I -graphs and the corresponding configurations. *J. Combin. Des.*, 13(6):406–424, 2005.
- [10] W. M. Boothby. *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*. XVI. Academic Press, 2nd illustrated edition, 1986.
- [11] P. Brass. On the maximum number of unit distances among n points in dimension four. *Bolyai Soc. Math. Stud.*, 6:277–290, 1997.
- [12] F. Buckley and F. Harary. On the Euclidean dimension of a wheel. *Graphs Combin.*, 4:23–30, 1988.

- [13] S. Cabello, E. Demaine, and G. Rote. Planar embeddings of graphs with specified edge lengths. *Lect. Notes Comput. Sci.*, 2912:283–294, 2004.
- [14] P. Carmi, V. Dujmović, P. Morin, and D. R. Wood. Distinct distances in graph drawings. *Electron. J. Combin.*, 15(1):Research Paper 107, 23, 2008.
- [15] G. Chartrand and F. Harary. Planar permutation graphs. *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B (N.S.)*, 3:433–438, 1967.
- [16] K. B. Chilakamarri. The unit-distance graph problem: A brief survey and some new results. *Bull. Inst. Combin. Appl.*, 8:39–60, 1993.
- [17] K. B. Chilakamarri. A 4-chromatic unit-distance graph with no triangles. *Geombinatorics*, 4(3):64–76, 1995.
- [18] K. B. Chilakamarri. Maximal and minimal forbidden unit-distance graphs in the plane. *Bull. Inst. Combin. Appl.*, 13:35–43, 1995.
- [19] K. B. Chilakamarri. A symmetric degenerate unit distance representations of the Heawood graph exists. (private communication), 2008.
- [20] K. B. Chilakamarri, G. Fricke, and M. Perkel. Packing an equilateral polygon in a thin strip. *Geom. Dedicata*, 54:45–55, 1995.
- [21] F. Chung. Sphere-and-point incidence relations in high dimensions with applications to unit distances and furthest-neighbor pairs. *Discrete Comput. Geom.*, 4:183–190, 1989.
- [22] K. L. Clarkson, H. Edelsbrunner, L. J. Guibas, M. Sharir, and E. Welzl. Combinatorial complexity bounds for arrangements of curves and spheres. *Discrete Comput. Geom.*, 5(2):99–160, 1990.
- [23] D. Coulson. An 18-colouring of 3-space omitting distance one. *Discrete Math.*, 170(1-3):241–247, 1997.
- [24] R. Davidson and D. Harel. Drawing graphs nicely using simulated annealing. *ACM Trans. Graph.*, 15:301–331, 1996.
- [25] N. G. de Bruijn and P. Erdős. A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.*, 13:369–373, 1951.
- [26] M. Deza and H. Maehara. A few applications of negative-type inequalities. *Graphs Combin.*, 10(3):255–262, 1994.

- [27] P. Eades and S. Whitesides. The logic engine and the realization problem for nearest neighbor graphs. *Theor. Comput. Sci.*, 169(1):23–37, 1996.
- [28] P. Eades and N. C. Wormald. Fixed edge-length graph drawing is NP-hard. *Discrete Appl. Math.*, 28(2):111–134, 1990.
- [29] P. Erdős. On sets of distances of n -points. *Amer. Math. Monthly*, 53(5):248—250, 1946.
- [30] P. Erdős. Graph theory and probability. *Canad. J. Math.*, 11:34–38, 1959.
- [31] P. Erdős. Research problems: On sets of distances of n points. *Amer. Math. Monthly*, 77(7):738–740, 1970.
- [32] P. Erdős. On some of my favourite theorems. *Combinatorics, Paul Erdős is 80*, 2:97–132, 1996.
- [33] P. Erdős, F. Harary, and W. T. Tutte. On the dimension of a graph. *Mathematika*, 12:118–122, 1965.
- [34] P. Erdős and M. Simonovits. On the chromatic number of geometric graphs. *Ars Combin.*, 9:229–246, 1980.
- [35] R. M. Foster, I. Z. Bouwer, W. W. Chernoff, B. Monson, and Z. Star. *The Foster Census: R. M. Foster's Census of Connected Symmetric Trivalent Graphs*. 1988.
- [36] P. Frankl and R. M. Wilson. Intersection theorems with geometric consequences. *Combinatorica*, 1(4):357–368, 1981.
- [37] T. Fruchterman and E. M. Reingold. Graph drawing by force-directed placement. *Software Pract. Ex.*, 21:1129–1164, 1991.
- [38] E. H. A. Gerbracht. Minimal polynomials for the coordinates of the Harborth graph. *arXiv*, math.CO, 2006.
- [39] S. V. Gervacio and I. B. Jos. The Euclidean dimension of the join of two cycles. *Discrete Math.*, 308:5722–5726, 2008.
- [40] S. V. Gervacio, Y. F. Lim, and H. Maehara. Planar unit-distance graphs having planar unit-distance complement. *Discrete Math.*, 2007.
- [41] S. V. Gervacio and H. Maehara. Subdividing a graph toward a unit-distance graph in the plane. *European J. Combin.*, 21:223–229, 2000.

