

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za računalništvo in informatiko

Primož Lukšič

Rast v grafih

DOKTORSKA DISERTACIJA

MENTOR: prof. dr. Borut Robič
SOMENTOR: prof. dr. Tomaž Pisanski

Ljubljana, 2009

Povzetek

Doktorska disertacija raziskuje koncept rasti v grafih ter njemu sorodne koncepte razdalje vozlišča oziroma grafa, razdaljno uravnoteženost grafa, razdaljni ostanek grafa ter razdaljno porazdelitev v grafu. Obsega celovit in poenoten pregled področja rasti v grafih od izvora pojma prek obstoječih rezultatov, novih prispevkov k znanosti do odprtih problemov, ki še čakajo na rešitev.

Naravna posplošitev najbolj osnovnih pojmov v teoriji grafov, sosednosti in razdalje, vodi do pojma razdaljne stopnje, ki nam pove število vozlišč na določeni razdalji od izbranega vozlišča oziroma rast v grafu. Rast izvira iz preučevanja neskončnih končno generiranih grup in se je prek Cayleyevih grafov prenesla na neskončne lokalno končne grafe. S tem se je ta oznaka uveljavila tudi v teoriji grafov, kjer je bil začetni cilj preučevati naraščanje števila vozlišč glede na vse večjo razdaljo od izbranega korena.

Od začetka pa do danes poteka raziskovanje rasti vzporedno in neodvisno v končnih ter neskončnih lokalno končnih grafih, zato v disertaciji vsakemu od področij namenimo svoje poglavje. Pri preučevanju rasti v neskončnih grafih začnemo z razdelkom o rasti v grupah, nadaljujemo z definicijo različnih oblik rasti v grafih ter prikažemo pogoje, ki določajo red rasti. Nato zapišemo izreke, ki opisujejo obnašanje rasti v produktih grafih, poglavje pa zaključimo z glavnim rezultatom – algoritmom za izračun rasti v neskončnih grafih, katerega uporabo prikažemo na polpravilnih tlakovanjih Evklidske ravnine.

V četrtem poglavju preučujemo rast v končnih grafih. Prvi del namenimo grafom z regularno rastjo (DDR-grafom), kjer analiziramo njihove lastnosti, simetrije ter obnašanje v produktih grafih. Nato storimo podobno za razdaljno uravnotežene grafe, kjer dokažemo \mathcal{NP} -polnost problema dopolnitve do razdaljno uravnoteženega grafa ter obstoj neskončnih družin omenjenih grafov, ki hkrati niso DDR-grafi. Uvedemo tudi nov koncept razdaljnega ostanka grafa in ga podrobno analiziramo.

Peto poglavje je namenjeno prikazu praktične uporabe rasti, kjer izpostavimo uporabi v matematični kemiji ter računalništvu. Predstavimo tudi algoritem za izračun Hosoyevega polinoma vozlišč v grafih katakondenziranih benzenoidov. Na koncu povzamemo vsebino disertacije, prikažemo nove izvirne prispevke k znanosti ter izpostavimo odprte probleme.

Ključne besede: rast v grafih, sferična rast, krogelna rast, zaporedje razdaljnih stopenj, DDR-graf, razdaljno uravnotežen graf, razdaljni ostanek grafa, rast v produktih grafov, \mathcal{NP} -poln problem, topološki indeks

Abstract

The thesis explores the concept of growth in graphs and some similar concepts, such as the distance of a vertex or a graph, distance-balanced graphs, distance-residual subgraphs and the distance distribution of a graph. It offers a uniform view of the field of growth in graphs, ranging from the definition of the term, old and new results on the subject to the open problems, waiting to be solved.

A natural generalization of two basic notions in graph theory, adjacency and distance, leads to the notion of distance degree, which tells us the number of vertices at a specific distance from the chosen vertex, called also the growth. The term derives from group theory and was carried over to graph theory through Cayley graphs, where it was first used to study the increasing number of vertices with regard to the distance from the root, i.e. the rate of growth.

The research of growth has been done independently in the cases of finite and infinite locally finite graphs from the beginning to this day. Accordingly, each field gets its chapter in the thesis. In the infinite case we start with a section on growth in groups, which is followed by the definition of different forms of growth in graphs and their rate of growth. Then, we research the behavior in product graphs and finish with an algorithm for calculating the growth in infinite graphs, which is used on a family of semiregular tessellations of the Euclidean plane.

In the fourth chapter we study growth in finite graphs. First we concentrate on graphs with regular growth (DDR-graphs), analyzing their properties, symmetries and their product graphs. Later, we do the same for distance-balanced graphs, where we also prove the \mathcal{NP} -completeness of the distance-balanced addition problem and the existence of infinite families of distance-balanced graphs that are not DDR-graphs. Furthermore, we introduce the notion of a distance-residual subgraph and analyze it.

The fifth chapter is meant to show the use of growth in practice, especially in mathematical chemistry and computer science. We present an algorithm for calculating the Hosoya polynomial of a vertex in a catacondensed benzenoid graph. At the end, we summarize the content and present new original contributions to science accompanied with some open problems.

Keywords: growth in graphs, spherical growth, ball growth, distance degree sequence, DDR-graph, distance-balanced graph, distance-residual subgraph, growth in product graphs, \mathcal{NP} -complete problem, topological index

IZJAVA O AVTORSTVU doktorske disertacije

Spodaj podpisani *Primož Lukšič*,
z vpisno številko 63040458,

sem avtor doktorske disertacije z naslovom

Rast v grafih.

S svojim podpisom zagotavljam, da:

- sem doktorsko disertacijo izdelal samostojno pod vodstvom mentorja *prof. dr. Boruta Robiča* in somentorstvom *prof. dr. Tomaža Pisanskega*,
- so elektronska oblika doktorske disertacije, naslov (slov., angl.), povzetek (slov., angl.) ter ključne besede (slov., angl.) identični s tiskano obliko doktorske disertacije,
- in soglašam z javno objavo elektronske oblike doktorske disertacije v zbirki "Dela FRI".

V Ljubljani, dne 12. novembra 2009

Podpis avtorja:

Hvala prof. dr. Tomažu Pisanskemu, ki me je sprejel za mladega raziskovalca in mi nudil izhodišča, na katerih sem začel graditi svojo doktorsko disertacijo, nato pa mi pustil prostor, da sem se naučil samostojnega raziskovanja. Kljub obilici dela pa je vedno našel čas zame in mi pomagal ne le v raziskovalnem smislu, ampak nasploh.

Hvala tudi prof. dr. Borutu Robiču, ki mi je pomagal pri študiju na FRI ter mi poklonil svojo knjižico “Aproksimacijski algoritmi”, ki mi je bila v pomoč tako pri študiju kot pri pisanju te disertacije.

Hvala staršema, brez katerih sedaj ne bi pisal te disertacije, saj sta mi pomagala in verjela vame, tudi ko nista več razumela, kaj točno počnem. :) Vedno sta mi nudila topel dom in podporo, za kar jima bom večno hvaležen.

In nenazadnje, hvala sodelavcem in prijateljem. Še posebej:

- *Primožu Potočniku, ki je skozi moje rezultate spoznaval, da preučevanje rasti postaja “resno” področje,*
- *Sergiu Cabellu, ki se ga ni bilo strah lotevati \mathcal{NP} -polnih problemov,*
- *Barbari in Tini za opomin, da znanje matematike ni povezano z znanjem pravo-pisa, ter*
- *Alenu, Borisu in Damijanu za pomoč pri reševanju problemov, ki morajo biti rešeni “do danes”, za “tekmovanja” o oddajanju projektov do roka in za dokaz, da včasih tudi jabolka in hruške spadajo skupaj k Abelovim grupam.*

Kazalo

1	Uvod	1
1.1	Motivacija in cilji	3
1.2	Pregled vsebine	5
2	Osnove teorije grafov in algoritmov	7
2.1	O grafih	7
2.2	Razdalje v grafih	8
2.3	Simetrije v grafih	10
2.4	Operacije na grafih	11
2.5	Znane družine grafov	12
2.6	Analiza algoritmov	13
3	Rast v neskončnih grafih	17
3.1	Rast v grupah	17
3.2	Rast v grafih	19
3.3	Rast v produktih neskončnih grafov	21
3.4	Algoritem za izračun rasti	24
3.5	Rast v polpravilnih tlakovanjih ravnine	28
4	Rast v končnih grafih	35
4.1	Zaporedje razdaljnih stopenj	35
4.2	DDR-grafi	39

4.2.1	Lastnosti DDR-grafov	41
4.2.2	Simetrije v DDR-grafih	43
4.2.3	Produkti DDR-grafov	46
4.3	Zaporedje razdalj grafa	48
4.4	Razdaljno uravnoreženi grafi	48
4.4.1	Produkti razdaljno uravnoreženih grafov	60
4.4.2	Razpoznavanje razdaljno uravnoreženih grafov	62
4.4.3	Primeri razdaljno uravnoreženih grafov	69
4.5	Razdaljni ostanek grafa	77
4.5.1	Razdaljni ostanki dvodelnih grafov	79
4.5.2	Razdaljni ostanki produktnih grafov	80
4.6	Sorodni razdaljni koncepti	86
5	Primeri uporabe rasti	89
5.1	Rast v matematični kemiji	90
5.2	Razdaljne porazdelitve v računalniških omrežjih	99
5.3	Zanesljivost računalniških omrežij	100
5.4	Problem prenosa podatkov	102
5.5	Status	103
6	Zaključek	105
6.1	Prispevki k znanosti	105
6.2	Odprti problemi	107
A	Izračun rasti v polpravilnih tlakovanjih	109
B	Seznam razdaljnih oznak	119
	Literatura	121
	Stvarno kazalo	131

Poglavje 1

Uvod

Koncepta sosednosti in razdalje sta dva izmed najbolj osnovnih pojmov v teoriji grafov. Sosednost je potrebna že v sami definiciji grafa, medtem ko razdalje med posameznimi vozlišči spadajo med nepogrešljive lastnosti pri preučevanju grafov. Naravna posplošitev obeh konceptov vodi do pojma razdaljne stopnje, ki nam pove število vozlišč na določeni razdalji od izbranega vozlišča oziroma rast v grafu. V nadaljevanju si najprej pogledamo kronološki pregled obstoječih rezultatov na tem področju, ki mu sledijo motivacije za raziskave ter cilji, ki smo jih želeli doseči v okviru doktorske disertacije, uvodno poglavje pa zaključimo s kratkim pregledom vsebine.

Zaradi preproste definicije so bile razdaljne stopnje vse do 80-ih let prejšnjega stoletja uporabljene le kot orodje, potrebno za preučevanje različnih lastnosti grafov; tako v matematiki (Sabidussi [104]) kot v drugih vedah (Harary [53], Randić [97]). To se je spremenilo z uvedbo pojma rasti v matematične strukture, imenovane grupe (Adelson-Velsky in Shreider [1]). Rezultate preučevanja rasti v neskončnih, končno generiranih grupah so raziskovalci najprej prenesli na Cayleyeve grafe, nato pa še na neskončne lokalno končne grafe. S tem se je tudi v teoriji grafov uveljavila oznaka “rast”, saj je bil glavni cilj preučevati naraščanje števila vozlišč glede na vse večjo razdaljo od izbranega vozlišča, tj. korena grafa. Prvi rezultati s tega področja so tako okarakterizirali grafe z linearno, polinomsko, vmesno ter eksponentno stopnjo rasti (Halin [51], Imrich in Seifter [62], Seifter in Trofimov [105], Trofimov [115]), pri čemer je motivacija izvirala iz že obstoječih rezultatov s področja rasti v teoriji grup, kjer je pionirsko delo opravil Wolf [124], sledila pa sta mu poznejša Abelova nagradjenca Mikhail Gromov [41] ter Jacques Tits [113].

Medtem ko je preučevanje rasti v grupah skozi leta rojevalo nove rezultate [40], srečamo na področju rasti v neskončnih grafih le rezultat Pisanskega in Tuckerja [91] o rasti v produktnih

grafih ter izračune rasti v posebnih primerih neskončnih grafov [6, 87, 88, 94, 95]. Vse od začetka se je namreč vzporedno (in neodvisno) razvijalo raziskovanje rasti v končnih grafih.

Lastnosti rasti v končnih grafih so prvi raziskovali Bloom, Kennedy in Quintas [9, 10] ter ji nadelo ime zaporedje razdaljnih stopenj, saj pri preučevanju končnih grafov za definicijo rasti ne potrebujemo več funkcije, ampak je dovolj končno zaporedje oz. vektor. Zaporedje razdaljnih stopenj je kmalu postalo eno od zaporedij, s katerimi so raziskovalci primerjali grafe glede na izomorfnost [16, 108], kar je bilo s pridom uporabljeno v teoretični kemiji [97]. Tam je naraščajoče število kemijskih spojin pogojevalo iskanje preprostih formul, izračunanih iz grafov molekul, ki so dovolj dobro ločile med neizomornimi strukturami in hkrati napovedovale obnašanje še neodkritih molekul s sorodno zgradbo. Danes tem vrednostim pravimo topološki indeksi in čeprav jih poznamo že več kot 100, jih večina bazira na relacijah sosednosti ter na razdaljah v grafu [114].

Bloom in soavtorja so se v svojih prispevkih sicer osredotočali na tako imenovane DDR-grafe, ki imajo zaporedja razdaljnih stopenj vseh vozlišč enaka ter na DDI-grafe, kjer so vsa zaporedja različna. Predvsem so jih zanimale povezave DDR-grafov z grafi z različnimi stopnjami simetrije ter posledična karakterizacija DDR-grafov [10]. Njihovo delo sta v 80-ih letih prejšnjega stoletja nadaljevala Hilano in Nomura [56, 57], ki sta podala omejitve za velikost posamezne razdaljne stopnje v DDR-grafih, ter Zhou [127], ki je preučeval produktne grafe DDR-grafov. Nato je sledilo dolgo obdobje brez rezultatov, ki so ga leta 2006 prekinili Kutnar in soavtorji [71], ko so pokazali ekvivalenco med DDR-grafi ter krepko razdaljno uravnoteženimi grafi. To je sprožilo nadaljevanje raziskav na tem področju [4, 126] ter ustvarilo povezavo še z enim razdaljno definiranim konceptom – razdaljno uravnoteženimi grafi.

Razdaljno uravnotežene grafe so prvi definirali Jerebic, Klavžar in Rall [65], čeprav jih je brez omembe imena uporabljal že Handa [52]. Definicija zahteva, da ima vsaka povezava enako število vozlišč, ki so bližje enemu kot drugemu krajišču. Kutnar idr. [71] so ugotovili, da med te grafe spadajo tudi DDR-grafi, Balakrishnan in soavtorji [4] pa so našli ekvivalenco med povezanimi razdaljno uravnoteženimi grafi in sebi-medianskimi grafi, ki so definirani s pomočjo razdalj vozlišč.

Harary [53] je leta 1959 prvi definiral pojem statusa danega vozlišča kot vsoto vseh elementov zaporedja razdaljnih stopenj tega vozlišča. Sabidussi [104] je to vsoto poimenoval vozliščna centralnost, današnje ime pa je dobila v delu Entringerja in soavtorjev [33], ki so jo poimenovali razdalja vozlišča. Kot pri zaporedju razdaljnih stopenj so tudi tu raziskovali omejitve za velikosti razdalj vozlišč [33, 93], z njimi ugotavljali neizomornost grafov [109] ter definirali sebi-medianske grafe [47], tj. grafe z enakimi razdaljami vseh vozlišč, in raz-

daljno injektivne grafe [86], kjer imajo vsa vozlišča različne razdalje. Ob koncu 20. stoletja je to področje raziskav zamrlo, vse dokler ni bila dokazana v prejšnjem odstavku omenjena ekvivalenca.

Omenimo še uporabo predstavljenih konceptov v praktične namene. Tu moramo zopet izpostaviti področje teoretične kemije, saj se je tudi tam razvijala teorija rasti, čeprav v manj formalnem kontekstu. Tako imenovani Hosoyev polinom [59] je namreč rodovna funkcija razdaljne porazdelitve, ki nam pove število parov vozlišč na določeni razdalji, medtem ko je Hosoyev polinom vozlišča ravno rodovna funkcija zaporedja razdaljnih stopenj. Prek kratkim je postal za tematiko, preučevano v disertaciji, zanimiv tudi Szegedski indeks, saj je bilo dokazano, da je njegov maksimum dosežen natanko v dvodelnih razdaljno uravnoveženih grafih [69].

DDR-grafi in razdaljno uravnoveženi grafi so idealni za reševanje lokacijskih problemov [23, 85, 108, 107]. Z razdaljnimi porazdelitvami lahko opišemo razdalje med vozlišči v grafih, s katerimi modeliramo računalniška omrežja [32], z zaporedjem razdaljnih stopenj lahko določimo spodnjo mejo za čas prenašanja podatkov po omrežju [27], z obema konceptoma pa lahko definiramo zanesljivost omrežij glede na dano verjetnost prenehanja delovanja posamezne povezave v omrežju [2].

Nadaljnji razvoj teorije rasti v grafih je zato pomemben, ne samo za matematiko, ampak tudi zaradi uporabe dobljenih rezultatov v računalništvu, kemiji in drugih naravoslovnih vedah.

1.1 Motivacija in cilji

Področje rasti v grafih je zelo intuitivno in za razumevanje ne potrebuje abstraktnih orodij (če ne upoštevamo rezultatov iz teorije grup). Zaradi tega zna dajati vtis enostavnosti. Čeprav je to delno res, saj je bilo kar nekaj rezultatov pridobljenih razmeroma enostavno, za takšna področja ponavadi velja, da so ostali problemi daleč od trivialnih. In prav tu se je skrivala naša osnovna želja po raziskovanju. Osnovne definicije in probleme je namreč enostavno razumeti ter jih razmeroma hitro razložiti, medtem ko je njihovo reševanje mnogo bolj zahtevno. Nekateri problemi namreč ostajajo nerešeni vse odkar je Bloom s soavtorjema objavil prvotni prispevek o rasti v končnih grafih.

Ponovna zainteresiranost (tudi slovenskih) znanstvenikov za to področje od leta 2006 dalje je prav tako pripomogla k motivaciji, saj so našli povezave med na videz različnimi družinami grafov ter v procesu izpostavili tudi nekaj vprašanj. Poleg tega so zaradi različnega pristopa

spregledali nekatere od že dokazanih lastnosti s področja rasti. Povezava med razdaljno uravnoveženimi grafi in sebi-medianskimi grafi, ki je bila dokazana leta 2009 v [4], je namreč razvidna že iz dela Entringerja in soavtorjev [33] iz leta 1976. Tudi produkti DDR-grafov, ki jih najdemo v [4] ter [71], so bili raziskani že pred dvajsetimi leti [127]. Če temu dodamo še na videz nepovezan razvoj teorije rasti v končnih in neskončnih grafih (ter tudi v matematični kemiji), pridemo do zaključka, da si to področje zasluži celovito in sistematično obravnavanje, še posebej, ker so rezultati tudi praktično uporabni.

Prvi cilj disertacije je zato obsegal poenotenje različnih oznak in definicij iz teorije rasti v grafih, vzpostavitev povezav med rastjo v neskončnih in končnih grafih ter identifikacijo družin grafov, ki so si enake oziroma sorodne glede na koncepte regularnosti razdaljnih stopenj, razdaljne uravnoveženosti ipd. Celovit pristop je zahteval tudi iskanje izvora pojma rasti ter njegovo natančno opredelitev. V nekaterih delih je namreč rast obravnavana kot število vseh vozlišč do določene razdalje od korena, medtem ko je drugje definirana kot število vozlišč na natanko določeni razdalji od korena.