- [42] C. D. Godsil and J. Zaks. Coloring the sphere. University of Waterloo research report CORR 88-12, 1988.
- [43] G. H. Golub and C. F. van Loan. *Matrix Computations*. The John Hopkins University Press, 3rd edition, 1989.
- [44] R. L. Graham, B. D. Lubachevsky, K. J. Nurmela, and P. Östergård. Dense packings of congruent circles in a circle. *Discrete Math.*, 181(1-3):139–154, 1998.
- [45] H. Hadwiger. Ungelöste probleme no. 40. *Elem. Math.*, 16:103–104, 1961.
- [46] F. Harary. *Graph Theory*. Addison-Wesley Publishing Company, 1994.
- [47] M. A. Harris. Toward a unit distance embedding for the Heawood graph. *arXiv*, math.CO, 2007. 7 pages, 4 figures.
- [48] N. Hartsfield and G. Ringel. *Pearls in Graph Theory: A Comprehensive Introduction*. Academic Press, San Diego, revised and augmented edition, 2003.
- [49] P. J. Heawood. Map-colour theorem. *Quart. J. Pure Appl. Math.*, 24:332–338, 1890.
- [50] P. Hell and J. Nešetřil. *Graphs and Homomorphisms*. Oxford University Press, 2004.
- [51] B. Hendrickson. Conditions for unique graph realizations. *SIAM J. Comput.*, 21(1):65–84, 1992.
- [52] R. Hochberg. A program for proving that a given graph is not a unit-distance graph: Preliminary report. In *ACM-SE 44: Proceedings of the 44th annual Southeast regional conference*, pages 768–769, New York, NY, USA, 2006. ACM.
- [53] R. Hochberg. There exists almost degenerate almost unit distance representation of the Heawood graph. (private communication), 2007.
- [54] R. Hochberg and P. O’Donnell. A large independent set in the unit distance graph. *Geombinatorics*, 2(4):83–84, 1993.
- [55] B. Horvat. On the calculation of the terminal polynomial of a star-like graph. *Croat. Chem. Acta*, 82, 2009.
- [56] B. Horvat and K. B. Chilakamarri. Heawood graph is a unit-distance graph. (work in progress), 2009.