V nadaljevanju smo želeli rešiti nekatere probleme, ki so bili podani v prispevkih s tega področja. V primeru neskončnih grafov je bila izpostavljena ideja o rekurzivnem računanju rasti v grafih z določeno stopnjo simetrije [88], ki pa ni bila formalno dokazana. Tudi obstoječi primeri uporabe postopka so bili vezani na specifične družine grafov [6]. Zato smo želeli v sklopu disertacije dokazati pravilnost postopka, ugotoviti njegovo časovno zahtevnost ter obliko dobljenih rešitev. Kot primer uporabe postopka smo želeli izbrati dovolj znano družino neskončnih grafov s simetrijami, ki bi omogočale izvajanje algoritma ter z njegovo pomočjo izračunati rast te družine.

Bloom, Kennedy in Quintas so v prvem članku o DDR-grafih [10] izpostavili štiri probleme, ki so bili še vedno neodgovorjeni. Naš cilj je bil najti vsaj delne odgovore na tri od njih:

Problem I Kolikšen odstotek r -regularnih grafov predstavljajo DDR-grafi?

Problem II Karakteriziraj DDR-grafe s premerom ≥ 3 .

Problem IV Ali za $r = 3, 4$ obstajajo r -regularni DDR-grafi s trivialno grupo avtomorfizmov?

Če je odgovor da, kakšen je njihov najnižji red?

Kar nekaj prispevkov vsebuje analiziranje rasti oziroma razdaljne uravnoveženosti v produktih grafov [4, 10, 71, 91, 106, 127]. Tu smo želeli razširiti obstoječe rezultate pri produktih DDR-grafov, tj. ugotoviti zaporedje razdaljnih stopenj v direktnem produktu, ter dopolniti izreke v produktih razdaljno uravnoveženih grafov s pomočjo novo ugotovljene povezave z

razdaljo vozlišč v sebi-medianskih grafih.

Ker je področje razdaljno uravnoreženih grafov še dokaj novo, smo v njem našli kar nekaj odprtih problemov. Handa, ki je začel raziskovati omenjene grafe [52], je odkril, da so med dvodelnimi grafi vsi, razen sodih ciklov ter K_2 stopnje najmanj 3. Ta rezultat smo želeli poplošiti na vse razdaljno uravnorežene grafe ter najti neskončne družine grafov, ki so razdaljno uravnoreženi, a hkrati niso DDR-grafi.

Naslednje zelo zanimivo vprašanje je bilo podano na koncu prispevka [65].

Vprašanje: *Kolikšno je najmanjše število povezav, ki jih je potrebno dodati grafu, da ta postane razdaljno uravnorežen?*

Ker se ni še nihče ukvarjal s tem problemom, smo najprej poskušali najti družine grafov, kjer bi lahko na dokaj preprost način preverili zahtevnost problema ter tako ugotovili ali obstaja polinomski algoritem za reševanje ali je potrebno uporabiti heuristike.

Že v samem začetku raziskav v okviru disertacije smo uvedli nov koncept razdaljnega ostanaka grafa [76], ki se navezuje na rast v končnih grafih, saj preučuje množico, ki se nahaja najdlje od korena. Razdaljne ostanke smo podrobneje analizirali (predvsem v produktnih grafih) ter jih smiselno vključili v samo disertacijo.

In nenazadnje smo nameravali raziskati tudi praktično uporabo rasti ter odkriti še neznane povezave med teorijo in prakso. Doseženi cilji so razvidni v nadaljevanju in si vsebinsko sledijo, kot je opisano v naslednjem razdelku.

1.2 Pregled vsebine

Disertacija je sestavljena iz skupno šestih poglavij. V uvodu smo predstavili izhodišča, motivacijo ter cilje, ki smo si jih zadali. V drugem poglavju so razloženi pojmi iz teorije grafov ter analize algoritmov, ki so potrebni za razumevanje vsebine disertacije. Poleg osnovnih pojmov o grafih in razdaljah v njih smo opisali tudi najbolj pogoste simetrije v grafih ter operacije na njih, omenili pa smo tudi nekaj znanih družin grafov, ki smo jih v disertaciji uporabili bodisi kot primere bodisi kot pomoč pri dokazovanju izrekov.

Tretje in četrto poglavje predstavljata bistvo disertacije. V 3. poglavju je analizirana rast v neskončnih lokalno končnih grafih. Začnemo z razdelkom o rasti v grupah, saj iz njih izvira sam pojem rasti. Nadaljujemo z definicijo različnih oblik rasti v grafih ter prikažemo pogoje, ki določajo red rasti. Nato zapišemo izreke, ki opisujejo obnašanje rasti v produktnih grafih,

poglavje pa zaključimo z glavnim rezultatom – algoritmom za izračun rasti v neskončnih grafih, katerega uporabo prikažemo na polpravilnih tlakovanjih Evklidske ravnine.

Četrto poglavje je, za razliko od tretjega, namenjeno preučevanju rasti v končnih grafih. Prvi del namenimo DDR-grafom, kjer analiziramo njihove lastnosti, simetrije ter obnašanje v produktnih grafih. V drugem delu poglavja podobno storimo za razdaljno uravnotežene grafe, kjer med drugim dokažemo \mathcal{NP} -polnost problema dopolnitve do razdaljno uravnoteženega grafa ter obstoj neskončnih družin omenjenih grafov, ki hkrati niso DDR-grafi. V zadnjem delu uvedemo nov koncept razdaljnega ostanka grafa in ga podrobno preučimo.

Peto poglavje je namenjeno prikazu praktične uporabe rasti, kjer izpostavimo uporabi v matematični kemiji ter računalništvu. Glavni prispevek k znanosti je algoritem za izračun Hosoyevega polinoma vozlišč v grafih katakondenziranih benzenoidov.

V zadnjem poglavju povzamemo vsebino disertacije, prikažemo nove izvirne prispevke k znanosti ter izpostavimo odprte probleme s področja rasti v grafih ter sorodnih konceptov. Temu sledita dodatek s formulami in slikami, ki so nam omogočile izračun rasti v polpravilnih tlakovanjih Evklidske ravnine, ter slovar uporabljenih oznak s področja razdalj v grafih.

Poglavje 2

Osnove teorije grafov in algoritmov

V tem poglavju so predstavljeni pojmi iz sicer širokega področja teorije grafov, ki so potrebni za razumevanje koncepta rasti v grafih. Začnemo s formalno definicijo grafa ter njegovih osnovnih lastnosti. Predvsem se osredotočimo na lastnosti, ki so povezane z razdaljami v grafu, saj predstavljajo osnove za izračun rasti, razdaljne uravnoveženosti, razdaljne porazdelitve itd. Razloženi so standardni grafovski produkti ter različne vrste simetrij, ki se lahko pojavijo v grafih. Na podlagi obstoja simetrij je definiranih nekaj družin grafov, nato pa so predstavljeni tudi nekateri specifični grafi, ki jih srečamo na več mestih v disertaciji. Zaključimo z razdelkom o algoritmih ter njihovi zahtevnosti. V disertaciji namreč večkrat naletimo bodisi na računanje rasti v grafih bodisi na poskuse konstrukcije grafov s predpisano rastjo oziroma rasti sorodnim konceptom, zato je nujno poznati osnove algoritmov ter podatkovnih struktur, ki so primerne za delo z grafi.

Večino definicij ter lastnosti grafov smo črpali iz knjig [42, 122], pri analizi algoritmov pa smo si pomagali z [66] in [101].

2.1 O grafih

Graf je urejen par $G = (V, E)$, kjer je $V(G)$ neprazna množica *vozlišč* in $E(G)$ množica *povezav*, kjer je vsaka povezava $e \in E(G)$ predstavljena s parom vozlišč $e = \{u, v\}$, $u, v \in V(G)$. Vozliščema u in v povezave $e = \{u, v\}$ pravimo *krajišči* povezave e ter ju imenujemo *soseдни* vozlišči. Če sta u in v sosednji vozlišči, to označimo z $u \sim v$. Sosednji sta lahko tudi povezavi, če imata skupno krajišče. Moči množice vozlišč $|V(G)|$ pravimo tudi *red grafa*. Število povezav grafa $|E(G)|$ je navzgor omejeno z $\binom{|V(G)|}{2} = |V(G)|(|V(G)| - 1)/2$, ko je

sosednji prav vsak par vozlišč.

Kadar so povezave predstavljene z neurejenimi pari, govorimo o *neusmerjenem* grafu, če so pari urejeni, tj. $e = (u, v)$, pa o *usmerjenem* grafu. Vozliščema usmerjene povezave $e = (u, v)$ rečemo *začetno* in *končno krajišče* povezave e . Če v grafu obstajata dve različni povezavi z istima krajiščema, pravimo, da ima graf *večkratne povezave*. Povezavi $e = \{u, u\}$, $u \in V(G)$, rečemo *zanka*.

Vozliščem, povezavam ali pa kar obojim lahko dodelimo oznake iz neke končne abecede (ponavadi so to kar naravna števila). Medtem ko je oznaka *označen graf* ponavadi rezervirana za graf, ki ima označena vozlišča, grafu z numerično označenimi povezavami pravimo *utežen*. Utežen in v večini primerov tudi usmerjen graf je poznan pod imenom *omrežje*.

Neusmerjen graf je *enostaven*, če nima zank in večkratnih povezav. Čeprav so v disertaciji na nekaj mestih omenjeni tudi usmerjeni grafi, je njihova uporaba vezana le na pomoč izračuna rasti (glej str. 24) ter na primer praktične uporabe rasti (glej str. 103). Zato bomo v naslednjih definicijah kot tudi skozi disertacijo privzemali, da obravnavamo neoznačene neusmerjene enostavne grafe, razen tam, kjer bo eksplicitno omenjeno drugače.

Podgraf grafa G je graf na podmnožici vozlišč in povezav grafa G . *Induciran podgraf* $G[U]$ grafa G na množici vozlišč $U \subseteq V(G)$ je tak podgraf grafa G , ki ima za povezave tiste povezave grafa G , ki imajo obe krajišči v množici U . *Ujemanje* je množica medsebojno nesosednjih povezav v grafu. Če te povezave vsebujejo vsa vozlišča grafa, mu pravimo *popolno ujemanje* ali *1-faktor*.

Pravimo, da je graf *končen*, če vsebuje končno število vozlišč, ter *lokalno končen*, če ima vsako vozlišče končno število sosedov. Prvi del disertacije obsega preučevanje neskončnih lokalno končnih grafov, drugi del pa se osredotoča na končne grafe (ti so prav tako lokalno končni). Za potrebe disertacije so v nadaljevanju predstavljene lastnosti definirane za potrebe končnih grafov. Pri preučevanju lokalno končnih grafov smo sicer uporabili nekaj od omenjenih lastnosti (razbitje na particije, produkte grafov, vozliščno tranzitivnost ipd.), vendar vse bodisi že v osnovi veljajo tudi za neskončne grafe bodisi jih je trivialno posplošiti nanje.

2.2 Razdalje v grafih

Med najbolj osnovne pojme v teoriji grafov spadata koncepta stopnje ter razdalje. *Stopnja* oziroma *valenca* vozlišča v predstavlja število povezav, ki imajo v za krajišče. Stopnja, ki jo

označimo z $\deg(v)$ ¹, tako pove število sosedov vozlišča v . Če stopnje vseh vozlišč uredimo v nepadajočem vrstnem redu, dobimo *zaporedje stopenj* grafa. Če je stopnja vseh vozlišč v grafu enaka, npr. r , pravimo, da je graf r -regularen. V kolikor je graf usmerjen, ločimo izhodno ter vhodno stopnjo glede na število povezav, katerim je dano vozlišče začetno oziroma končno krajišče.

Sprehod v grafu je alternirajoče zaporedje vozlišč in povezav grafa $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n$, kjer sta v_{i-1} in v_i krajišči povezave e_i za vsak $i = 1, 2, \dots, n$. Dolžina sprehoda je število povezav v sprehodu. *Pot* v grafu je sprehod, ki vsebuje le različna vozlišča grafa. *Cikel* je sprehod, ki ima enako le začetno in končno vozlišče. Dolžina najkrajšega cikla predstavlja *ožino* grafa. Ciklu, ki vsebuje vsa vozlišča grafa, pravimo *Hamiltonov cikel*.

Graf je *povezan*, če obstaja pot med vsakim parom vozlišč. Če je po odstranitvi poljubnih $k - 1 < |V(G)| - 1$ vozlišč grafa G dobljeni graf še vedno povezan, pravimo, da je graf G k -povezan. Ker je rast dobro definirana le na povezanih grafih, bo večina definicij in trditev v disertaciji temeljila na tej lastnosti grafov.

Razdalja med vozliščema u in v v grafu G je definirana kot dolžina najkrajše poti med njima. Označimo jo z $d_G(u, v)$ oziroma z $d(u, v)$, kadar ni dvoma, o katerem grafu govorimo. Če sta vozlišči nepovezani, definiramo $d_G(u, v) = \infty$. Razdalja v neusmerjenem enostavnem grafu je metrika, kar pomeni, da ima lastnosti pozitivne definitnosti, simetričnosti ter zadošča *trikotniški neenakosti*, tj. $d_G(u, z) \leq d_G(u, v) + d_G(v, z)$ za vse $u, v, z \in V(G)$. Razdaljo med dvema vozliščema lahko posplošimo na razdaljo med vozliščem in podgrafom R grafa G , kar označimo z $R \subset G$, kot $d_G(v, R) := \min_{r \in V(R)} d(v, r)$ ter na razdaljo med dvema podgrafoma $R, S \subset G$ kot $d_G(R, S) := \min_{s \in V(S)} d(s, R)$.

Razbitje ali *particija* množice M je družina množic, ki so medsebojno disjunktne, a skupaj sestavljajo celotno množico M . Množico $P(G, V_0) = \{V_0, V_1, \dots, V_m\}$, kjer je G povezan graf, V_0 pa neprazna podmnožica $V(G)$, imenujemo *razdaljna particija* grafa G glede na koren V_0 , če neprazne množice V_i , za $i = 1, 2, \dots, m$, skupaj z V_0 definirajo particijo $V(G)$, pri čemer velja

$$V_i := \{v \in V(G) \setminus (V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_{i-1}) \mid \exists u \in V_{i-1}, \{u, v\} \in E(G)\}.$$

Za $v \in V_0$ in $v_i \in V_i$ tako velja $d(v, v_i) \geq i$, pri čemer vedno obstaja vozlišče $v_0 \in V_0$, za katerega velja $d(v_0, v_i) = i$. Omenimo tudi, da smo v razdelku o razdaljni uravnoveženosti (glej str. 48) dodatno definirali še finejšo razdaljno particijo, kjer V_0 vsebuje par vozlišč, množice razbitja pa definiramo glede na razdaljo od obeh vozlišč.

¹angl. degree; odtod tudi oznaka deg

Za vozlišče v grafa G je njegova *ekscentričnost* $e(v)$ definirana kot razdalja od v do vozlišča, ki je v G najbolj oddaljen od v , tj. $e(v) = \max_{u \in V(G)} d(v, u)$. Minimalna ekscentričnost po vseh vozliščih grafa se imenuje *polmer* grafa in je označen z $\text{rad}(G)$,² maksimalni ekscentričnosti pa rečemo *premer* grafa in ga označimo z $\text{diam}(G)$.³ Za predstavitev razdalj v grafu ponavadi uporabljamo *matriko razdalj*, kjer element (i, j) označuje razdaljo med i -tim in j -tim vozliščem v grafu.

Vozlišče v je *centralno vozlišče* grafa G , če je $e(v) = \text{rad}(G)$. Podgraf, ki ga inducirajo centralna vozlišča grafa G , imenujemo *center* grafa G . Vozlišče v je *mediansko vozlišče* grafa G , če ima minimalno vsoto razdalj do vseh ostalih vozlišč v grafu G . Podgraf, ki ga inducirajo medianska vozlišča grafa G , imenujemo *mediana* grafa G .

2.3 Simetrije v grafih

Naj bosta G in H neusmerjena enostavna grafa. *Izomorfizem grafov* G in H je bijektivna preslikava f iz množice $V(G)$ v množico $V(H)$, tako da za vsak par vozlišč $u, v \in V(G)$ velja $\{u, v\} \in E(G)$ natanko tedaj, ko je $\{f(u), f(v)\} \in E(H)$. Če sta grafa G in H izomorfna, to zapišemo kot $G \cong H$. *Avtomorfizem grafa* je izomorfizem grafa samega nase. Množica vseh avtomorfizmov grafa G skupaj z operacijo kompozicije tvori strukturo grupe [61, trditev 1.15], ki jo imenujemo grupa avtomorfizmov grafa G in označimo z $\text{Aut}(G)$.

Izomorfnost je eden glavnih strukturnih konceptov, pri katerem primerjamo grafe glede na zgradbo in ne glede na posamezne elemente ali predstavitev. Iz te opredelitve izhaja tudi pojem grafovske *invariante*, s katerim definiramo kvantitativno izražene lastnosti, ki se ohranjajo v izomorfni grafih. Večina prej omenjenih lastnosti, kot so stopnje vozlišč, polmer, premer, ožina, k -povezanost itd., so grafovske invariante.

Graf G je *razdaljno tranzitiven*, če za vsako četvorko vozlišč $x, y, u, v \in V(G)$, kjer je $d(x, y) = d(u, v)$, obstaja avtomorfizem $\gamma \in \text{Aut}(G)$, za katerega velja $\gamma(x) = u$ ter $\gamma(y) = v$.

Graf G je *simetričen* (tudi *1-tranzitiven* ali *ločno tranzitiven*), če za vsako četvorko vozlišč $x, y, u, v \in V(G)$, kjer je $x \sim y$ in $u \sim v$, obstaja avtomorfizem $\gamma \in \text{Aut}(G)$, za katerega velja $\gamma(x) = u$ ter $\gamma(y) = v$.

Graf G je *vozliščno tranzitiven*, če za vsak par vozlišč $u, v \in V(G)$ obstaja avtomorfizem $\gamma \in \text{Aut}(G)$, za katerega velja $\gamma(u) = v$.

²angl. radius; odtod tudi oznaka rad

³angl. diameter; odtod tudi oznaka diam

Graf G je *povezavno tranzitiven*, če za vsak par povezav $\{x, y\} \in E(G)$ in $\{u, v\} \in E(G)$ obstaja avtomorfizem $\gamma \in \text{Aut}(G)$, za katerega velja $\{\gamma(x), \gamma(y)\} = \{u, v\}$. Grafom, ki so povezavno tranzitivni, a niso vozliščno tranzitivni, pravimo *semisimetrični grafi*.

Graf G je *razdaljno regularen*, če obstajajo števila b_i, c_i , za $i = 0, 1, \dots, \text{diam}(G)$, tako da za vsak par vozlišč u in v na razdalji i obstaja natanko c_i sosedov vozlišča u , ki so v V_{i-1} , ter b_i sosedov vozlišča u , ki so v V_{i+1} , kjer je V_i element razdaljne particije $P(G, \{v\})$, tj. množica vozlišč na razdalji i od v . Tabela števil $\{b_i, c_i\}$, ki karakterizira razdaljno regularen graf, se imenuje *presečna tabela*.

2.4 Operacije na grafih

Osnovne operacije na grafih obsegajo dodajanje ter odzemanje vozlišč oziroma povezav. Ti postopki predstavljajo temelje kompleksnejših operacij, ki jih ločimo na enočlene ter dvočlene glede na število grafov, na katerih delujejo. Od enočlenih operacij omenimo *komplement* grafa G , ki ga označimo z \bar{G} in ima množico vozlišč enako kot graf G , za njegove povezave pa velja $\{u, v\} \in E(\bar{G}) \iff \{u, v\} \notin E(G)$.

Disjunktna unija grafov G in H z različnima množicama vozlišč in povezav je dvočlena operacija, katere rezultat je graf $G \cup H$ z vozlišči $V(G) \cup V(H)$ ter povezavami $E(G) \cup E(H)$. *Spoj* grafov G in H z različnima množicama vozlišč in povezav je enak uniji grafov z dodanimi povezavami $\{g, h\}$ za vsak $g \in V(G)$ in vsak $h \in V(H)$. Označimo ga z $G + H$.

Produkt dveh grafov G in H je v splošnem graf z množico vozlišč $V(G) \times V(H)$, tj. množico vseh urejenih parov (g, h) za $g \in V(G)$ ter $h \in V(H)$, kjer je sosednost vozlišč določena s sosednostjo posameznih komponent v vsakem od grafov G in H . Grafoma v produktu pravimo tudi *faktorja*. Najbolj znani in preučevani so naslednji produkti, ki so definirani na podlagi pogojev sosednosti vozlišč (g, h) ter (g', h') v produktu:

ime produkta	oznaka	definicija sosednosti
kartezični	$G \square H$	bodisi $g = g'$ in $\{h, h'\} \in E(H)$ bodisi $h = h'$ in $\{g, g'\} \in E(G)$
krepki	$G \boxtimes H$	bodisi $g = g'$ in $\{h, h'\} \in E(H)$ bodisi $h = h'$ in $\{g, g'\} \in E(G)$ bodisi $\{g, g'\} \in E(G)$ in $\{h, h'\} \in E(H)$
direktni	$G \times H$	$\{g, g'\} \in E(G)$ in $\{h, h'\} \in E(H)$
leksikografski	$G \circ H$	bodisi $\{g, g'\} \in E(G)$ bodisi $\{h, h'\} \in E(H)$ in $g = g'$

Kartezični produkt je najbrž bralcu najbolj znan, saj je tudi najbolj preučevan od vseh pro-

duktov. Opazimo lahko, da krepki produkt vsebuje ravno povezave kartezičnega in direktnega produkta. Direktni produkt je poznan tudi pod imeni tenzorski, kategorični ter Kroneckerjev produkt in včasih nosi oznako \otimes . Glavna razlika med leksikografskim produktom ter ostalimi je v njegovi nekomutativnosti. Pravijo mu tudi kompozicija oziroma substitucija, pogosto pa zanj srečamo oznako $G[H]$, ki je pri nas rezervirana za inducirane podgrafe. Leksikografski produkt grafov G in H si lahko predstavimo tako, da nadomestimo vsako vozlišče $g \in V(G)$ s kopijo grafa H , ki jo označimo s H_g , nato pa naredimo spoj grafov H_g in $H_{g'}$ v primeru, ko sta g in g' sosednji vozlišči v G . Več o standardnih produktih grafov je moč najti v knjigi Imricha in Klavžarja [61].

V neskončnih grafih lahko definiramo tudi *prosti produkt* grafov. Naj bosta vozlišči $g \in V(G)$ ter $h \in V(H)$ korena, glede na katera bomo računali rast. Formalno vozlišča prostega produkta $G \star H$ definiramo z vsemi končnimi zaporedji vozlišč iz $(V(G) \setminus \{g\}) \cup (V(H) \setminus \{h\})$, pri čemer elementi alternirajo med $V(G) \setminus \{g\}$ ter $V(H) \setminus \{h\}$, vozlišče (g, h) pa označimo s praznim zaporedjem. Dve zaporedji α in β sta si pri tem sosednji v $G \star H$, če in samo če je bodisi $\alpha = \gamma$ in $\beta = \gamma v$, kjer je v sosed korena v danem faktorju, bodisi je $\alpha = \gamma v$ in $\beta = \gamma u$, kjer sta v in u sosednji vozlišči v danem faktorju.

Prosti produkt $G \star H$ si lahko predstavljamo tudi tako, da vsako vozlišče grafa G poistovetimo s korenem $h \in V(H)$ in tako pripnemo $|V(G)|$ kopij grafa H na graf G . V vsaki izmed kopij ponovno poistovetimo vsako vozlišče (razen korena!) s korenem $g \in V(G)$ in postopek nadaljujemo v neskončnost.

2.5 Znane družine grafov

Poglejmo si nekaj standardnih družin neoznačenih neusmerjenih enostavnih grafov. *Trivialen graf* je graf, ki vsebuje le eno vozlišče. *Prazen graf* N_n vsebuje n vozlišč in je brez povezav. S C_n označimo cikel na n vozliščih, s P_n pa pot na n vozliščih. Grafu na n vozliščih z vsemi možnimi povezavami rečemo *poln graf* in ga označimo s K_n . V *dvodelnem grafu* lahko na množici vozlišč $V(G)$ definiramo razbitje na dve podmnožici $P_1(G)$ in $P_2(G)$, ki ne vsebujeta sosednjih vozlišč. Če je vsako vozlišče $P_1(G)$ sosednje z vsakim vozliščem $P_2(G)$, govorimo o *polnem dvodelnem grafu*, ki ga označimo s $K_{m,n}$, kjer je $m = |P_1(G)|$ in $n = |P_2(G)|$. Za dvodelne grafe velja, da ne vsebujejo ciklov lihih dolžin. Povezanemu grafu z n vozlišči in $n - 1$ povezavami pravimo *drevo*. Ekvivalentno lahko rečemo, da je drevo povezan graf brez ciklov.

Zelo znana družina grafov so *posplošeni Petersenovi grafi*, ki jih je prvi predstavil H. S. M.

Coxeter [24], današnje ime pa so dobili v članku Marka Watkinsa [119]. Posplošeni Petersenov graf $GP(n, k)$ je za $n \geq 3$ in $1 \leq k \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$ definiran na $2n$ vozliščih, ki jih označimo z $\{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$, ter vsebuje povezave $\{u_i, u_{i+1}\}$, $\{u_i, v_i\}$ in $\{v_i, v_{i+k}\}$ za $0 \leq i \leq n-1$, kjer indekse oznak vozlišč gledamo po modulu n . Posplošeni Petersenov graf ponavadi narišemo tako, da vozlišča u_i tvorijo zunanji cikel, vozlišča v_i pa so v notranjosti po vrsti razporejena na krožnici. Če je največji skupni delitelj števil n in k enak 1, tudi notranja vozlišča ležijo na ciklu, če pa je enak m , ležijo notranja vozlišča na m disjunktnih ciklih z dolžinami n/m . Povezavam $\{u_i, v_i\}$ pravimo tudi *špice*. Grupe avtomorfizmov $\text{Aut}(GP(n, k))$ so raziskane v članku [37]. Posebej izpostavimo le avtomorfizem α , ki je definiran z $\alpha(u_i) = u_{i+1}$ ter $\alpha(v_i) = v_{i+1}$ in bo pomemben v nadaljevanju. Med posplošenimi Petersenovimi grafi je najbolj poznan *Petersenov graf* $GP(5, 2)$, ki se ga v teoriji grafov pogosto uporablja za iskanje primerov ter protiprimerov.

Krožni graf $Ci_n(j_1, j_2, \dots, j_m)$, kjer je $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq \lfloor n/2 \rfloor$ je graf z n vozlišči v_1, v_2, \dots, v_n ter povezavami $\{v_i, v_{i+j_k}\}$ za vsak $1 \leq i \leq n$ ter vsak $1 \leq k \leq m$, kjer indekse oznak vozlišč gledamo po modulu n . V krožnem grafu je torej vozlišče v_i sosednje z vozlišči v_{i+j_k} ter v_{i-j_k} za $1 \leq k \leq m$. V posebnih primerih dobimo npr. $Ci_n(1) = C_n$ ter $Ci_n(1, 2, \dots, \lfloor n/2 \rfloor) = K_n$.

2.6 Analiza algoritmov

Algoritem je postopek, namenjen reševanju nekega problema, pri čemer s pojmom problem mislimo na množico nalog, ki imajo enako strukturo. Izvajanje algoritma moramo znati opisati v končno korakih, ponavadi pa zahtevamo tudi, da se izvede v končnem času pri poljubnih vhodnih podatkih. Algoritem, ki uporablja “zdravo pamet”, tj. logično sklepanje, intuitivne premisleke, pretekle izkušnje itd., in v večini primerov vrne dovolj dobro rešitev, ki morda ni optimalna, imenujemo *hevrstika*. Hevrstike so uporabne pri reševanju problemov, za katere niso znane hitre metode, ki bi poiskale optimalno rešitev glede na podane omejitve. Ob uporabi hevrstike pridobimo na hitrosti postopka reševanja, lahko pa izgubimo pri natančnosti rešitve. Znan primer hevrstike je požrešni algoritem, ki na vsakem koraku izvajanja izbere trenutno najbolj ugodno možnost. Čeprav je v splošnem zelo uporabna metoda, vrne optimalno rešitev le v posebnih primerih; glej [66, poglavje 5].

Če želimo nek algoritem izvesti v praksi, moramo podatke predstaviti v strukturi, ki bo omogočala učinkovito delo z njimi. V primeru grafov se kot podatkovne strukture uporabljajo matrika sosednosti, matrika razdalj, seznam povezav ter seznam sosedov. Prav slednji, pri

katerem za vsako vozlišče podamo seznam njegovih sosedov, je bil glavna podatkovna struktura pri delu s programskim paketom Mathematica [125] ter sistemom Vega [89, 90], ki omogoča uporabo grafov v Mathematici.

Časovna zahtevnost $T_{\mathcal{A}}(n)$ algoritma \mathcal{A} (včasih tudi stroja) predstavlja največje število računskih korakov, ki jih potrebuje algoritem \mathcal{A} pri danih vhodnih podatkih z velikostjo n , da reši problem (vrne rezultat). Podobno lahko definiramo tudi povprečno časovno zahtevnost, vendar je zanjo v praksi potrebno poznati verjetnostno porazdelitev vhodnih podatkov.

Časovno zahtevnost torej podamo kot funkcijo velikosti vhodnih podatkov. Računske korake merimo v osnovnih operacijah stroja, ki izvaja algoritem, v nekaterih primerih pa se omejimo le na štetje določenih operacij (na primer aritmetičnih operacij ali primerjav). Možnost imamo tudi izbrati ali se posamezna operacija izvede v konstantnem času glede na velikost operandov (model z enakomernim cenikom) ali pa v času, ki je odvisen od njihove velikosti (model z logaritemskim cenikom). Za naše potrebe smo privzeli prvega.

Čas (pa tudi prostor), potreben za izvedbo algoritma, se lahko od računalnika do računalnika močno razlikuje. Zato rezultati analize algoritma opredeljujejo le čas za reševanje določene naloge na konkretnem računalniku. Ker pa želimo rezultate posplošiti na različne družine računskih strojev, je bolje opisati asimptotično zahtevnost algoritma, tj. ugotoviti ali narašča kvečjemu tako hitro, prav tako hitro ali vsaj tako hitro kot neka znana funkcija. Za opis takšnih lastnosti uporabljamo pojem *reda velikosti*, ki ga predstavimo v \mathcal{O} -zapisu. Za naše potrebe definirajmo le lastnost “kvečjemu tako hitro”.

Naj bosta dani funkciji $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Pravimo, da je g kvečjemu reda f , kar zapišemo kot $g(n) = \mathcal{O}(f(n))$, če obstajata pozitivni konstanti C in n_0 , da velja $|g(n)| \leq C|f(n)|$ za vsak $n > n_0$.

Če je $T_{\mathcal{A}}(n) = \mathcal{O}(f(n))$, pravimo, da za problem obstaja algoritem s časovno zahtevnostjo $\mathcal{O}(f(n))$. Seveda pa ta zahtevnost ni nujno najmanjša možna, ampak predstavlja le zgornjo mejo. Z uvedbo asimptotične zahtevnosti algoritmov se je v praksi uveljavila delitev na “lahke” in “težke” probleme, pri čemer lahko časovno zahtevnost lahkih problemov omejimo z nekim polinomom, težkih pa ne moremo.

Preden formalno definiramo razrede glede na računsko zahtevnost, si pogledjmo, kakšne vrste računskih problemov poznamo. V osnovi ločimo *optimizacijske* ter *odločitvene probleme*. Optimizacijski problemi obsegajo iskanje najboljše možne rešitve dane naloge, medtem ko nas pri odločitvenih zanima le, če dana naloga izpolnjuje neko zahtevo. Ker so v disertaciji omenjeni problemi bodisi v odločitveni obliki bodisi prevedeni nanjo, si pogledjmo teorijo zahtevnosti zanj.

Algoritem \mathcal{A} reši odločitveni problem, če vrne ustrezen odgovor (DA oziroma NE) za vsako dobro definirano nalogo. Odločitveni problem je rešljiv v času $f(n)$, če obstaja (determinističen) algoritem, ki vsako nalogo velikosti n reši v času kvečjemu $f(n)$. S \mathcal{P} označimo razred odločitvenih problemov, ki so rešljivi v polinomskem času glede na velikost naloge.

V primeru pozitivnega odgovora nas večinoma zanima tudi konstrukcija rešitve, ki je dostiokrat zahtevna. Če pa že imamo neko rešitev, je zahtevnost preverjanja, ali je to res konstruktivna rešitev problema, nov kriterij, po katerem lahko razdelimo odločitvene probleme. *Nedeterministični algoritem* \mathcal{A} reši odločitveni problem, če za vsako nalogo s pozitivno rešitvijo le-to ugame, preveri ter vrne DA, v primeru naloge z negativno rešitvijo pa vrne NE. Odločitveni problem je nedeterministično rešljiv v času $f(n)$, če obstaja nedeterministični algoritem, ki reši ta problem v času $f(n)$. Z \mathcal{NP} označimo razred odločitvenih problemov, ki so nedeterministično rešljivi v polinomskem času glede na velikost naloge.

V razredu \mathcal{NP} so tako problemi iz razreda \mathcal{P} kot problemi, za katere ne poznamo polinomskega algoritma za reševanje (vemo pa, da lahko rešitev v polinomskem času preverimo). Nekateri problemi iz razreda \mathcal{NP} so tako težji od ostalih. Najtežji so tako imenovani \mathcal{NP} -polni problemi, na katere lahko v polinomskem času prevedemo (po Karpju) vse ostale probleme iz \mathcal{NP} . S pojmom prevedba tu mislimo na algoritem, ki za vsako nalogo prvega problema sestavi nalogo drugega problema, pri čemer ima ena naloga pozitivno rešitev natanko tedaj, ko jo ima tudi druga. Kljub težavnosti, ki jo kažejo \mathcal{NP} -polni problemi, pa še vedno ni dokazan obstoj \mathcal{NP} -polnega problema, ki ne bi bil v \mathcal{P} , od kjer bi sledilo $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$. Več o \mathcal{NP} -polnih problemih lahko bralec najde v knjigi [38]. Omenimo še, da iz \mathcal{NP} -polnosti odločitvenih oblik optimizacijskih problemov sledi tudi težavnost (pravimo ji \mathcal{NP} -težkost) optimizacijskih problemov.

Poglavje 3

Rast v neskončnih grafih

Rast smo preučevali ločeno za neskončne in končne grafe, saj so zaradi drugačne zgradbe omenjenih družin različne tudi lastnosti, ki so pomembne v povezavi s pojmom rasti. V tem poglavju je tako najprej obravnavana rast v neskončnih lokalno končnih grafih, v naslednjem pa rast oziroma zaporedje razdaljnih stopenj v končnih grafih. Vrstni red je pogojen z izvorom pojma rasti, ki izhaja iz študij neskončnih grup.

Oglejmo si torej, kako je rast definirana v grupah ter kako je bila njena definicija ter lastnosti prenesena na neskončne grafe. Pri definicijah in navedbah rezultatov so omenjeni le pojmi iz teorije grup, ki so nujni za njihovo predstavitev. Ker pa je teorija grup kompleksno in abstraktno področje, je za dobro razumevanje oziroma uporabo rezultatov dostikrat potrebno znanje, ki presega okvire disertacije in zato tu ni navedeno. Bralec si lahko več o grupah in sorodnih matematičnih strukturah prebere v [102] ter [117].

3.1 Rast v grupah

Grupa (\mathcal{G}, \bullet) je matematična struktura, sestavljena iz množice \mathcal{G} , zaprte za dvočleno operacijo \bullet , in vsebuje enoto e , inverzni element vsakega elementa ter zadošča pogoju asociativnosti. V nadaljevanju smo pri oznakah grup izpustili operacijo, saj je razlika med množico \mathcal{G} in grupo \mathcal{G} razvidna že iz samega imena. Glede na število elementov ločimo končne in neskončne grupe. Podmnožica S množice elementov grupe \mathcal{G} , za katero velja, da lahko vsak element grupe \mathcal{G} zapišemo kot produkt končnega zaporedja elementov iz $S \cup S^{-1}$ (S^{-1} je množica inverzov elementov iz S), predstavlja *generatorje* grupe \mathcal{G} . Če S vsebuje končno elementov, pravimo, da je \mathcal{G} *končno generirana*.

Koncept rasti v grupah je bil prvič definiran v članku Adelson-Velskyja in Shreiderja [1] iz leta 1957.

Definicija. Naj bo \mathcal{G} končno generirana neskončna grupa z množico generatorjev S . Funkcija rasti $f_{\mathcal{G}}(n)$ grupe \mathcal{G} glede na množico generatorjev S je definirana z $f_{\mathcal{G}}(0) := 1$ ter z

$$f_{\mathcal{G}}(n) := |\{g \in \mathcal{G} \mid g = s_1 s_2 \cdots s_n, s_i \in S \cup S^{-1} \cup \{e\}\}| \text{ za } n \in \mathbb{N}.$$

Ker je poljuben element s_i iz zgornje definicije lahko tudi enota, spadajo v $f_{\mathcal{G}}(n)$ vsi elementi iz $f_{\mathcal{G}}(n-1)$, $f_{\mathcal{G}}(n-2)$ in tako dalje. Pravimo, da ima grupa \mathcal{G} eksponentno rast, če obstaja konstanta $c > 1$, tako da velja $f_{\mathcal{G}}(n) \geq c^n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Če obstajata konstanti c in d , da velja $f_{\mathcal{G}}(n) \leq cn^d$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, ima grupa polinomsko rast. Grupe vmesne rasti pa so tiste, ki niso eksponentne rasti, a rastejo hitreje kot polinomsko. Velikostni red rasti grupe ni odvisen od generatorjev grupe.

O klasifikacijah grup glede na omenjene rede rasti obstaja kar nekaj rezultatov, zato omenimo le najpomembnejše. Prve raziskave rasti v grupah je opravil Wolf [124], ki je dokazal, da imajo skoraj nilpotentne grupe polinomsko rast. Pravimo, da ima grupa \mathcal{G} skoraj lastnost P , če vsebuje podgrupo edinko končnega indeksa, ki ima lastnost P . Nilpotentnost grupe G pa pomeni obstoj končnega naraščajočega zaporedja podgrup $G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_n$, kjer je $G_0 = \{e\}$, $G_n = G$, kvocientna grupa G_i/G_{i-1} pa je enaka centru grupe G/G_{i-1} za vsak i , $1 \leq i \leq n$. Več o lastnostih nilpotentnih grup lahko bralec najde v [102].

Velja tudi obrat Wolfove trditve, kar je prvi pokazal Gromov [41].

Izrek 1 ([41, 113, 124]). Končno generirana grupa ima polinomsko rast, če in samo če je skoraj nilpotentna.

Bass [7] je leta 1972 dokazal, da za grupe s polinomsko rastjo obstajata konstanti c_1 in c_2 ter nenegativno celo število d , da velja $c_1 n^d \leq f_{\mathcal{G}}(n) \leq c_2 n^d$. Številu d pravimo stopnja rasti. Kot primer grup z eksponentno rastjo velja omeniti izrek Milnorja in Wolfa [124], ki pravi, da imajo eksponentno rast vse končno generirane rešljive grupe, ki niso skoraj nilpotentne. Za grupe z vmesno rastjo pa je najprej veljala domneva, da sploh ne obstajajo, ki se je izkazala za resnično le v rešljivih grupah [62]. Več o rešljivih grupah bralec najde v knjigi [117].

Gromov je rast v grupah preučeval tudi z vidika diferencialne geometrije na Riemannovih mnogoterostih [41], medtem ko je Tits analiziral rast v Lijevih grupah. Pregled znanih rezultatov in odprtih problemov na področju rasti v grupah najdemo v članku [40].