- [57] B. Horvat, J. Kratochvíl, and T. Pisanski. On the computational complexity of degenerate unit-distance representations of graphs. (work in progress), 2009.
- [58] B. Horvat and T. Pisanski. Unit distance representations of the Petersen graph in the plane. *Ars Combin.*, (accepted), 2007.
- [59] B. Horvat and T. Pisanski. Products of unit distance graphs. *Discrete Math.*, (accepted), 2009.
- [60] B. Horvat and T. Pisanski. Rotational unit-distance realizations of I -graphs. (work in progress), 2009.
- [61] B. Horvat, T. Pisanski, and M. Randić. Terminal polynomials and star-like graphs. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 60(2):493–512, 2008.
- [62] B. Horvat, T. Pisanski, and M. Randić. Some graphs are more strongly-isospectral than others. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, (accepted), 2009.
- [63] B. Horvat, T. Pisanski, and A. Žitnik. The dilation coefficient of a complete graph. *Croat. Chem. Acta*, (accepted), 2009.
- [64] B. Horvat, T. Pisanski, and A. Žitnik. Isomorphism checking and enumeration of I -graphs. (work in progress), 2009.
- [65] W. Imrich and S. Klavžar. *Product Graphs: Structure and Recognition*. John Wiley & Sons, Incorporated, 2000.
- [66] T. R. Jensen and B. Toft. *Graph Coloring Problems*. Wiley Interscience, 1995.
- [67] S. Józsa and E. Szemerédi. The number of unit distance on the plane. *Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai*, 10:939–950, 1975.
- [68] M. Kaminski, P. Medvedev, and M. Milanič. The plane-width of graphs. *Submitted*, 2008.
- [69] M. Kaufman, T. Pisanski, D. Lukman, B. Borštnik, and A. Graovac. Graph-drawing algorithms geometries versus molecular mechanics in fullerenes. *Chem. Phys. Lett.*, 259(3-4):420–424, 1996.
- [70] P. Koebe. Kontaktprobleme der konformen abbildung. *Ber. Verh. Saechs. Akad. Leipzig*, 88:141–164, 1936.

- [71] T. H. Loh and H. H. Teh. On the dimension of product graphs. *Nanta Math.*, 1:68–71, 1966.
- [72] L. Lovasz. On the Shannon capacity of a graph. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 25:1–7, 1979.
- [73] L. Lovasz. Self-dual polytopes and the chromatic number of distance graphs on the sphere. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 45(1-4):317–323, 1983.
- [74] H. Maehara. On the Euclidean dimension of a complete multipartite graph. *Discrete Math.*, 72:285–289, 1988.
- [75] H. Maehara. Note on induced subgraphs of the unit distance graph E^n . *Discrete Comput. Geom.*, 4:15–18, 1989.
- [76] H. Maehara. Distances in a rigid unit-distance graph in the plane. *Discrete Appl. Math.*, 31:193–200, 1991.
- [77] H. Maehara. Extending a flexible unit-bar framework to a rigid one. *Discrete Math.*, 108:167–174, 1992.
- [78] H. Maehara. Distance graphs and rigidity. *Contemp. Math.*, 342:149–168, 2004.
- [79] H. Maehara and V. Rodl. On the dimension to represent a graph by a unit distance graph. *Graphs Combin.*, 6:365–367, 1990.
- [80] U. Manber. *Introduction to Algorithms: A Creative Approach*. Addison-Wesley Publishing Company, 1989.
- [81] J. Matoušek, A. Björner, and G. M. Ziegler. *Using the Borsuk-Ulam Theorem: Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry*. Springer, illustrated edition, 2003.
- [82] F. Moon. The Kinematic Models for Design Digital Library (KMODDL), Cornell University Library, Model: S14 Approximate four-bar straight-line linkage of Roberts. http://kmoddl.library.cornell.edu/model_metadata.php?m=277, 2003.
- [83] W. Moser and L. Moser. Solution to problem 10. *Canad. Math. Bull.*, 4:187–189, 1961.
- [84] C. Moukarzel. An efficient algorithm for testing the generic rigidity of graphs in the plane. *J. Phys. A*, 29(24):8079–8098, 1996.