3.2 Rast v grafih

Najbolj naravna razširitev koncepta rasti na grafe je identifikacija funkcije rasti grupe \mathcal{G} , ki ima množico generatorjev enako S , z njenim *Cayleyevim grafom* $C(\mathcal{G}, S)$, ki ima za vozlišča elemente grupe \mathcal{G} , povezave pa so definirane kot $\{g, gs\}$, kjer je $g \in \mathcal{G}$ in $s \in S \cup S^{-1}$. To pomeni, da imamo tudi v primeru grafov takšne s polinomsko, vmesno ter eksponentno rastjo. Naslednji korak je razširitev funkcije rasti na poljubne lokalno končne grafe, tj. grafe, kjer ima vsako vozlišče končno stopnjo. Načeloma bi lahko definirali rast tudi v lokalno neskončnih grafih, vendar trenutno obstaja na tem področju le peščica rezultatov, ki obravnavajo vozliščno tranzitivne grafe [87].

Naj bo G lokalno končen graf. Kot smo omenili v prejšnjem poglavju o osnovah teorije grafov, s tem avtomatsko privzemamo, da je G tudi **neoznačen**, **neusmerjen** ter **povezan**. *Funkcija rasti grafa G glede na vozlišče $v \in V(G)$* , ki mu pravimo *koren*, je definirana z

$$\gamma_G(v, n) := |\{u \in V(G) \mid d(v, u) \leq n\}|,$$

kjer je n nenegativno celo število. Grafom, kjer rast ni odvisna od izbire vozlišča v , pravimo *grafi z regularno rastjo*, njihovo funkcijo rasti pa označimo kar z $\gamma_G(n)$. Ni težko ugotoviti, da med te grafe spadajo vozliščno tranzitivni grafi [100]. Opazimo tudi, da so v $\gamma_G(v, n)$ šteta vsa vozlišča, ki so največ n oddaljena od vozlišča v , zato tej funkciji pravimo tudi *krogelna funkcija rasti*. To storimo zato, da jo ločimo od funkcije

$$\delta_G(v, n) := |\{u \in V(G) \mid d(v, u) = n\}|,$$

ki predstavlja *sferično funkcijo rasti vozlišča $v \in V(G)$* . Če poznamo vse sferične funkcije od 1 do n , poznamo tudi krogelno funkcijo $\gamma_G(v, n)$. Po drugi strani pa je potrebno poznati le krogelni funkciji za n ter $n - 1$, da dobimo $\delta_G(v, n) = \gamma_G(v, n) - \gamma_G(v, n - 1)$ za $n \geq 1$. Na primeru neskončnih grafov bomo več uporabljali krogelno rast, medtem ko bo sferična koristna pri preučevanju končnih grafov, kjer je znana pod imenom zaporedje razdaljnih stopenj.

Za preučevanje velikostnega reda (krogelne) rasti v grafih lahko uporabimo enake omejitve kot smo jih pri grupah. Velikostni red tudi tu ni odvisen od izbire vozlišča. Vzemimo namreč dve vozlišči $u, v \in V(G)$ na razdalji i . Potem velja $\gamma_G(v, n - i) \leq \gamma_G(u, n) \leq \gamma_G(v, n + i)$. Torej lahko omembo vozlišča pri ugotavljanju velikostnih redov izpustimo.

Vprašanje je, katere družine grafov spadajo v katerega od velikostnih redov. Za opis grafov polinomske rasti obstaja izrek Trofimova [115]. Za njegovo razumevanje pa potrebujemo definicije naslednjih struktur iz teorije grup. Če grupa \mathcal{G} deluje tranzitivno na grafu G , je *nepriimitivni sistem* \mathcal{G} na G particija τ množice vozlišč $V(G)$ na podmnožice, ki jim pravimo *bloki*,

če vsak element \mathcal{G} permutira bloke particije τ . Primer trivialnih neprimitivnih sistemov sta particiji $V(G)$ na singeltone ali pa na celotno $V(G)$. Kvocientni graf G_τ ima množico vozlišč enako množici blokov, dve vozlišči $u_\tau, v_\tau \in V(G_\tau)$ pa sta sosednji v G_τ natanko tedaj, ko velja $\{u, v\} \in E(G)$ za vsaj dve vozlišči $u \in u_\tau$ ter $v \in v_\tau$.

Izrek 2 ([115]). *Naj bo G neskončen lokalno končen vozliščno tranzitiven graf. Potem ima polinomska rast natanko tedaj, ko obstaja neprimitivni sistem τ grupe avtomorfizmov grafa G na $V(G)$ s končnimi bloki, tako da je grupa avtomorfizmov kvocientnega grafa G_τ končno generirana in skoraj nilpotentna ter da je stabilizator vozlišča grafa G_τ iz grupe avtomorfizmov G_τ končen.*

Obstajajo sicer še drugi rezultati s področja grafov polinomske rasti [62, 73, 105], vendar je za celotno karakterizacijo neskončnih lokalno končnih grafov glede na velikostni red rasti potrebno uvesti koncept koncev grafov, ki jih je prvi preučeval Halin [50]. Pot v grafu, ki je v eno smer neskončna, imenujemo *žarek*, če pa je pot neomejena v obeh smereh, ji rečemo *dvojni žarek*. Naj $\mathcal{R}(G)$ označuje množico vseh žarkov v grafu G . Pravimo, da sta žarka π_1 in π_2 iz $\mathcal{R}(G)$ *ekvivalentna po koncih*, kar označimo z $\pi_1 \sim \pi_2$, če obstaja tak žarek $\pi_3 \in \mathcal{R}(G)$, da sta množici vozlišč $V(\pi_1 \cap \pi_3)$ in $V(\pi_2 \cap \pi_3)$ neskončni. Ni težko videti, da je relacija \sim ekvivalenčna na množici $\mathcal{R}(G)$, pri čemer ekvivalenčne razrede imenujemo *konci* grafa G .

Halin je pokazal [50], da za $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{R}(G)$ velja $\pi_1 \sim \pi_2$ natanko tedaj, ko noben končen podgraf H grafa G ne loči žarkov π_1 in π_2 , tj. da obstajata podžarka obeh žarkov, ki nista vsebovana v različnih komponentah $G \setminus H$. To nas pripelje do ugotovitve, da je število koncev grafa G največje število neskončnih komponent grafa $G \setminus G[S]$ za poljubno končno množico $S \subset V(G)$ [120].

Primer 1. Če graf ne vsebuje nobenega žarka, tudi nima koncev. Če vzamemo kartezični produkt dveh dvojnih žarkov, dobimo kvadratno mrežo v ravnini. Hitro je razvidno, da ima ta mreža natanko en konec. Po drugi strani pa s kartezičnim produktom dvojnega žarka ter cikla dobimo graf z dvema koncema. Če zgradimo graf G tako, da iz izbranega vozlišča izhaja n žarkov, pri čemer ne dodamo nobenih drugih povezav, ima graf G natanko n koncev. Če pa vzamemo neskončno lokalno končno drevo, kjer imajo vsa vozlišča stopnjo vsaj 3, ima le-ta 2^{\aleph_0} koncev. ■

Prvi večji rezultat iz teorije koncev je omejitev števila možnih koncev v *skoraj tranzitivnih grafih*, v katerih ima grupa avtomorfizmov le končno mnogo orbit.

Trditev 3 ([51]). Če je G neskončen lokalno končen in skoraj tranzitiven graf, ima lahko le en, dva ali neskončno (točneje 2^{\aleph_0})¹ koncev.

Naslednji izrek nam pove povezave med številom koncev ter velikostnim redom rasti.

Izrek 4. Naj bo G neskončen lokalno končen in skoraj tranzitiven graf. Potem velja:

1. G ima linearno rast natanko tedaj, ko ima dva konca.
2. Če ima G neskončno koncev, ima eksponentno rast.

Prva točka izreka 4 sledi iz del Gromova [41] ter Seifertja in Trofimova [105], druga točka pa iz dela Halina [50]. Vidimo torej, da ima graf s polinomsko – a ne linearno – rastjo le en konec, čeprav obratno ne drži. Grafi z enim koncem imajo namreč lahko poljubno rast, ki je večja od linearne; glej [120, razdelek 1].

Primer 2. Kvadratna mreža v ravnini ima en konec, zato ima lahko poljubno nelinearno rast, a kakor bo razvidno v nadaljevanju, je le-ta polinomska stopnje 2. Po drugi strani ima neskončno lokalno končno regularno drevo stopnje $d \geq 3$ po izreku 4 eksponentno rast, kar je razvidno tudi iz funkcije rasti $\gamma_G(v, n)$, ki je reda d^n . ■

3.3 Rast v produktih neskončnih grafov

Poglejmo si, kako se izračuna funkcija rasti produktnih grafov, in sicer za vse standardne grafovske produkte ter za prosti produkt, katerega definicija se iz grup prek Cayleyevih grafov naravno prenese na neskončne lokalno končne grafe. S funkcijama rasti brez težav predstavimo tudi končne grafe, saj je v takih primerih le $\delta_G(v, n) = 0$ ter $\gamma_G(v, n) = \gamma_G(v, e(v))$ za $n \geq e(v)$, kjer je $e(v)$ ekscentričnost vozlišča $v \in V(G)$. Zožitve naslednjih izrekov na končne grafe je v primeru standardnih produktov mogoče primerjati z rezultati v naslednjem poglavju, ki so bili dobljeni le za končne grafe, a so bili poznani že dve desetletji prej [127].

Za lažjo predstavitev izračuna funkcije rasti v produktnih grafih uporabimo zapis z *običajno rodovno funkcijo* [121], katere koeficienti so vrednosti sferične oziroma krogelne funkcije rasti. Rodovna funkcija krogelne funkcije rasti je tako enaka

$$\Gamma_G(v; x) := \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_G(v, n) x^n,$$

¹ \aleph_0 označuje moč množice naravnih števil.

rodovna funkcija sferične funkcije rasti pa

$$\Delta_G(v; x) := \sum_{n=0}^{\infty} \delta_G(v, n)x^n.$$

Iz zveze $\delta_G(v, n) = \gamma_G(v, n) - \gamma_G(v, n-1)$ dobimo povezavo med rodovnima funkcijama:

$$\Delta_G(v; x) = (1-x)\Gamma_G(v; x).$$

Poglejmo si formule za izračun rodovnih funkcij rasti v produktnih grafih. V kartezičnem produktu se izkaže, da je rodovna funkcija sferične rasti produkta kar produkt rodovnih funkcij sferičnih rasti obeh faktorjev.

Izrek 5 ([91]). Naj bosta G in H lokalno končna grafa ter $g \in V(G)$ in $h \in V(H)$. Potem za njun kartezični produkt velja

$$\Delta_{G \square H}((g, h); x) = \Delta_G(g; x)\Delta_H(h; x)$$

oziroma $\delta_{G \square H}((g, h), n) = \sum_{i=0}^n \delta_G(g, i)\delta_H(h, n-i)$.

V primeru krepkega produkta najprej omenimo, da se oznaka \boxtimes uporablja tudi za *Hadamardov produkt* dveh potenčnih vrst, pri čemer je koeficient pri potenci x^i v produktu enak produktu koeficientov obeh vrst pri enaki potenci. V krepkem produktu je rodovna funkcija krogelne rasti produkta kar produkt rodovnih funkcij krogelnih rasti obeh faktorjev.

Izrek 6 ([91]). Naj bosta G in H lokalno končna grafa ter $g \in V(G)$ in $h \in V(H)$. Potem za njun krepki produkt velja

$$\Gamma_{G \boxtimes H}((g, h); x) = \Gamma_G(g; x) \boxtimes \Gamma_H(h; x)$$

oziroma $\gamma_{G \boxtimes H}((g, h), n) = \gamma_G(g, i)\gamma_H(h, i)$.

Zaradi nekomutativnosti leksikografskega produkta je njegova rodovna funkcija (sferične) rasti odvisna od vrstnega reda faktorjev. Opazimo tudi, da je za izračun rodovne funkcije pri drugem faktorju pomembno le število sosedov korena.

Izrek 7 ([91]). Naj bo G netrivialen lokalno končen graf, H ne nujno povezan končen graf, $g \in V(G)$ in $h \in V(H)$. Potem za njun leksikografski produkt velja

$$\Delta_{G \circ H}((g, h); x) = 1 + \delta_H(h, 1)x + (|V(H)| - \delta_H(h, 1) - 1)x^2 + |V(H)|(\Delta_G(g; x) - 1).$$

Funkcijo rasti v direktnem produktu pa za razliko od ostalih ne moremo predstaviti s funkcijama rasti posameznih faktorjev. Kot primer si poglejmo cikel C_3 ter pot P_3 . Če za korena izberemo sredinsko vozlišče poti ter poljubno vozlišče cikla, imata oba rodovno funkcijo sferične funkcije rasti enako $1 + 2x$. Direktna produkta $C_3 \times C_3$ ter $C_3 \times P_3$ pa imata rodovni funkciji $1 + 4x + 4x^2$ ter $1 + 4x + 2x^2 + 2x^3$, ki nista enaki. Povezava med rastjo faktorjev in direktnega produkta pa vendarle obstaja v primeru dvodelnih grafov, saj je izrek 33 na strani 47 možno posplošiti tudi na neskončne lokalno končne dvodelne grafe.

Poglejmo si, kdaj imajo omenjeni produkti grafi regularno rast. Na tem mestu se osredotočimo le na neskončne lokalno končne grafe, saj je končnim grafom namenjeno naslednje poglavje.

Izrek 8. *Naj bo vsaj eden od grafov G in H neskončen lokalno končen graf. Potem velja naslednje:*

1. *Produkta $G \square H$ in $G \boxtimes H$ sta grafa z regularno rastjo natanko tedaj, ko sta G in H grafa z regularno rastjo.*
2. *Če je H končen graf, ki ni nujno povezan, je $G \circ H$ graf z regularno rastjo natanko tedaj, ko je G graf z regularno rastjo, H pa regularen graf.*
3. *Če sta G in H dvodelna grafa, sta obe komponenti produkta $G \times H$ grafa z enako regularno rastjo natanko tedaj, ko sta G in H grafa z regularno rastjo.*

Dokaz. Dokaza trditve 1 in 2 v izreku, ko iz lastnosti faktorjev sklepamo na regularno rast v produktu, sta očitna, če upoštevamo formule rodovnih funkcij rasti produktov, ki so razvidne iz izrekov 5, 6 ter 7 in navedene tudi v [91, posledice 3.2, 5.2 in 6.2]. Za dokaza trditve 1 in 2 v obratni smeri si pomagamo s člankom [127], kjer so za navedene produkte podani dokazi v primeru končnih grafov. Vidimo lahko, da dokazi potekajo po principu indukcije, tj. enakost funkcij rasti $\delta_G(g, n)$ oziroma $\gamma_G(g, n)$ za vsa vozlišča dobimo iz že dokazanih enakosti za $i < n$. To pa pomeni, da velja enako tudi za neskončne lokalno končne grafe.

Dokaz trditve 3 je za končne grafe podan v izreku 33. Iz formule, ki povezuje rasti produkta in faktorjev tudi v primeru neskončnih lokalno končnih grafov, sledi, da sta komponenti $G \times H$ grafa z regularno rastjo, če sta G in H grafa z regularno rastjo. Privzemimo torej, da sta komponenti $G \times H$ grafa z enako regularno rastjo. Vzemimo vozlišči (g, h_1) in (g, h_2) iz $V(G \times H)$. Oznaka $d_n(G, g)$ naj predstavlja število vozlišč iz G , ki so na razdalji n od vozlišča

$g \in V(G)$. Zaradi regularnosti produkta ter uporabe formule iz izreka 33 velja

$$\begin{aligned} d_n(G, g)d_n(H, h_1) + d_n(G, g) \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} d_{n-2i}(H, h_1) + d_n(H, h_1) \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} d_{n-2i}(G, g) &= \quad (3.1) \\ &= d_n(G, g)d_n(H, h_2) + d_n(G, g) \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} d_{n-2i}(H, h_2) + d_n(H, h_2) \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} d_{n-2i}(G, g). \end{aligned}$$

Hitro lahko preverimo, da za $n = 1$ dobimo $d_1(H, h_1) = d_1(H, h_2)$. Privzemimo, da to velja za vse $i < n$. Potem iz enačbe (3.1) dobimo

$$\begin{aligned} d_n(H, h_1) \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} d_{n-2i}(G, g) &= d_n(H, h_2) \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} d_{n-2i}(G, g), \\ d_n(H, h_1) &= d_n(H, h_2). \end{aligned}$$

Torej je H graf z regularno funkcijo rasti. Enako dokažemo za G s pregledom rasti glede na vozlišči (g_1, h) in (g_2, h) . \square

Izrek 9 ([91]). Naj bosta G in H lokalno končna grafa. Potem za njun prosti produkt velja

$$1/\Delta_{G \star H}((g, h); x) = 1/\Delta_G(g; x) + 1/\Delta_H(h; x) - 1.$$

Posledica 10. Če sta G in H lokalno končna grafa, je prosti produkt $G \star H$ graf z regularno rastjo natanko tedaj, ko sta G in H grafa z regularno rastjo.

Dokaz. Obrat trditve sledi iz formule v izreku 9. Denimo torej, da je $G \star H$ graf z regularno rastjo. Za vozlišči (g, h_1) in (g, h_2) iz $V(G \star H)$ tedaj velja

$$\begin{aligned} 1/\Delta_{G \star H}((g, h_1); x) &= 1/\Delta_{G \star H}((g, h_2); x), \\ 1/\Delta_G(g; x) + 1/\Delta_H(h_1; x) - 1 &= 1/\Delta_G(g; x) + 1/\Delta_H(h_2; x) - 1, \\ 1/\Delta_H(h_1; x) &= 1/\Delta_H(h_2; x), \\ \Delta_H(h_1; x) &= \Delta_H(h_2; x). \end{aligned}$$

Dve rodovni funkciji pa sta enaki natanko tedaj, ko imata enake koeficiente, zato je H graf z regularno rastjo. Na enak način dokažemo regularnost rasti tudi za graf G . \square

3.4 Algoritem za izračun rasti

V tem razdelku bo predstavljen algoritem, ki omogoča rekurziven izračun rasti v lokalno končnih grafih. Ideja je povzeta po neobjavljenem rokopisu [88] ter članku [6]. Denimo, da imamo

graf G in izberemo vozlišče $r \in V(G)$ za njegov koren. Izračunati želimo rodovno funkcijo (sferične) rasti grafa G glede na koren r . Najprej naredimo razdaljno particijo $P(G, \{v\})$, tako da V_i vsebuje vsa vozlišča G , ki so za i oddaljena od v . Sedaj odstranimo vse povezave, ki ležijo znotraj posamezne množice particije. Preostale povezave tako vedno povezujejo zaporedni množici particije. Naj bo L_G graf, kjer te povezave usmerimo tako, da kažejo stran od korena, tj. povezavo $\{v_i, v_{i+1}\}$, kjer je $v_i \in V_i$ in $v_{i+1} \in V_{i+1}$, nadomestimo $\{v_i, v_{i+1}\}$ z (v_i, v_{i+1}) . Očitno sledi, da je $\Delta_G(v; x) = \Delta_{L_G}(v; x)$. Grafu L_G rečemo *nivojski graf* grafa G .

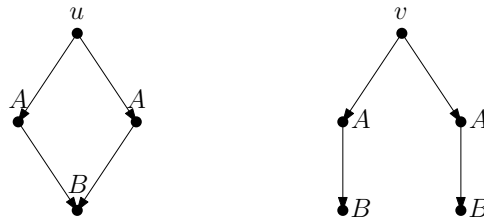
Vsakemu vozlišču $v \in V(L_G)$ lahko določimo njegovo funkcijo rasti upoštevajoč usmerjene razdalje v nivojskem grafu. Oziroma povedano drugače, vozlišču v izračunamo funkcijo rasti glede na induciran podgraf grafa G , ki vsebuje vsa takšna vozlišča u , za katera obstaja najkrajša pot med njimi in korenem r , ki vsebuje vozlišče v . Podgrafu, ki ga generira izbrano vozlišče v , pravimo *stožec* vozlišča v . Če med dvema stožcema obstaja izomorfizem, imata vozlišči, ki ju generirata, enak *tip stožca*. Vozlišča z enakim tipom stožca imajo tudi enako rast glede na pripadajoči stožec.

Omenjene definicije nas motivirajo k rekurzivnem izračunu rasti, saj gre (vsaj ena) najkrajša pot iz vozlišča v v nekem stožcu S do korena skozi vozlišče s , ki stožec S generira. Če ugotovimo rast vozlišča s v L_G , smo izračunali prispevek stožca S k rasti osnovnega grafa G glede na koren r . Potrebno je le še upoštevati razdaljo $d(r, s)$, da pravilno prištejemo rast stožca S k celotni rasti.

Koncept stožca je prvi definirala Cannon [19] in ga uporabil v Cayleyevih grafih, kasneje pa je Epstein s soavtorji definicijo posplošil tudi na grupe [34]. Na primeru grafov so stožce za izračun rasti uporabili v članku [6]. Tam so naleteli na težavo, ki jo izpostavljam tudi tukaj. Posamezni stožci se namreč lahko med seboj prekrivajo in zato k rasti osnovnega grafa večkrat prispevajo isti delež. To je jasno razvidno iz primera 3.1. V prispevku [6] so zato eksplicitno pazili, da niso večkrat upoštevali rasti podvojenih stožcev. Prava rešitev v splošnem izhaja iz [88], kjer rast posameznega stožca vsakič upoštevajo le delno glede na njegovo število pojavitev. Le-te pa lahko ugotovimo s številom sosedov v predhodni particiji.

Izhajajoč iz [88] za vozlišče $v \in V(L_G)$ definirajmo *posplošeni stožec*, ki poleg stožca vsebuje tudi informacijo o številu neposrednih predhodnikov vozlišča v , tj. število vozlišč, ki imajo v za soseda v usmerjenem grafu L_G . Dve vozlišči imata tako enak tip posplošenega stožca, če imata enak tip stožca ter enako število neposrednih predhodnikov. Za izračun rasti si pomagamo z naslednjo trditvijo.

Trditev 11. *Vozlišči v in u iz L_G imata enak tip posplošenega stožca, če imata enako število neposrednih naslednikov z enakim tipom posplošenega stožca ter enako število neposrednih*



Slika 3.1: Če bi ločili vozlišča le glede na tip stožca, ki ga imajo, bi morala oba grafa imeti enako rast, vendar temu ni tako. Rodovna funkcija sferične rasti grafa na levi glede na vozlišče u je namreč enaka $1 + 2x + x^2$, rodovna funkcija sferične rasti grafa na desni glede na vozlišče v pa $1 + 2x + 2x^2$.

predhodnikov.

Dokaz. Dokazati je potrebno, da iz pogoja o enakem številu neposrednih naslednikov, ki imajo isti tip posplošenega stožca, sledi izomorfnost stožcev obeh vozlišč. To pa sledi iz definicije tipa posplošenega stožca, saj za vsako vozlišče natančno definiramo število vhodnih in izhodnih povezav ter njegove sosedne, tj. neposredne naslednike. \square

Rodovno funkcijo rasti vozlišča $\Delta_{L_G}(v; x)$ lahko tako izračunamo kot vsoto rodovnih funkcij rasti njegovih neposrednih naslednikov, ki jo pomnožimo z x , saj so vsi neposredni nasledniki na razdalji 1 od v . Če ima vozlišče $v \in V(L_G)$ število neposrednih predhodnikov enako n , bo vsebovan v n stožcih. Njegova rast bo tako n -krat upoštevana pri izračunu rasti glede na koren grafa G . Zato je potrebno vsakič upoštevati le n -ti del rodovne funkcije rasti $\Delta_{L_G}(v; x)$, kar je povzeto v naslednji trditvi.

Izrek 12. Naj bo $r \in V(G)$ koren grafa G , vozlišče v nivojskega grafa L_G naj ima tip posplošenega stožca enak A , ki je karakteriziran z $\alpha(A)$ predhodniki ter $\beta(A, A_i)$ nasledniki tipa A_i za $1 \leq i \leq n$. Če z $\Delta_{L_G}(A; x)$ označimo rodovno funkcijo rasti, ki jo imajo vozlišča s tipom posplošenega stožca A , potem je enačba, ki jo prispeva vozlišče s tipom A k sistemu linearnih enačb za izračun rodovne funkcije rasti $\Delta_G(r; x)$, enaka

$$\alpha(A)\Delta_{L_G}(A; x) = 1 + x \sum_{i=1}^n \beta(A, A_i)\Delta_{L_G}(A_i; x). \quad (3.2)$$

Če poznamo vse tipe posplošenih stožcev, lahko rast izračunamo na podlagi izreka 12 z reševanjem sistema linearnih enačb. Načeloma ima tudi koren r svoj tip stožca, ki je kar enak celotnemu grafu, zato lahko tudi zanj napišemo enačbo (3.2), kjer je $\alpha(r)$ vedno enak 1. Če je graf G končen, je tudi število tipov končno in lahko rast dobimo iz sistema enačb (3.2). Če

pa je graf lokalno končen, je potrebno ugotoviti, ali obstaja končno različnih tipov posplošenih stožcev, da lahko uporabimo omenjeni postopek.

Poglejmo si podrobneje sam postopek reševanja. Sistem, ki ga dobimo za vozlišča s tipi posplošenih stožcev $\Delta, A_1, A_2, \dots, A_n$, zapišimo v matrični obliki:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha(A_1) & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha(A_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \\ A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} 0 & \beta(r, A_1) & \cdots & \beta(r, A_n) \\ 0 & \beta(A_1, A_1) & \cdots & \beta(A_1, A_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \beta(A_n, A_1) & \cdots & \beta(A_n, A_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \\ A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}.$$

Zgornji sistem pretvorimo v

$$\begin{bmatrix} 1 & -\beta(r, A_1)x & \cdots & -\beta(r, A_n)x \\ 0 & \alpha(A_1) - \beta(A_1, A_1)x & \cdots & -\beta(A_1, A_n)x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -\beta(A_n, A_1)x & \cdots & \alpha(A_n) - \beta(A_n, A_n)x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \\ A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

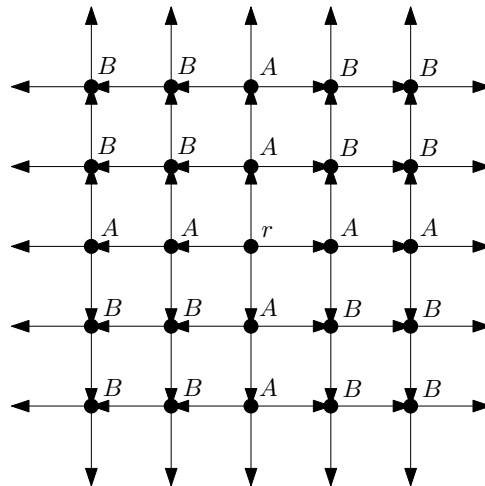
in ga rešimo s pomočjo *Gaussove eliminacijske metode* [26] v času $\mathcal{O}(n^3)$, da dobimo iskano rast Δ . Računanje poteka v obsegu racionalnih funkcij, sama metoda pa nam zagotavlja, da je tudi rešitev takšne oblike.

Primer 3. Poglejmo si rast v kvadratni mreži K , kot jo vidimo na sliki 3.2. Zaradi simetrij imamo poleg korena le dve vrsti vozlišč glede na različne tipe posplošenih stožcev, zato je sistem enačb za izračun rasti naslednji:

$$\begin{aligned} \Delta_K(r; x) &= 1 + 4\Delta_{L_K}(A; x)x, \\ \Delta_{L_K}(A; x) &= 1 + \Delta_{L_K}(A; x)x + 2\Delta_{L_K}(B; x)x, \\ 2\Delta_{L_K}(B; x) &= 1 + 2\Delta_{L_K}(B; x)x. \end{aligned}$$

Ko ga rešimo, dobimo $\Delta_K(r; x) = (1+x)^2/(1-x)^2$ oziroma s pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto $\Delta_K(r; x) = 1 + 4x + 8x^2 + 12x^3 + \dots$. Torej je sferična funkcija rasti $\delta_K(r, n) = 4n$, krogelna funkcija pa $\gamma_K(r, n) = 2n(n+1)$. Kvadratna mreža ima tako polinomsko rast stopnje 2. Omenimo še, da je omenjena mreža graf z regularno rastjo, saj je vozliščno tranzitivna.

Rast v kvadratni mreži bi lahko izračunali tudi s pomočjo produktnih grafov. Enaka je namreč kartezičnemu produktu dvojnih žarkov, ki ju dobimo kot prosti produkt dveh grafov



Slika 3.2: Tipi posplošenih stožcev v kvadratni mreži v ravnini glede na koren r .

K_2 . Velja torej

$$\Delta_K(v; x) = \Delta_{K_2 \star K_2}(v; x) \Delta_{K_2 \star K_2}(v; x) = \left(\frac{\Delta_{K_2}(v; x)}{2 - \Delta_{K_2}(v; x)} \right)^2 = \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^2. \quad \blacksquare$$

3.5 Rast v polpravilnih tlakovanjih ravnine

Uporabo rezultatov, dobljenih v prejšnjem razdelku, bomo prikazali na primerih tlakovanj. Za podrobno razlago o lastnostih različnih vrst tlakovanj bralca napotimo h knjigi Branka Grünbauma [43].

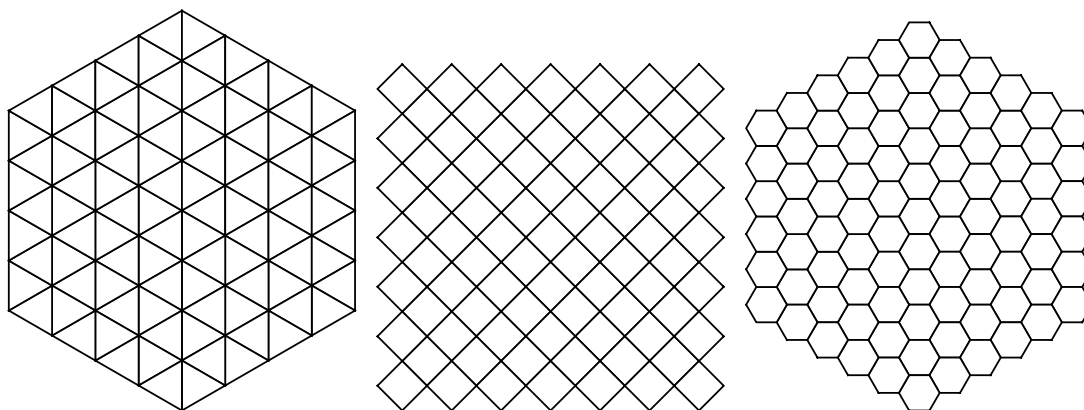
Tlakovanje ravnine je števna družina zaprtih množic – *tlakovcev*, ki predstavljajo pokritje ravnine in imajo paroma disjunktno notranjost. V našem primeru si bomo pogledali le tlakovanja v Evklidski ravnini, čeprav jih je mogoče izvajati tudi v sferični ali hiperbolični geometriji ter posplošiti na višje dimenzije.

Tlakovanje je *rob-na-rob*, če imajo sosednji tlakovci skupne cele robove – kar bomo prav tako privzeli. Tlakovci so pogosto večkotniki. V primeru, da so pravilni večkotniki, pravimo takšnemu tlakovanju tudi *teselacija*. Če želimo tlakovati Evklidsko ravnino le z enim pravilnim večkotnikom, se takšnemu tlakovanju reče *pravilno* oziroma *regularno*. Obstajajo tri pravilna tlakovanja, in sicer z enakostraničnimi trikotniki, kvadrati ter pravilnimi šestkotniki.

Tlakovanje lahko predstavimo z grafom, kjer robovi tlakovcev predstavljajo povezave, oglišča pa vozlišča grafa. Podvojenih povezav in vozlišč pri tem ne upoštevamo. S tem dobimo neskončen lokalno končen ravninski graf z enim koncem. Vozlišče tlakovanja ima *konfiguracijo* $p_1.p_2.\dots.p_n$, če so okoli vozlišča v cikličnem redu razporejeni p_1 -kotnik, p_2 -kotnik, ...,

p_n -kotnik. Če imajo vsa vozlišča tlakovanja enako konfiguracijo in tlakujemo s pravilnimi večkotniki, se tlakovanju reče *Arhimedsko*. Če je Arhimedsko tlakovanje *izogonalno* (tj. vozliščno tranzitivno), pravimo, da je *polpravilno* oziroma *semiregularno*. Takšnih tlakovanj je osem, kar je prvi odkril že Johannes Kepler leta 1617 (op. odkril je tudi vsa pravilna tlakovanja), kasneje pa je bilo to ponovno dokazano v začetku 20. stoletja; glej [43] za zgodovinski pregled.

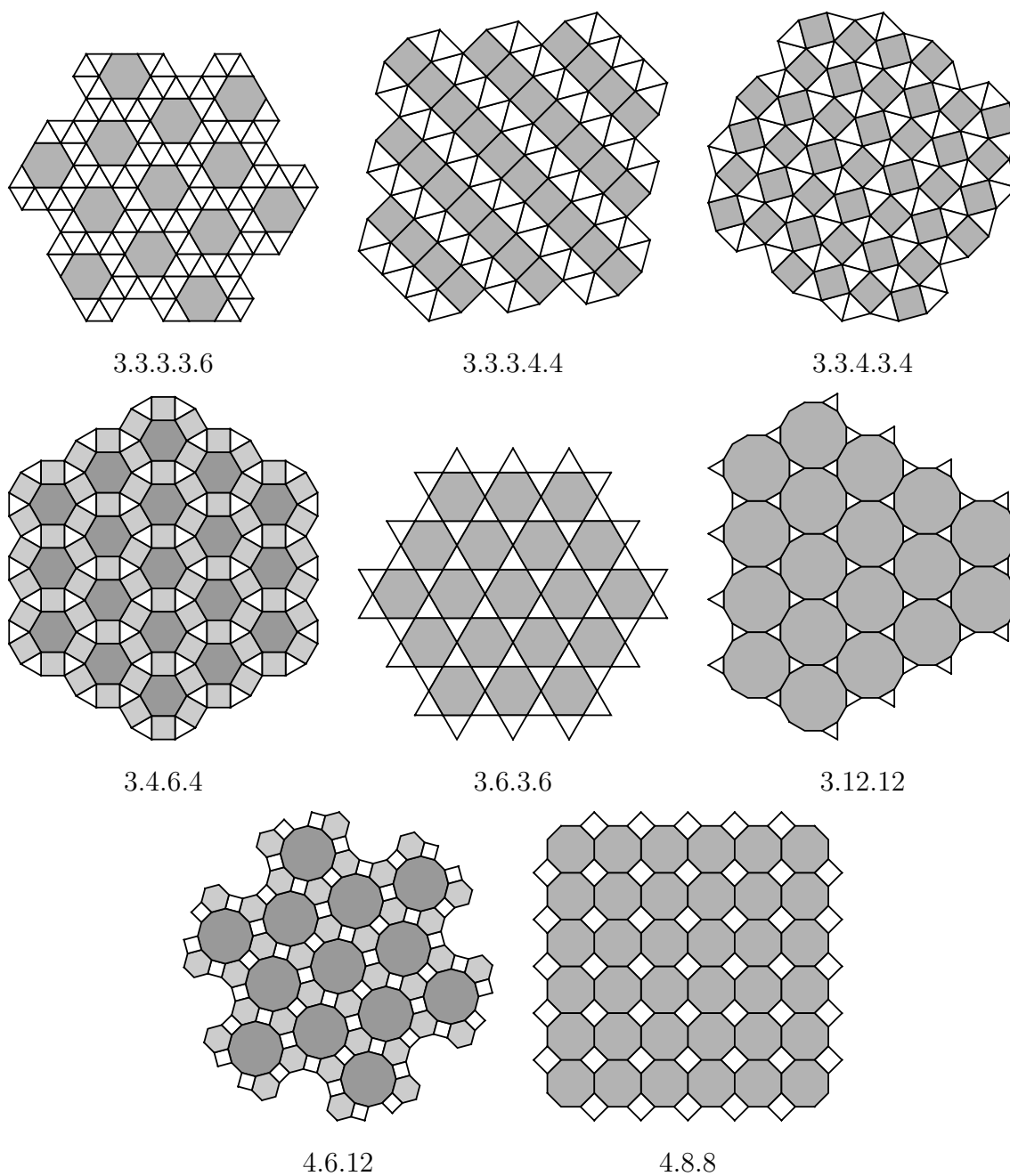
Najprej si pogledjmo omenjena tri pravilna tlakovanja, ki jih vidimo na sliki 3.3. Zanje so funkcije rasti že izračunane [94] in jih lahko dobimo tudi po postopku, omenjenem v prejšnjem razdelku, kot smo za tlakovanje s kvadrati že storili v primeru 3. Naj T_i označuje pravilno tlakovanje s pravilnimi i -kotniki. Potem je $\delta_{T_3}(v, n) = 6n$, $\delta_{T_4}(v, n) = 4n$ ter $\delta_{T_6}(v, n) = 3n$ za $n \geq 1$ ter poljubno vozlišče v , saj so grafi vozliščno tranzitivni.



Slika 3.3: Vsa možna pravilna tlakovanja Evklidske ravnine: (levo) z enakostraničnimi trikotniki, (v sredini) s kvadrati, (desno) s pravilnimi šestkotniki.

Sedaj se osredotočimo na polpravilna tlakovanja Evklidske ravnine, ki jih je natanko osem, kot je odkril že Kepler. Označili jih bomo kar glede na konfiguracijo vozlišč, ki jih vsebujejo, kjer po dogovoru konfiguracijo zapišemo tako, da začnemo z najmanjšim možnim številom oziroma zaporedjem najmanjših možnih števil; npr. 3.4.3.4.3 zapišemo kot 3.3.4.3.4. Na sliki 3.4 so vidna vsa polpravilna tlakovanja skupaj z njihovimi oznakami.

Preden poiščemo funkcije rasti polpravilnih tlakovanj, omenimo motivacijo, ki nas je pripeljala do te družine grafov. Kot prvo so ti grafi vozliščno tranzitivni, kar pomeni, da vsebujejo veliko simetrije; med drugim je rast neodvisna od izbire vozlišča. Dalje smo ugotovili, da je formalno izračunana rast le za nekatera tlakovanja: 3.6.3.6 v [25, 106], 3.12.12 v [106] ter 3.3.3.4.4 in 4.8.8 v [110]. V [95] so sicer napisane funkcije rasti za vsa polpravilna tlakovanja, vendar so brez dokazov in vsebujejo napake. Zaradi omenjenih razlogov je bila za predstavitev uporabe algoritma iz prejšnjega razdelka izbrana ravno ta družina grafov.



Slika 3.4: Vsa možna polpravilna tlakovanja Evklidske ravnine.

Glavna naloga pri uporabi algoritma za določitev tipov posplošenih stožcev za vozlišča v polpravilnih tlakovanjih je bila ugotoviti, da je njihovo število končno. Denimo, da je $P(G, \{r\})$ razdaljna particija tlakovanja G . Če imajo vsa vozlišča v množici V_n particije že znane tipe posplošenih stožcev (definirane v množicah $\cup_{i < n} V_i$), to pomeni, da so s tem določeni tudi tipi za vozlišča v množici V_{n+1} in posledično v vseh nadaljnjih množicah. Pri iskanju tipov pa smo si pomagali s simetrijami v tlakovanjih.

Določitev tipov ter sistema enačb, ki ga porodijo, se nahaja v dodatku k disertaciji. Na tem mestu navajamo le rezultate, ki smo jih dobili pri reševanju sistemov enačb. Reševanje je potekalo s programskim paketom Mathematica in je kot rezultat vrnilo rodovne funkcije, ki vsebujejo koeficiente sferičnih funkcij rasti in so razvidne iz tabele 3.1. Opazimo, da so vse dobljene funkcije racionalne, kot je bilo prikazano ob predstavitvi algoritma.