- [85] R. L. Norton. *Design of Machinery: An Introduction to the Synthesis and Analysis of Mechanisms and Machines*. McGraw-Hill Professional, 3rd edn edition, 2003.
- [86] P. O'Donnell. A triangle-free 4-chromatic graph in the plane. *Geombinatorics*, 4(1):23–29, 1994.
- [87] P. O'Donnell. A 40 vertex 4-chromatic triangle-free unit distance graph. *Geombinatorics*, 5(1):31–34, 1995.
- [88] P. O'Donnell. High-girth unit-distance graphs. *Ph.D. Dissertation*, page 55, 1999.
- [89] P. O'Donnell. Arbitrary girth, 4-chromatic unit distance graphs in the plane. I. Graph description. *Geombinatorics*, 9(3):145–152, 2000.
- [90] P. O'Donnell. Arbitrary girth, 4-chromatic unit distance graphs in the plane. II. Graph embedding. *Geombinatorics*, 9(4):180–193, 2000.
- [91] T. D. Parsons and T. Pisanski. Vector representations of graphs. *Discrete Math.*, 78(1-2):143–154, 1989.
- [92] U. Pirl. Der mindestabstand von n in der einheitskreisscheibe gelegenen punkten. *Math. Nachr.*, 40:111–124, 1969.
- [93] T. Pisanski, M. Boben, and A. Žitnik. Visualization of graphs and related data structures in Mathematica. *Zbornik radova PrimMath, Mathematica u znanosti, tehnologiji i obrazovanju*, pages 27–39, 2001.
- [94] T. Pisanski, M. Boben, and A. Žitnik. Interactive conjecturing with Vega. *DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci.*, 69:351–364, 2005.
- [95] T. Pisanski, B. Plestenjak, and A. Graovac. Nicegraph program and its applications in chemistry. *Croat. Chem. Acta*, 68(1):283–292, 1995.
- [96] T. Pisanski, M. Razinger, and A. Graovac. Geometry versus topology: Testing self-consistency of the nicegraph program. *Croat. Chem. Acta*, 69(3):827–836, 1996.
- [97] T. Pisanski and J. Shawe-Taylor. Characterizing graph drawing with eigenvectors. *J. Chem. Inf. Comp. Sci.*, 40(3):567–571, 2000.
- [98] T. Pisanski and A. Žitnik. *Representations of Graphs and Maps, Topics in Topological Graph Theory, Series: Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. No. 129. Cambridge University Press, 2009.

- [99] T. Pisanski et al. Project Vega home page. <http://vega.ijp.si>, 1996–2009.
- [100] D. Pritikin. All unit-distance graphs of order 6197 are 6-colorable. *J. Combin. Theory Ser. B*, 73:159–163, 1998.
- [101] C. Purdy and G. Purdy. Minimal forbidden distance one graphs. *Congr. Numer.*, 66:165–172, 1988.
- [102] M. Reid. On the connectivity of unit distance graphs. *Graphs Combin.*, 12:295–303, 1996.
- [103] G. Ringel and J. W. T. Youngs. Solution of the Heawood map-coloring problem. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 60:438–445, 1968.
- [104] J. B. Saxe. Embeddability of weighted graphs in k -space is strongly NP-hard. In *Proc. 17th Allerton Conf. Commun. Control Comput.*, pages 480–489, 1979.
- [105] B. Servatius. *The geometry of frameworks: Rigidity, mechanisms, and CAD*. MAA Notes Number 53. Cambridge University Press, illustrated edition, 2000.
- [106] S. Shelah and A. Soifer. Axiom of choice and chromatic number of the plane. *J. Combin. Theory Ser. A*, 103:387–391, 2003.
- [107] G. Simonyi and G. Tardos. Local chromatic number, Ky Fan’s theorem, and circular colorings. *Combinatorica*, 26(5):587–626, 2006.
- [108] A. Soifer. *The Mathematical Coloring Book: Mathematics of Coloring and the Colorful Life of Its Creators*. Springer, illustrated edition, 2008.
- [109] E. Specht. The best known packings of equal circles in the unit circle. <http://www.packomania.com>, (Last update: December 18, 2008), 2008.
- [110] J. Spencer, E. Szemerédi, and J. Trotter. Unit distances in the Euclidean plane. *Graph theory and combinatorics*, pages 293–303, 1984.
- [111] K. Svozil. The chromatic number of a sphere. solution of problem nr. 10769. *Amer. Math. Monthly*, 108:774–775, 2001.
- [112] L. A. Székely. Erdős on unit distances and the Szemerédi-Trotter theorems. *Bolyai Soc. Math. Stud.*, 2000.