Za izračun (sferične) funkcije rasti uporabimo Taylorjevo vrsto, tako da enačimo racionalno funkcijo iz tabele 3.1 z njeno Taylorjevo vrsto ter primerjamo koeficiente pri enakih potencah. S tem dobimo linearno homogeno rekurzivno enačbo s konstantnimi koeficienti ter njene začetne pogoje. Splošna rešitev enačbe predstavlja ravno funkcijo rasti, ki smo jo dobili z uporabo programskega paketa Mathematica.

Omenjeni postopek si pogledjmo na primeru tlakovanja 3.3.3.4.4. Izenačimo rodovno funkcijo z njeno Taylorjevo vrsto v okolici točke 0:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 3x + 1}{(x - 1)^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \\ x^2 + 3x + 1 &= (x^2 - 2x + 1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \\ x^2 + 3x + 1 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \\ x^2 + 3x + 1 &= \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \end{aligned}$$

S primerjavo koeficientov pri enakih potencah dobimo najprej robne pogoje

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_1 - 2a_0 &= 3 \Rightarrow a_1 = 5, \\ a_2 - 2a_1 + a_0 &= 1 \Rightarrow a_2 = 10, \end{aligned}$$

nato pa še splošno rekurzivno enačbo $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, katere rešitev je $a_n = 5n$.

V nekaterih primerih je rekurzivno enačbo lažje rešiti brez iskanja splošnega člana. Za tlakovanje 3.3.3.3.6 dobimo na primer enačbo $a_n = a_{n-1} + a_{n-5} - a_{n-6}$ z začetnimi pogoji

konfiguracija	rodovna funkcija rasti
3.3.3.3.3.3	$\frac{x^2 + 4x + 1}{(x - 1)^2}$
4.4.4.4	$\frac{(x + 1)^2}{(x - 1)^2}$
6.6.6	$\frac{x^2 + x + 1}{(x - 1)^2}$
3.3.3.3.6	$\frac{(x^2 + x + 1)(x^4 + 3x^3 + 3x + 1)}{(x - 1)^2(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)}$
3.3.3.4.4	$\frac{x^2 + 3x + 1}{(x - 1)^2}$
3.3.4.3.4	$\frac{(x + 1)^4}{(x - 1)^2(x^2 + x + 1)}$
3.4.6.4	$\frac{(x + 1)^2}{(x - 1)^2}$
3.6.3.6	$\frac{(2x + 1)(-x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1)}{(x - 1)^2(x + 1)^2}$
3.12.12	$\frac{-2x^8 + 4x^7 - 3x^6 + 5x^5 - x^4 + 3x^3 + x^2 + x + 1}{(x - 1)^2(x^2 + 1)^2}$
4.6.12	$\frac{(x + 1)^2(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)}$
4.8.8	$\frac{(x + 1)^2(x^2 + 1)}{(x - 1)^2(x^2 + x + 1)}$

Tabela 3.1: Rodovne funkcije za sferično rast v pravih in polpravih tlakovanjih.

$a_1 = 5, a_2 = 9, a_3 = 15, a_4 = 19, a_5 = 24$ ter $a_6 = 29$. S predelavo enačbe opazimo, da je $a_n - a_{n-1}$ enako $a_{n-5} - a_{n-6}$, kar pomeni, da je razlika med a_n in a_{n-5} vedno enaka $a_6 - a_1 = 24$. Zato velja $c_{5k+1} = 24k + 5, c_{5k+2} = 24k + 9$ itd.

Za poljubno vozlišče r dobimo iz rodovnih funkcij polpravih tlakovanj naslednje funkcije

rasti, kjer je $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } \delta_{3.3.3.3.6}(r, 0) = 1, & \delta_{3.3.3.3.6}(r, 5n + i) = 24n + \begin{cases} 5, & i = 1, \\ 9, & i = 2, \\ 15, & i = 3, \\ 19, & i = 4, \\ 24, & i = 5, \end{cases} \\
 \text{b) } \delta_{3.3.3.4.4}(r, 0) = 1, & \delta_{3.3.3.4.4}(r, n) = 5n \quad (n \neq 0), \\
 \text{c) } \delta_{3.3.4.3.4}(r, 0) = 1, & \delta_{3.3.4.3.4}(r, 3n + i) = 16n + \begin{cases} 5, & i = 1, \\ 11, & i = 2, \\ 16, & i = 3, \end{cases} \\
 \text{d) } \delta_{3.4.6.4}(r, 0) = 1, & \delta_{3.4.6.4}(r, n) = 4n \quad (n \neq 0), \\
 \text{e) } \delta_{3.6.3.6}(r, 0) = 1, & \delta_{3.6.3.6}(r, 2n + 1) = 8n + 6 \quad (n \neq 0), \\
 & \delta_{3.6.3.6}(r, 1) = 4, & \delta_{3.6.3.6}(r, 2n + 2) = 10n + 8, \\
 \text{f) } \delta_{3.12.12}(r, 0) = 1, & \delta_{3.12.12}(r, 4n + 1) = 9n + 3, \\
 & \delta_{3.12.12}(r, 2) = 4, & \delta_{3.12.12}(r, 4n + 2) = 8n + 6 \quad (n \neq 0), \\
 & & \delta_{3.12.12}(r, 4n + 3) = 9n + 6, \\
 & & \delta_{3.12.12}(r, 4n + 4) = 10n + 8, \\
 \text{g) } \delta_{4.6.12}(r, 0) = 1, & \delta_{4.6.12}(r, 5n + i) = 12n + \begin{cases} 3, & i = 1, \\ 5, & i = 2, \\ 7, & i = 3, \\ 9, & i = 4, \\ 12, & i = 5, \end{cases} \\
 \text{h) } \delta_{4.8.8}(r, 0) = 1, & \delta_{4.8.8}(r, 3n + i) = 8n + \begin{cases} 3, & i = 1, \\ 5, & i = 2, \\ 8, & i = 3. \end{cases}
 \end{array}$$

Iz funkcij rasti polpravih tlakovanj lahko potegnemo nekaj ugotovitev. In sicer, da ima tlakovanje 3.4.6.4 enako rast kot pravilno tlakovanje ravnine s kvadrati ($4n$). Med rastjo slednjega ter rastjo pravilnega tlakovanja ravnine z enakostraničnimi trikotniki ($6n$) se nahaja rast tlakovanja 3.3.3.4.4. Vozlišča na sodi razdalji od korena v tlakovanju 3.12.12 generirajo enako rast kot tlakovanje 3.6.3.6. Tlakovanje 3.3.3.3.6 ima približno dvakrat večjo rast kot tlakovanje 4.6.12. Podobno ima tlakovanje 3.3.4.3.4 približno dvakratno rast tlakovanja 4.8.8. Opazimo

tudi, da je (krogelna) rast vseh tlakovanj polinomska stopnje 2.

Omenimo še, da so grafi, ki predstavljajo pravilna tlakovanja ter polpravilno tlakovanje 3.6.3.6, tudi povezavno tranzitivni. Izračun rasti za tlakovanja s to lastnostjo najdemo v [39].

Poglavje 4

Rast v končnih grafih

V drugem delu disertacije si podrobneje oglejmo rast v končnih grafih ter z njo povezane razdaljne koncepte, predvsem razdaljno uravnoteženost ter razdaljni ostanek grafa. Lastnosti rasti v končnih grafih so v začetku 80-ih let prejšnjega stoletja prvi podrobneje preučevali Bloom, Kennedy in Quintas [9, 10]. Samo uporabo funkcije rasti, čeprav brez omembe imena, zasledimo že v delu Sabidussija iz leta 1966 [104], delno pa tudi v delu Hararyja [53] iz leta 1959, kjer jo avtor poimenuje *statusni vektor*. Koncept preštevanja sosedov na določeni razdalji od izbranega vozlišča se uporablja tudi v matematični kemiji, kjer je poznan pod imenom *atomarna koda* [97] ter tudi kot *koordinacijsko zaporedje* [14]. Več o tem si lahko bralec prebere v razdelku o uporabi rasti v kemiji.

Zanimivo je, da se je teorija rasti v končnih grafih razvijala neodvisno od sorodne teorije v neskončnih grafih, kar je delno razumljivo, saj v končnih grafih ne analiziramo asimptotičnih redov rasti, temveč povezave med velikostmi množic v razdaljni particiji ter simetrije, ki izhajajo iz enakosti funkcije rasti v vseh vozliščih grafa. Posledično je precej bolj uporabna sferična kot krogelna funkcija rasti.

4.1 Zaporedje razdaljnih stopenj

Pojem zaporedja razdaljnih stopenj so leta 1980 uvedli Bloom, Kennedy in Quintas [10]. Enako kot v prejšnjem poglavju je tudi tu pod oznako graf mišljen neusmerjen neoznačen enostaven graf. Ker je zaporedje razdaljnih stopenj dobro definirano le za povezane grafe, bomo za grafe v nadaljevanju privzeli tudi lastnost **povezanosti**, razen ko bo omenjeno drugače.

Definicija. Naj $d_i(G, v)$ označuje število vozlišč v grafu G , ki so na razdalji i od vozlišča

$v \in V(G)$. Potem zaporedje $DDS(G, v) := (d_0(G, v), d_1(G, v), \dots, d_i(G, v), \dots)$ imenujemo *zaporedje razdaljnih stopenj*¹ vozlišča v v grafu G , n -terki iz razdaljnih stopenj vseh vozlišč, urejenih v leksikografskem vrstnem redu, pa pravimo *zaporedje razdaljnih stopenj grafa* G in ga označimo z $DDS(G)$.

Kot je razvidno, je v grafu G element zaporedja razdaljnih stopenj $d_i(G, v)$ ravno enak $\delta_G(v, i)$, tj. sferični funkciji rasti $\delta_G(v, n)$ pri vrednosti parametra $n = i$. Če je $P(G, \{v\})$ razdaljna particija grafa G , velja tudi $d_i(G, v) = |V_i|$.

Bloom in soavtorji [10] so prvi preučevali grafe z enakimi zaporedji razdaljnih stopenj za vsa vozlišča in jim nadedli ime DDR-grafi.

Definicija. Če so v grafu G zaporedja razdaljnih stopenj vseh vozlišč enaka, ga imenujemo graf z *regularnim zaporedjem razdaljnih stopenj* oziroma *DDR-graf*.² Razdaljne stopnje DDR-grafa označimo z d_0, d_1, \dots

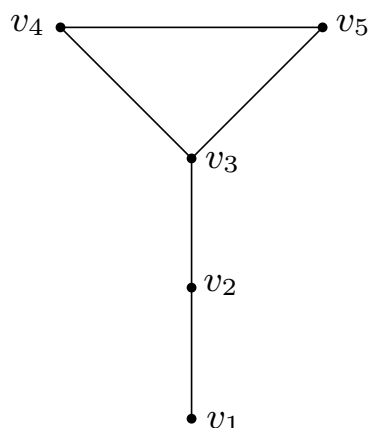
Opazimo, da velja $d_0(G, v) = 1$ ter $d_1(G, v) = \deg(v)$ za vsako vozlišče $v \in V(G)$, zato lahko na razdaljno stopnjo gledamo kot na posplošitev stopnje vozlišča. Očitno je, da ima zaporedje razdaljnih stopenj vozlišča v ravno $e(v)$ neničelnih členov, kjer je $e(v)$ ekscentričnost vozlišča, nato pa se nadaljuje s samimi ničlami. Zaradi tega se ponavadi pri pisavi razdaljnih stopenj ničle izpustijo, več enakih razdaljnih stopenj pa se označi s potenco, kar je razvidno s slike 4.1. V nekaterih primerih avtorji izpuščajo tudi prvi člen zaporedja, pri DDR-grafih pa potenco.

Zaporedje razdaljnih stopenj nosi v sebi precej informacij o samem grafu, zato je naravno vprašanje, ali z njim lahko ločimo med grafi. Jasno je, da je zaporedje razdaljnih stopenj invarianta grafa, tj. enako pri izomorfni grafih, vendar je pomembnejše, ali imajo lahko tudi neizomorfni grafi enaka zaporedja. Izkaže se, da to drži že za grafe nizkega reda, kar je razvidno s slike 4.2. V članku [49] je prikazan primer dveh neizomorfni grafov $K_{3,3}$ ter $GP(3, 1)$, ki imata poleg enakosti zaporedij razdaljnih stopenj grafa celo enaka zaporedja za vsa vozlišča, tj. $(1, 3, 2)$. Poleg tega je graf $GP(3, 1)$ ravninski, $K_{3,3}$ pa ne, zato ni možno s pomočjo zaporedja razdaljnih stopenj razpoznavati (ne)ravninskosti grafov.

Denimo, da imajo vsa vozlišča grafa ekscentričnost enako premeru. Potem zaporedje razdaljnih stopenj grafa nosi v sebi $n \cdot \text{diam}(G)$ informacij, kjer je n red grafa. Ker $(n^2 - n)/2$ vrednosti matrike sosednosti natančno definira graf, bi lahko sklepali, da velja podobno, kadar

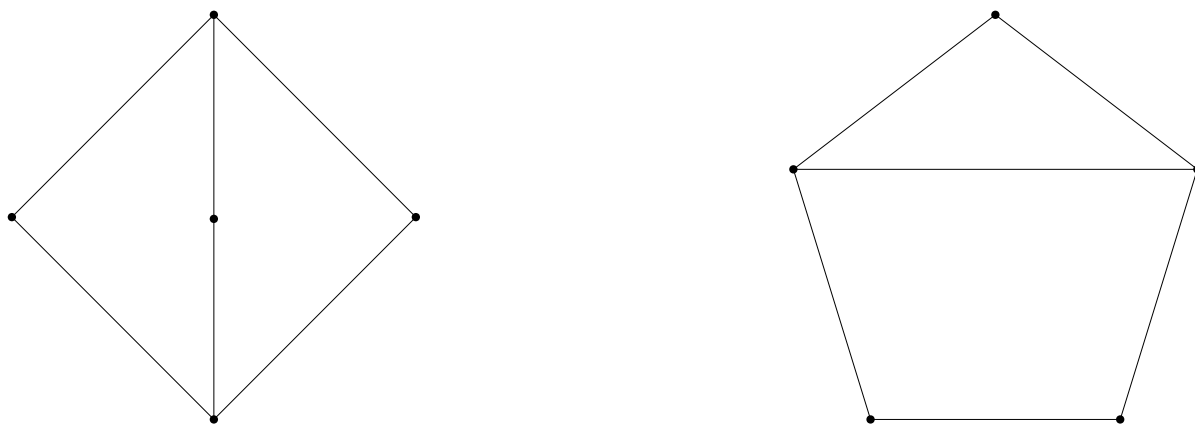
¹angl. distance degree sequence (DDS)

²angl. distance degree regular (DDR) graph



Slika 4.1: Za graf G velja $DDS(G, v_1) = (1, 1, 1, 2)$, $DDS(G, v_2) = (1, 2, 2)$, $DDS(G, v_3) = (1, 3, 1)$, $DDS(G, v_4) = (1, 2, 1, 1)$ ter $DDS(G, v_5) = (1, 2, 1, 1)$. Torej je zaporedje razdaljnih stopenj grafa G enako $DDS(G) = ((1, 1, 1, 2), (1, 2, 1, 1)^2, (1, 2, 2), (1, 3, 1))$.

je $n \cdot \text{diam}(G) \geq (n^2 - n)/2$ oziroma $\text{diam}(G) \geq (n - 1)/2$. Protiprimer za takšno sklepanje je ponovno slika 4.2, ki prikazuje dva neizomorfna grafa reda 5 s premerom 2, ki imata enaki zaporedji razdaljnih stopenj.



Slika 4.2: Grafa reda 5 na sliki imata enako zaporedje razdaljnih stopenj $((1, 2, 2)^3, (1, 3, 1)^2)$, čeprav nista izomorfna.

Pri preučevanju acikličnih kemijskih struktur, ki jih v teoriji grafov predstavimo z drevesi, je M. Randić leta 1979 postavil naslednjo domnevo.

Domneva 1 ([97]). Dve drevesi sta izomorfni natanko tedaj, ko imata enaki zaporedji razdaljnih stopenj.

Slater je tri leta kasneje našel protiprimer dveh dreves na 18 vozliščih, ki imata omenjeni zaporedji enaki [109], ter prikazal postopek, ki generira neskončno družino takšnih parov dreves. V članku je tudi omenjeno, da ni znano ali je 18 najnižji možen red, ki porodi protiprimer.

Zato smo s pomočjo zbirke [80] pregledali vsa drevesa do reda 18 in ugotovili, da je Slater našel najmanjši protiprimer. Še več, v drevesih reda 18 obstajata dva para neizomorfnih grafov z enakima zaporedjema razdaljnih stopenj. Enega od njiju je moč videti na sliki 4.3.



Slika 4.3: Par neizomorfnih dreves reda 18 z enakim zaporedjem razdaljnih stopenj $((1, 1, 1, 4, 7, 4)^4, (1, 1, 2, 4, 6, 4)^4, (1, 1, 4, 8, 4)^2, (1, 2, 4, 7, 4)^4, (1, 3, 4, 6, 4)^2, (1, 5, 8, 4)^2$.

Na drugi strani pa nas zanima, ali lahko izbrano zaporedje predstavlja razdaljne stopnje nekega grafa. Kot je znano [48], je mogoče iz podanega zaporedja dokaj enostavno ugotoviti, ali je *grafovsko*, tj. ali obstaja (ne nujno povezan) graf z vozlišči, ki imajo stopnje, enake elementom zaporedja. Kot je razvidno iz trditve 13, je postopek za ugotavljanje, ali je zaporedje grafovsko, polinomski, saj se z vsakim korakom zaporedja, ki ga pregledujemo, zmanjša za ena, v samem koraku pa je najbolj zahtevna operacija urejanje členov.

Trditev 13 ([48]). *Zaporedje $n \geq 3$ naravnih števil $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ je grafovsko natanko tedaj, ko je grafovsko nepadajoče urejeno zaporedje $(a_2, \dots, a_{n-a_1}, a_{n-a_1+1} - 1, a_{n-a_1+2} - 1, \dots, a_n - 1)$.*

Vendar takoj ko posplošimo stopnje na zaporedje razdaljnih stopenj, postane problem realizacije \mathcal{NP} -poln, kar je razvidno iz naslednjega izreka.

Izrek 14 ([2]). *Problem obstoja drevesa z danim zaporedjem razdaljnih stopenj je \mathcal{NP} -poln.*

Dokaz izreka 14 poteka s pomočjo prevedbe iz znanega \mathcal{NP} -polnega problema particije [38], tako da obstaja realizacija drevesa z določenimi zaporedji razdaljnih stopenj vozlišč natanko tedaj, ko obstaja rešitev problema particije. Naravno vprašanje je, kdaj problem postane \mathcal{NP} -poln. Oziroma, ali je možno v polinomskem času realizirati graf pri podanih delnih zaporedjih razdaljnih stopenj. Negativen odgovor, tudi če predpišemo le število vozlišč na razdaljah ena in dve od vsakega vozlišča, nam da naslednji izrek.

Izrek 15 ([2]). *Problem obstoja drevesa T z danima razdaljnima stopnjama $d_1(T, v)$ in $d_2(T, v)$ za vsako vozlišče $v \in V(T)$ je \mathcal{NP} -poln.*

Čeprav je računsko zahtevno ugotoviti realizacijo drevesa z danim zaporedjem razdaljnih stopenj, pa obstaja nekaj potrebnih pogojev. Enega je zapisal, čeprav brez dokaza, že M. Randić [97].

Trditev 16. V poljubnem drevesu T velja

$$\sum_{v \in V(T)} d_i(T, v) (d_1(T, v) - 1) = \sum_{v \in V(T)} d_{i+1}(T, v)$$

za vsak i , kjer je $1 \leq i < \text{diam}(T)$.

Dokaz. Ker je T drevo, med poljubnima vozliščema obstaja natanko ena pot. Izberimo si vozlišče $v \in V(T)$. Da bi dobili $d_{i+1}(T, v)$, vzemimo vozlišče u na razdalji i od v . Vozlišč na razdalji $i+1$ od v , do katerih pridemo po poti skozi u , je $d_1(T, u) - 1$. Če to seštejemo po vseh vozliščih na razdalji i v particiji $P(T, \{v\})$, dobimo enakost $\sum_{u \in V_i} (d_1(T, u) - 1) = d_{i+1}(T, v)$. Sedaj seštejmo obe strani enakosti po vseh vozliščih drevesa. To nam da enakost

$$\sum_{v \in V(T)} \sum_{u \in V_i} (d_1(T, u) - 1) = \sum_{v \in V(T)} d_{i+1}(T, v).$$

Če na levi strani enakosti fiksiramo vozlišče u , ugotovimo, da se izraz $d_1(T, u) - 1$ v vsoti pojavi ravno $d_i(T, u)$ -krat, saj je ravno toliko vozlišč drevesa T , od katerih je u oddaljen za i . Če to storimo za vsa vozlišča, dobimo enakost

$$\sum_{v \in V(T)} \sum_{u \in V_i} (d_1(T, u) - 1) = \sum_{u \in V(T)} d_i(T, u) (d_1(T, u) - 1),$$

kar pa z zamenjavo oznake vozlišča potrdi veljavnost enakosti v trditvi.

Če uporabimo lastnost dreves, da so na razdalji, ki je enaka premeru, le listi, sledi veljavnost trditve tudi za $i \geq \text{diam}(G)$, ko je izpolnjena na prazno ($0 = 0$). \square

Velja omeniti, da trditev 16 ne drži za poljubne grafe, saj iz vozlišč na razdalji i ne moremo sklepati na število vozlišč na razdalji $i+1$, kot smo storili v dokazu trditve. Enostaven protiprimer je graf C_6 , za katerega ne velja enakost iz trditve 16 pri $i = 2$.

Več povezav med razdaljnimi stopnjami velja za DDR-grafe in so predstavljene v naslednjem razdelku.

4.2 DDR-grafi

Grafi z regularnim zaporedjem razdaljnih stopenj oziroma DDR-grafi kažejo sicer veliko stopnjo regularnosti, način, kako je le-ta povezana z njihovimi lastnostmi, pa ni vedno jasen oziroma enostaven. Kot prvo, mednje spadajo tako grafi z maksimalno simetrijo, tj. polni grafi,

cikli, vozliščno tranzitivni grafi, hkrati pa tudi grafi s trivialno grupo avtomorfizmov [10, razdelek 4].

Med DDR-grafe, ki vsebujejo vozlišče s stopnjo manj ali enako dva, spadajo le K_1 , K_2 ter cikli. Med grafi z vozlišči višjih stopenj pa je DDR-grafov v izobilju. To nam kažejo trditve, ki sledijo, ter izreki o ohranjanju regularnosti zaporedja razdaljnih stopenj v produktnih grafih. Bralca tudi spomnimo, da obravnavamo le povezane grafe.

Trditev 17 ([10]). Vsak regularen graf premera manj ali enako 2 je DDR-graf ter vsak komplement regularnega grafa premera ≥ 3 je DDR-graf.

Trditev 18 ([10]). Za vsaki naravni števili p in r , razen za $r = 1$ in $p > r$, obstaja DDR-graf s premerom p in stopnjo r .

Trditev 19. Za vsak nepoln r -regularen graf G reda n , ki ni nujno povezan, obstaja DDR-graf H premera p , tako da je G induciran podgraf grafa H .

Dokaz. Če želimo, da ima H premer dva, ga konstruiramo kot spoj grafa G ter množice $n - r$ izoliranih vozlišč [127]. Graf H je tako n -regularen s premerom dva in zato po trditvi 17 DDR-graf. Za konstrukcijo grafov večjih premerov vzamemo kartezične produkte omenjenega grafa s k grafi K_2 . Po posledici 29 dobimo kot rezultat DDR-graf premera $k + 2$. \square

Ker so očitno vsi DDR-grafi regularni, ne obstaja pa učinkovit način njihove karakterizacije, je naravno vprašanje, kolikšen odstotek regularnih grafov spada med DDR-grafe. Oziroma bolj precizno – kar je bilo zastavljeno kot *problem I* v [10] – kolikšen odstotek r -regularnih grafov predstavljajo DDR-grafi?

S pregledom zbirke regularnih grafov [83] ter z uporabo programa za generiranje regularnih grafov [82] smo izračunali število DDR-grafov v grafih reda od 2 do 14, kar je razvidno iz tabele 4.1. Izkaže se, da precejšen odstotek regularnih grafov spada med DDR-grafe, vendar so med njimi skoraj vsi premera kvečjemu 2.

Ker se vprašanje nanaša na grafe določene stopnje, smo na podlagi zbirke kubičnih grafov [103] ugotovili, da je delež kubičnih DDR-grafov zanemarljivo majhen; glej tabelo 4.2. Pri tem se pojavi naslednje vprašanje.

Vprašanje: Kakšni sta limiti $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{DDR(n)}{regularni(n)}$ ter $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{kubični\ DDR(n)}{kubični(n)}$, kjer n predstavlja red grafa?

red	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
regularni	1	1	2	2	5	4	17	22	167	539	18979	389436	50314796
DDR	1	1	2	2	5	4	15	22	120	312	15018	378671	44267991
diam ≤ 2	1	1	2	2	4	3	13	21	113	310	14984	378667	44267777
odstotek	100	100	100	100	100	100	88	100	72	58	79	97	88

Tabela 4.1: Število regularnih grafov, DDR-grafov, DDR-grafov premera ≤ 2 ter odstotek DDR-grafov v množici regularnih grafov reda od 2 do 14.

red	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
kubični	1	2	5	19	85	509	4060	41301	510489	7319447
kubični DDR	1	2	3	4	7	9	11	9	13	8

Tabela 4.2: Število kubičnih grafov ter kubičnih DDR-grafov reda od 4 do 22.

4.2.1 Lastnosti DDR-grafov

Oglejmo si nekaj pogojev, ki veljajo za razdaljne stopnje v DDR-grafih. Med drugim smo pokazali povezavo med številom vozlišč na določeni razdalji v podmnožicah množice vozlišč DDR-grafa ter neunimodalnost zaporedja razdaljnih stopenj DDR-grafa.

Trditev 20. Naj ima r -regularen G DDR-graf ožino γ . Potem je $d_i = r(r-1)^{i-1}$ za vsak $1 \leq i < \frac{1}{2}(\gamma-1)$.

Dokaz. Ker je G r -regularen graf, lahko pri računanju razdaljnih stopenj poljubnega vozlišča $v \in V(G)$ z uporabo pregleda v širino sklepamo, da vsako vozlišče na razdalji i od v porodi $r-1$ vozlišč na razdalji $i+1$ od v . Ker je i manjše od $\frac{1}{2}(\gamma-1)$, se namreč ne more zgoditi, da bi zaradi ciklov v grafu G katerega od vozlišč šteli dvojno. \square

Trditev 21 ([57]). Naj bo G DDR-graf premera $p \geq 2$. Potem za vsak i med 1 in p velja $3d_i \geq 2(d_{i+1} + 1)$. Če za nek i velja enakost je $G \cong C_n \circ K_m$, kjer je $m = d_i/2$, n pa je bodisi $2p$ bodisi $2p+1$.

Posledica 22. Naj bo G DDR-graf reda n in premera $p \geq 2$. Potem je

$$d_p \leq n - \frac{1}{3}(2p-1)(d_1+1).$$

Dokaz. Če seštejemo števila vozlišč po celotni razdaljni particiji, dobimo $d_0 + d_1 + d_2 + \dots + d_p = n$. Z uporabo neenakosti iz trditve 21 dobimo

$$\begin{aligned} d_p &\leq n - 1 - d_1 - \frac{2}{3}(p-2)(d_1+1) \\ &= n - \frac{1}{3}(2(p-2)(d_1+1) + 3d_1 + 3) \\ &= n - \frac{1}{3}(2p-1)(d_1+1). \quad \square \end{aligned}$$

Trditev 23. Naj bo G netrivialen graf, $S \subset V(G)$, $S \neq \emptyset$, z $D_i^G(S)$ pa označimo število parov vozlišč iz S , ki so na razdalji i v grafu G . Potem je G DDR-graf natanko tedaj, ko je vrednost $D_i^G(S) - D_i^G(V(G) \setminus S)$ odvisna le od $|S|$ za vsak i , $1 \leq i \leq \text{diam}(G)$.

Dokaz. Naj bo G povezan graf in S poljubna neprazna prava podmnožica $V(G)$. Poglejmo si, kaj se zgodi z vrednostjo $D_i^G(S) - D_i^G(V(G) \setminus S)$, če množici S odvzamemo element $s \in S$ ter ji dodamo nov element $v \in V(G) \setminus S$. Število parov vozlišč na razdalji i , ki vsebujejo s , je $d_i(G, s)$. Denimo, da se k od teh parov nahaja v S . Enako naj se ℓ od $d_i(G, v)$ parov vozlišč na razdalji i , ki vsebujejo v , nahaja v $V(G) \setminus S$. Naj bo $S' := (S \setminus \{s\}) \cup \{v\}$. Poglejmo si razlike med števili parov, pri čemer najprej privzamemo, da $d(s, v) \neq i$:

$$\begin{aligned} D_i^G(S') &= D_i^G(S) - k + (d_i(G, v) - \ell), \\ D_i^G(V(G) \setminus S') &= D_i^G(V(G) \setminus S) - \ell + (d_i(G, s) - k). \end{aligned}$$

Od tod sledi

$$D_i^G(S') - D_i^G(V(G) \setminus S') = D_i^G(S) - D_i^G(V(G) \setminus S) + d_i(G, v) - d_i(G, s). \quad (4.1)$$

Če sta s in v na razdalji i , sta obe vrednosti $D_i^G(S')$ ter $D_i^G(V(G) \setminus S')$ za eno manjši, kar pomeni, da enakost (4.1) velja v obeh primerih. Torej je razlika med omenjenima vrednostima odvisna le od velikosti množice S natanko tedaj, ko velja $d_i(G, v) = d_i(G, s)$ za vse pare vozlišč (s, v) . Enakost (4.1) velja za vsak i , iz česar sledi veljavnost trditve. \square

Definicija. Zaporedju (a_n) pravimo *unimodalno*, če obstaja tak indeks i , da je zaporedje nepadajoče do elementa a_i ter nenaraščajoče od elementa a_i dalje.

Izkaže se, da zaporedja razdaljnih stopenj v splošnem niso unimodalna (glej npr. [9, slika 3.1]), vendar je od začetka 80-ih let obstajalo vprašanje ali je zaporedje razdaljnih stopenj DDR-grafa unimodalno [10]. Že prej je bilo znano, da so DDS razdaljno regularnih grafov unimodalna [112], vendar, kot je omenjeno v [10], DDR-graf ni nujno razdaljno regularen. Vprašanje je bilo rešeno leta 1987, ko sta Shearer in Watkins [106] našla neskončne

družine končnih in neskončnih vozliščno tranzitivnih grafov z neunimodalnimi zaporedji razdaljnih stopenj (spomnimo, da vozliščno tranzitivni grafi spadajo med DDR-grafe [10]). Najmanjši doslej znan primer predstavlja prisekan dodekaeder na 60 vozliščih, ki ima DDS enako $(1, 3, 4, 6, 8, 10, 8, 10, 6, 3, 1)$. Primera neskončnih lokalno končnih grafov z neunimodalnim zaporedjem DDS pa sta polpravilni tlakovanji 3.6.3.6 ter 3.12.12, ki smo ju spoznali v prejšnjem poglavju; glej sliko 3.4. Njuni zaporedji razdaljnih stopenj sta izračunani na strani 33.

4.2.2 Simetrije v DDR-grafih

DDR-grafi kažejo precejšnjo stopnjo strukturne simetrije, zato si poglejmo povezave med njimi in grafi z različnimi stopnjami simetrije, ki je večinoma definirana z njihovimi avtomorfizmi. Obravnavali smo razdaljno, vozliščno, povezavno in ločno tranzitivnost, razdaljno regularnost, sebi-centralnost ter sebi-medianskost. Kot je razvidno iz naslednjih trditev, predstavljajo DDR-grafi precej široko družino grafov, ki vsebuje tako grafe z veliko kot grafe z minimalno stopnjo simetrije.

Trditev 24 ([10]). *Graf, ki je vozliščno, ločno, ali razdaljno tranzitiven ali pa razdaljno regularen, je tudi DDR-graf. Povezavno tranzitiven graf ni nujno DDR-graf.*

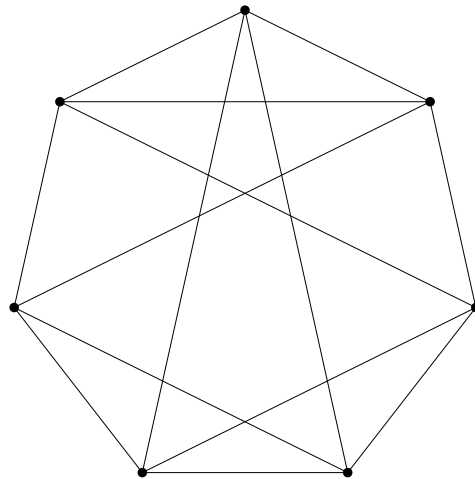
Iz naslednje trditve lahko razberemo, da je regularnost razdaljnih stopenj šibkejši pogoj od omenjenih v trditvi 24.

Trditev 25 ([10]). *DDR-graf ni nujno vozliščno, povezavno, ločno ali razdaljno tranzitiven niti razdaljno regularen.*

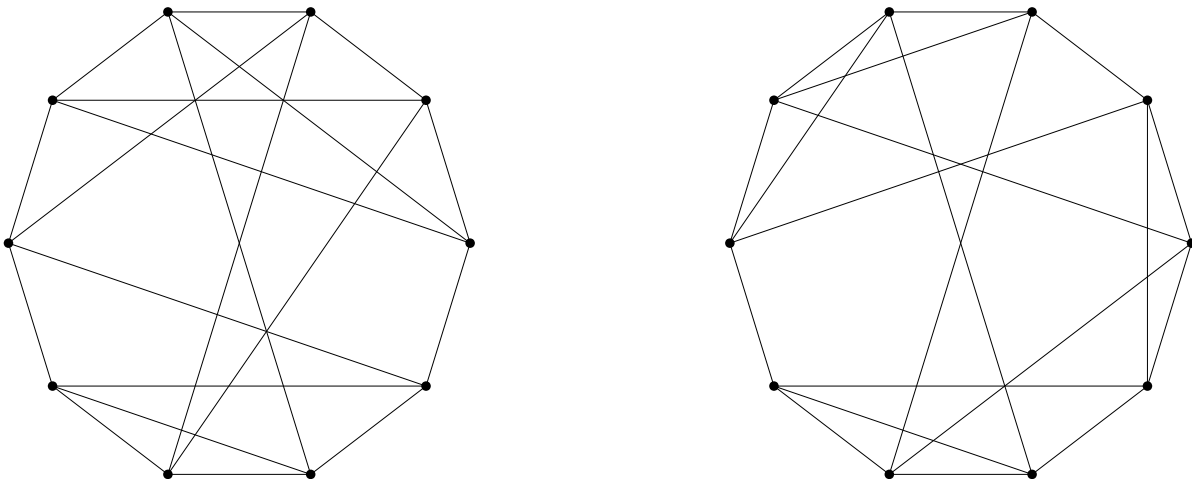
Kot smo že omenili, obstajajo DDR-grafi s trivialno grupo avtomorfizmov, kar je za pet in več regularne DDR-grafe pokazano v [10]. Podatki iz zbirk [103] ter [83] so nam služili pri reševanju *problema IV* iz [10], ki sprašuje, če tudi za $r = 3$ in $r = 4$ obstajajo r -regularni DDR-grafi s trivialno grupo avtomorfizmov ter kakšen je v tem primeru njihov najnižji red. Odkrili smo, da v kubičnih grafih do reda 22 ne obstaja DDR-graf s trivialno grupo avtomorfizmov, v 4-regularnih grafih pa obstajata dva grafa reda 10 z omenjeno lastnostjo, ki sta prikazana na sliki 4.5. Za kubične grafe problem tako ostaja še vedno odprt.

Preden umestimo DDR-grafe med družine grafov z omenjenimi simetrijami, pa prikažimo še njihove medsebojne povezave. V delih [10] in [111] lahko bralec najde dokaze oziroma reference nanje za naslednje lastnosti:

- Ločno tranzitiven graf je vozliščno in povezavno tranzitiven, ni pa nujno razdaljno tranzitiven ali razdaljno regularen.



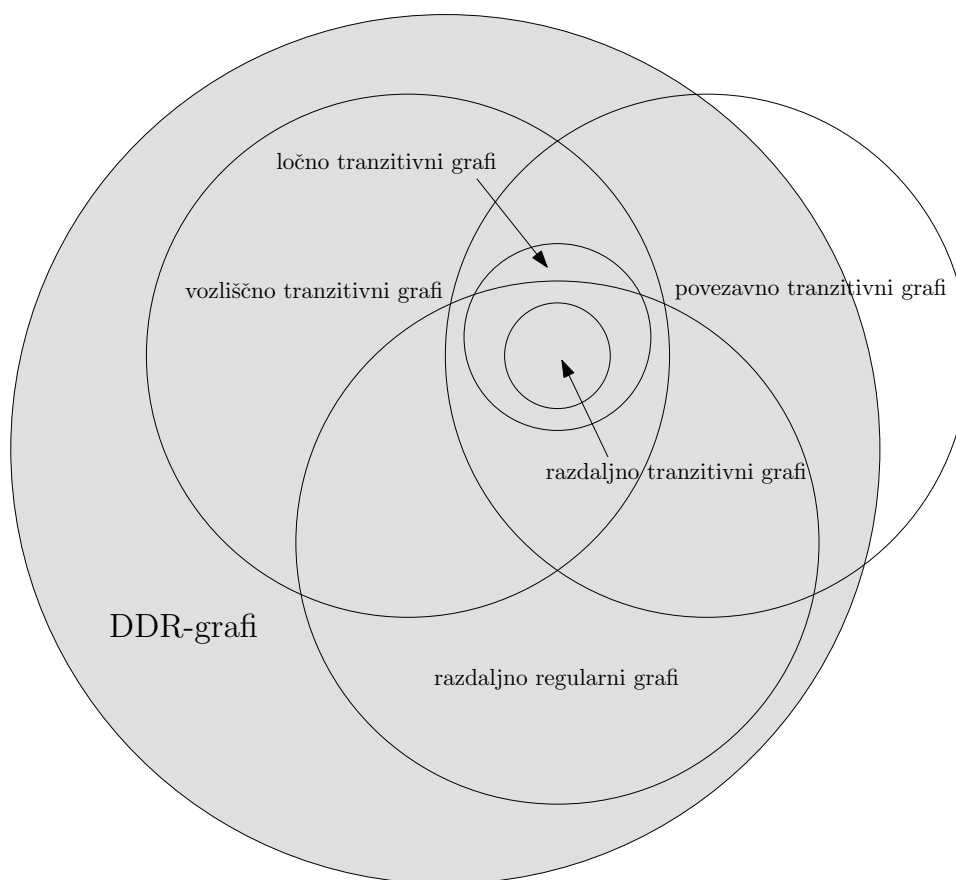
Slika 4.4: Najmanjši DDR-graf, ki ni vozliščno tranzitiven. Dobimo ga iz K_7 , ki mu odvzamemo povezave dveh disjunktnih ciklov C_3 in C_4 .



Slika 4.5: 4-regularna DDR-grafa reda 10, ki imata trivialni grupi avtomorfizmov.