-
- [113] W. P. Thurston and S. Levy. *Three-Dimensional Geometry and Topology: Volume 1*. Princeton University Press, 1997.
- [114] W. T. Tutte and C. Nash-Williams. *Graph Theory*. Cambridge University Press, 2001.
- [115] M. E. Watkins. A theorem on Tait colorings with an application to the generalized Petersen graphs. *J. Combin. Theory*, 6:152–164, 1969.
- [116] Y. Yemini. Some theoretical aspects of position-location problems. *20th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, 1979*, pages 1 – 8, 1979.

Stvarno kazalo

- algoritem, 40, 41, 123–127, 137–139
- astralna konfiguracija, 107
- Bellmanova enačba, 131, 132
- delno urejena množica, 11, 77
- Hassejev diagram, 11, 78, 79
- dilacijski koeficient, 123, 124, 128, 132–138
- dimenzija grafa, 16, 20, 31, 34, 35, 45, 50, 52, 81, 82, 84, 94, 96, 114, 118, 139
 - evklidska, 16, 18–20, 22, 27–30, 34, 36–38, 52, 114, 118
- dinamično programiranje, 131
- graf, 5
 - Desarguesov graf, 82, 97
 - Golombov graf, 21
 - graf vžigalic, 17, 32, 120, 121
 - Harborthov graf, 32
 - Heawoodov graf, 55, 57
 - I -graf, 8, 88, 89, 92–104, 106–108
 - infinitesimalno togi, 121
 - Moserjev graf, 20, 114, 118
 - Petersenov graf, 32, 62, 65, 66, 75–77
 - posplošeni Petersenov graf, 8, 81–84, 86, 88, 94
 - simetrični kubični graf F_{24} , 95, 97
 - zunanjeravninski graf, 8, 35, 36
- graf z enotsko
 - koordinatizacijo, 17, 21, 33, 38, 49, 55, 62, 86, 100, 101, 103, 107, 108, 114
 - prostora \mathbb{R}^k , 20
 - togo, 30, 31, 42
 - razdaljo, 17, 53, 57, 82, 89, 98, 100–104, 106–108, 112, 114
 - maksimalni, 18, 40, 41
 - minimalni prepovedani, 17, 39–41
 - prepovedani, 61, 64
 - sebi komplementarni, 30
 - realizacijo, 17, 45, 49, 50, 76, 97
- Grueblerjeva enačba, 24, 25
 - prilagojena, 24, 55, 73, 74
- homomorfizem grafov, 9, 18, 64, 65, 112, 114, 118
- izomorfizem grafov, 88, 89, 92, 95, 99, 101–103, 108
- k -razsežen graf z enotsko
 - koordinatizacijo, 17, 20, 27, 38, 119
 - razdaljo, 17, 20, 119
 - realizacijo, 17, 44, 46, 50, 51
- kromatično število prostora, 20, 22
- kromatično število sfere, 112, 113
- Lamanov izrek, 26, 114
- mehanska naprava, 120, 121
- \mathcal{NP} -poln problem, 13, 114, 118, 120
- \mathcal{NP} -težek problem, 120, 121
- predstavitev, 14

- degenerirana, 15, 62, 65, 76, 77, 94, 99,
111–113
- orbitalna, 128, 135
- ravninska konstrukcija, 120
- regularna koncentrična, 128, 138
- splošna koncentrična, 130, 131, 133–135,
138
- visoko degenerirana, 15, 75, 103, 104, 106–
108, 132, 135
- z enotsko razdaljo, 16, 62, 75–77, 94, 95,
112, 113
- z rotacijsko simetrijo, 93–95, 97–104, 106–
108
- problem pakiranja enotskih krogov, 135, 136,
138
- produkt grafov, 7
 - kartezični, 31, 43, 51
 - korona, 38, 53
 - krepki, 52
 - leksikografski, 52
 - tenzorski, 52
- realizacija, 14
 - enolična, 120
 - konfiguracijski prostor, 26
 - z enotsko razdaljo, 16
- sfera, 112, 113
- širina ravnine, 139
- spoj grafov, 28, 30, 52
- subdivizija, 6, 41
 - subdivizijsko število, 42, 51
- unija grafov, 52
- upodobljiv graf, 17