- Razdaljno tranzitiven graf je ločno tranzitiven in razdaljno regularen.
- Vozliščno tranzitiven graf ni nujno povezavno tranzitiven, ločno tranzitiven ali razdaljno regularen.
- Razdaljno regularen graf ni nujno vozliščno, ločno ali razdaljno tranzitiven niti povezavno tranzitiven. Primer slednjega je Tuttejeva 12-kletka [13], kubičen razdaljno regularen graf ožine 12 na 126 vozliščih, katerega povezavna netranzitivnost je bila preverjena s programskim paketom Mathematica [125].
- Povezavno tranzitiven graf ni nujno razdaljno, ločno ali vozliščno tranzitiven niti razdaljno regularen.

Izhajajoč iz zgornjih lastnosti ter zadnjih dveh trditev, je na sliki 4.6 prikazana medsebojna pripadnost družin grafov z različnimi stopnjami simetrije.



Slika 4.6: Povezave med DDR-grafi in grafi z različnimi stopnjami simetrije.

F. Buckley je leta 1979 v [15] definiral koncept sebi-centralnega grafa, v katerem vsa vozlišča ležijo v centru grafa. Podobno je definiran tudi sebi-medianski graf [47], kjer vsa vozlišča ležijo v mediani grafa.

Trditev 26. Vsak DDR-graf je sebi-centralen in sebi-medianski. Obratno ni nujno res.

Dokaz. Omenjeni lastnosti DDR-grafov sta razvidni iz samega zaporedja razdaljnih stopenj, ki je enako za vsa vozlišča. Primer sebi-centralnega grafa, ki ni DDR-graf, je C_5 z dodano poljubno povezavo, saj ima $DDS = ((1, 2, 2)^3, (1, 3, 1)^2)$, hkrati pa je ekscentričnost vsakega vozlišča enaka 2. Primer sebi-medianskega grafa, ki ni DDR-graf, pa je posplošeni Petersenov graf $GP(35, 8)$, kjer ima poljubno vozlišče vsoto razdalj do vseh ostalih vozlišč enako 281, medtem ko je $DDS = ((1, 3, 6, 12, 20, 18, 10)^{35}, (1, 3, 6, 12, 20, 6, 2)^{35})$. \square

Posledica 27. Sebi-centralni grafi niso nujno sebi-medianski ter obratno.

Dokaz. Protiprimera sta grafa, omenjena v dokazu trditve 26. Graf C_5 z dodano poljubno povezavo ima namreč v mediani le vozlišči stopnje 3, medtem ko ima $GP(35, 8)$ v centru le vozlišča notranjega oboda. \square

4.2.3 Produkti DDR-grafov

Ohranjanje regularnih razdaljnih stopenj v produktnih grafih je pomembno zaradi generiranja novih DDR-grafov in predstavlja bistvo dokaza trditve 18. Za poseben primer kartezičnega produkta je povezava dokazana že v [10].

Trditev 28 ([10]). Če je G DDR-graf premera p in stopnje r , potem je $G \square C_2$ DDR-graf premera $p + 1$ in stopnje $r + 1$. Za $k \geq 3$ je $G \square C_k$ DDR-graf premera $p + \lfloor k/2 \rfloor$ in stopnje $r + 2$.

Posledica 29 ([10]). Če je G DDR-graf premera p in stopnje r , potem je $G \square \underbrace{C_2 \square \dots \square C_2}_n$ DDR-graf premera $p + n$ in stopnje $r + n$, $G \square \underbrace{C_k \square \dots \square C_k}_n$ pa DDR-graf premera $p + n \lfloor k/2 \rfloor$ in stopnje $r + 2n$.

Ohranjanje regularnosti zaporedja razdaljnih stopenj v produktnih grafih je prvi preučeval Zhou [127], ki je obravnaval vse standardne grafavske produkte razen direktnega. Kasneje sta ohranjanje regularnosti v krepkem in leksikografskem produktu vozliščno tranzitivnih grafov pokazala Shearer in Watkins [106]. Dobrih 20 let po tem pa so Kutnar in soavtorji [71] ponovno pokazali ohranjanje v kartezičnem in leksikografskem produktu, Balakrishnan in soavtorji [4] pa ohranjanje v krepkem in direktnem produktu DDR-grafov.

Izrek 30 ([127]). Naj bosta G_1 in G_2 grafa s premeroma p_1 ter p_2 . Potem je $G_1 \square G_2$ DDR-graf z $DDS(G_1 \square G_2) = (d_0, d_1, \dots, d_{p_1+p_2})$, če in samo če sta G_1 in G_2 DDR-grafa z $DDS(G_i) = (d_0^{(i)}, d_1^{(i)}, \dots, d_{p_i}^{(i)})$ za $i = 1, 2$. Med razdaljnimi stopnjami produkta in faktorjev tedaj velja zveza

$$d_n = \sum_{j=0}^n d_j^{(1)} \cdot d_{n-j}^{(2)}, \text{ za } 0 \leq n \leq p_1 + p_2.$$

Izrek 31 ([127]). Naj bosta G_1 in G_2 grafa s premeroma p_1 ter p_2 , kjer privzamemo, da je $p_1 \leq p_2$. Potem je $G_1 \boxtimes G_2$ DDR-graf z $DDS(G_1 \boxtimes G_2) = (d_0, d_1, \dots, d_{p_2})$, če in samo če sta G_1 in G_2 DDR-grafa z $DDS(G_i) = (d_0^{(i)}, d_1^{(i)}, \dots, d_{p_i}^{(i)})$ za $i = 1, 2$. Med razdaljnimi stopnjami produkta in faktorjev tedaj velja zveza

$$d_n = \begin{cases} d_n^{(1)} \cdot d_n^{(2)} + \sum_{j=0}^{n-1} (d_j^{(1)} d_{n-j}^{(2)} + d_j^{(2)} d_{n-j}^{(1)}), & \text{za } 0 \leq n \leq p_1, \\ d_n^{(2)} \cdot |V(G_1)|, & \text{za } p_1 < n \leq p_2. \end{cases}$$

V primeru leksikografskega produkta je za povezanost produktne grafa dovolj le povezanost prvega od faktorjev [61]. Ker smo na začetku privzeli, da so vsi obravnavani grafi povezani, tu naredimo izjemo.

Izrek 32 ([127]). Naj bo G_1 netrivialen graf s premerom p_1 in G_2 graf, ki ni nujno povezan. Potem je $G_1 \circ G_2$ DDR-graf z $DDS(G_1 \circ G_2) = (d_0, d_1, \dots, d_{p_1})$, če in samo če je G_1 DDR-graf z $DDS(G_1) = (d_0^{(1)}, d_1^{(1)}, \dots, d_{p_1}^{(1)})$, G_2 pa r -regularen graf. Med razdaljnimi stopnjami produkta in faktorjev tedaj velja zveza

$$d_n = \begin{cases} 1, & \text{za } n = 0, \\ d_1^{(1)} \cdot |V(G_2)| + r, & \text{za } n = 1, \\ (d_2^{(1)} + 1) \cdot |V(G_2)| - r - 1, & \text{za } n = 2, \\ d_n^{(1)} \cdot |V(G_2)|, & \text{za } 3 \leq n \leq p_1. \end{cases}$$

Direktni produkt vozliščno tranzitivnih grafov je vozliščno tranzitiven [61] in zato tudi DDR-graf. Vendar to ne velja za poljubne DDR-grafe, saj je npr. posplošeni Petersenov graf $GP(7, 2)$ DDR-graf [71], direktni produkt $GP(7, 2) \times K_2$ pa ne. Regularnost razdaljnih stopenj se ohranja, če sta oba faktorja dvodelna grafa, a v tem primeru njun direktni produkt ni povezan.

Izrek 33. Naj bosta G_1 in G_2 netrivialna dvodelna grafa s premeroma p_1 ter p_2 . Potem sta obe komponenti direktnega produkta $G_1 \times G_2$ DDR-grafa, če in samo če sta G_1 in G_2 DDR-grafa z $DDS(G_i) = (d_0^{(i)}, d_1^{(i)}, \dots, d_{p_i}^{(i)})$ za $i = 1, 2$. Med razdaljnimi stopnjami posamezne komponente produkta in faktorjev tedaj velja zveza

$$d_n = d_n^{(1)} \cdot d_n^{(2)} + \sum_{j=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(d_n^{(1)} \cdot d_{n-2j}^{(2)} + d_n^{(2)} \cdot d_{n-2j}^{(1)} \right), \text{ za } 0 \leq n \leq \max\{p_1, p_2\}.$$

Dokaz. Dokaz ekvivalence pogoja regularnosti razdaljnih stopenj najdemo v [4, trditev 2.2]. Prav tako lahko iz omenjenega dokaza sklepamo, da je vozlišče (u, v) na razdalji n od vozlišča (g_1, g_2) v $G_1 \times G_2$, če je bodisi $d_{G_1}(u, g_1) = n$ in $n - d_{G_2}(v, g_2)$ nenegativno sodo število bodisi je $d_{G_2}(v, g_2) = n$ in $n - d_{G_1}(u, g_1)$ nenegativno sodo število. Odtod lahko sklepamo, da je v primeru netrivialnih faktorjev premer komponente direktnega produkta enak $\max\{p_1, p_2\}$, saj je sodo bodisi število n bodisi $n - 1$. Če si pogledamo prvi primer, je lahko $d_{G_2}(v, g_2)$ enaka $n, n - 2, n - 4, \dots, n - 2\lfloor n/2 \rfloor$. Torej je število vozlišč na razdalji n od (g_1, g_2) enako

$$d_n(G_1, g_1) \cdot d_n(G_2, g_2) + \sum_{j=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(d_n(G_1, g_1) \cdot d_{n-2j}(G_2, g_2) + d_n(G_2, g_2) \cdot d_{n-2j}(G_1, g_1) \right).$$

Zaradi dokazanih pogojev regularnosti razdaljnih stopenj v produktu in faktorjih [4, trditev 2.2] sledi iz zgornjega izraza tudi zveza, navedena v izreku. \square

4.3 Zaporedje razdalj grafa

Če seštejemo razdalje od danega vozlišča v grafa G do vseh ostalih vozlišč, dobimo tako imenovano *razdaljo vozlišča v v G* . Označimo jo z $d_G(v) := \sum_{u \in V(G)} d(v, u)$. V kolikor je znano zaporedje razdaljnih stopenj vozlišča v , je razdalja vozlišča v enaka $\sum_{i=1}^{e(v)} i \cdot d_i(G, v)$, n -terki razdalj vseh vozlišč, urejenih v nepadajočem vrstnem redu, pa pravimo *zaporedje razdalj grafa*³ G in ga označimo z $DS(G)$. Potrebno je paziti, saj se v določenih primerih za zaporedje razdalj uporabljajo tudi imena zaporedje razdaljnih stopenj [63], porazdelitev razdaljnih stopenj [12] ter statusno zaporedje [86]. Dalje definiramo *razdaljo grafa G* kot polovico vsote vseh členov zaporedja razdalj grafa [33], tj. $d(G) := 1/2 \sum_{v \in V(G)} d_G(v)$. Slednjo vsoto srečamo tudi v matematični kemiji, kjer nosi ime Wienerjev indeks [46]; glej str. 90.

Zaporedje razdalj grafa nosi manj informacij kot zaporedje razdaljnih stopenj, zato slednjega tudi ne moremo rekonstruirati iz prvega. Primer neizomorfni dreves z enakima zaporedjema razdalj ter različnima zaporedjema razdaljnih stopenj kaže slika 2 v [109]. Spomnimo tudi, da v mediani grafa ležijo ravno vozlišča z minimalno razdaljo, zato imajo v sebi-medianskem grafu vsa vozlišča enako razdaljo. Vendar, kot je bilo pokazano v trditvi 26, sebi-medianski grafi ne spadajo nujno med DDR-grafe.

V članku [33] lahko najdemo analizo zaporedja razdalj ter razdalje grafa. Dokazano je, da za razdaljo poljubnega vozlišča v v grafu G reda n z m povezavami velja $n - 1 \leq d_G(v) \leq (n - 1)(n + 2)/2 - m$, kjer spodnja meja drži za polne grafe, zgornja pa za krajišča poti. V primeru, da je graf sebi-medianski, pa iz [93, izreka 1 in 5] ter enakosti $d(G) = nd_G(v)/2$ dobimo omejitvi $2(n - 1 - m/n) \leq d_G(v) \leq \lfloor n^2/4 \rfloor$. Izkaže se, da imajo največjo razliko med vozliščem z maksimalno ter vozliščem z minimalno razdaljo ravno drevesa [33, izrek 3.2] ter da je pogoj $d_G(v) \leq \lfloor (3n - 4)/2 \rfloor$ za vsak $v \in V(G)$ celo zadosten za obstoj Hamiltonovega cikla v grafu G [33, izrek 4.3].

Kot smo videli v izreku 14, je problem realizacije drevesa z danim zaporedjem razdaljnih stopenj \mathcal{NP} -poln. Enak problem je za zaporedje razdalj definiral Miller [85] in še vedno ostaja nerešen.

4.4 Razdaljno uravnoveženi grafi

V članku [65] so Jerebic, Klavžar in Rall predstavili koncept razdaljno uravnoveženih grafov. Za opis le-teh se osredotočimo na njihove povezave. Za sosednji vozlišči u in v grafa G defini-

³angl. distance sequence (DS)

rajmo množico vozlišč W_{uv}^G , ki so bližje vozlišču u , tj. $W_{uv}^G := \{x \in V(G) \mid d(u, x) < d(v, x)\}$, medtem ko ${}_uW_v^G$ predstavlja množico vozlišč, ki so enako oddaljena od u in v .

Definicija. Graf G je *razdaljno uravnorežen* oziroma *DB-graf*⁴, če velja $|W_{uv}^G| = |W_{vu}^G|$ za vse povezave $\{u, v\} \in E(G)$.

V splošnem pri definiciji razdaljne uravnoreženosti ni potrebno, da je graf povezan, saj lahko vozlišča iz drugih komponent upoštevamo kot enako oddaljena od obeh krajišč izbrane povezave. Vendar iz tega sledi, da je G DB-graf natanko tedaj, ko so DB-grafi vse njegove povezane komponente, zato se lahko pri preučevanju DB-grafov omejimo na povezane grafe. Kadar ne bo potrebno, bomo spuščali tudi oznako za graf in pisali kar W_{uv} oziroma ${}_uW_v$.

Hitro je razvidno, da med razdaljno uravnorežene grafe spadajo cikli in polni grafi. Med DB-grafe spadajo še krožni grafi [65, trditev 2.4] ter simetrični sodi grafi [52, lema 1.1]. Handa [52], ki je prvi preučeval DB-grafe (čeprav jih ni poimenoval), je dokazal, da so 2-povezani (razen K_2) ter za dvodelne grafe podal vprašanje ali so mogoče celo 3-povezani, ki še vedno ostaja neodgovorjeno. Nekateri družine, kot so delne kocke, zadoščajo pogoju 3-povezanosti [52, izrek 1.3], medtem ko za splošne grafe to ne velja; za protiprimer glej sliko 4.8.

Handa je med drugim tudi pokazal [52, lema 2.3], da imajo dvodelni DB-grafi, ki niso enaki sodim ciklom ali K_2 , minimalno stopnjo 3. To trditev smo posplošili na poljubne grafe; glej izrek 37 v nadaljevanju.

Množice W_{uv} oziroma ${}_uW_v$ igrajo pomembno vlogo v metrični teoriji grafov [5]. Kot primer uporabe množic pri izometričnih vložitvah grafov v hiperkocke ter splošneje v medianske grafe, si bralec lahko ogleda deli Djokovića [28] ter Imricha in Klavžarja [61].

Naslednji rezultat nam pokaže, da je med grafi premera 2 veliko DB-grafov, saj sovpadajo z regularnimi grafi.

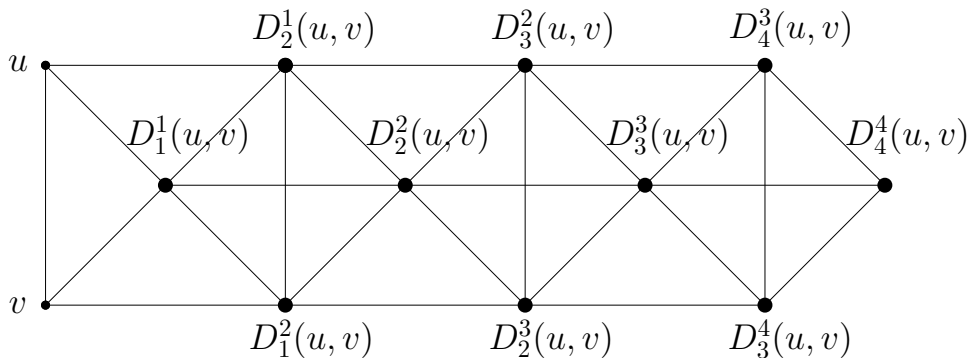
Trditev 34 ([65]). *Naj bo G graf premera 2. Potem je razdaljno uravnorežen natanko tedaj, ko je regularen.*

Omenjena trditev, ki jo je (sicer v drugačnem kontekstu) dokazal že Sabidussi [104], velja tudi za DDR-grafe (trditev 17). Da bi ugotovili povezavo med obema družinama tudi v splošnem, najprej za poljubni vozlišči $u, v \in V(G)$ definirajmo množice

$$D_j^i(u, v) := \{x \in V(G) \mid d(u, x) = i, d(v, x) = j\}.$$

⁴angl. distance balanced (DB) graf

Če sta u in v sosedata, so zaradi trikotniške neenakosti, ki velja za razdaljo, neprazne množice $D_{i-1}^i(u, v)$, $D_i^i(u, v)$ ter $D_i^{i-1}(u, v)$ za $i \in \{1, 2, \dots, \text{diam}(G)\}$. Te množice nam definirajo razdaljno particijo $V(G)$ glede na povezavo $\{u, v\}$. Primer takšne particije lahko vidimo na sliki 4.7.



Slika 4.7: Razdaljna particija grafa s premerom 4 glede na povezavo $\{u, v\}$.

S pomočjo razdaljne particije lahko definicijo razdaljne uravnoveženosti zapišemo s pogojem

$$\sum_{i=1}^{\text{diam}(G)} |D_i^{i-1}(u, v)| = \sum_{i=1}^{\text{diam}(G)} |D_{i-1}^i(u, v)|$$

za vsako povezavo $\{u, v\} \in E(G)$.

V članku [71] so grafe, za katere velja $|D_i^{i-1}(u, v)| = |D_{i-1}^i(u, v)|$ za vsak i in vsako povezavo $\{u, v\}$, poimenovali *krepko razdaljno uravnoveženi*. Izkaže se, da so (povezani) grafi s to lastnostjo ravno DDR-grafi, zato DDR-grafi spadajo med DB-grafe.

Trditev 35 ([71]). Naj bo G graf s premerom p . Potem je $|D_i^{i-1}(u, v)| = |D_{i-1}^i(u, v)|$ za vsak i , $1 \leq i \leq p$, ter za vsako povezavo $\{u, v\} \in E(G)$, če in samo če je $d_i(G, u) = d_i(G, v)$ za vsak i , $0 \leq i \leq p$, ter za poljubni vozlišči $u, v \in V(G)$.

Trditev 35 povezuje lastnosti vozlišč DDR-grafov z lastnostmi krajišč njihovih povezav. Vendar je potrebno opozoriti, da v DDR-grafih $|D_i^{i-1}(u, v)|$ ni nujno enak za vse povezave. Prav tako $|W_{uv}|$ ni nujno enak za vse povezave. To je razvidno iz posplošenega Petersenovega grafa $GP(7, 2)$, kjer je $|D_3^2(u, v)| = 2$ in $|W_{uv}| = 5$ za povezavo na zunanem ciklu ter $|D_3^2(u, v)| = 3$ in $|W_{uv}| = 6$ za povezavo med vozliščema v notranjosti. Po drugi strani pa obstajajo družine DDR-grafov, kjer so omenjene vrednosti za vse povezave enake.

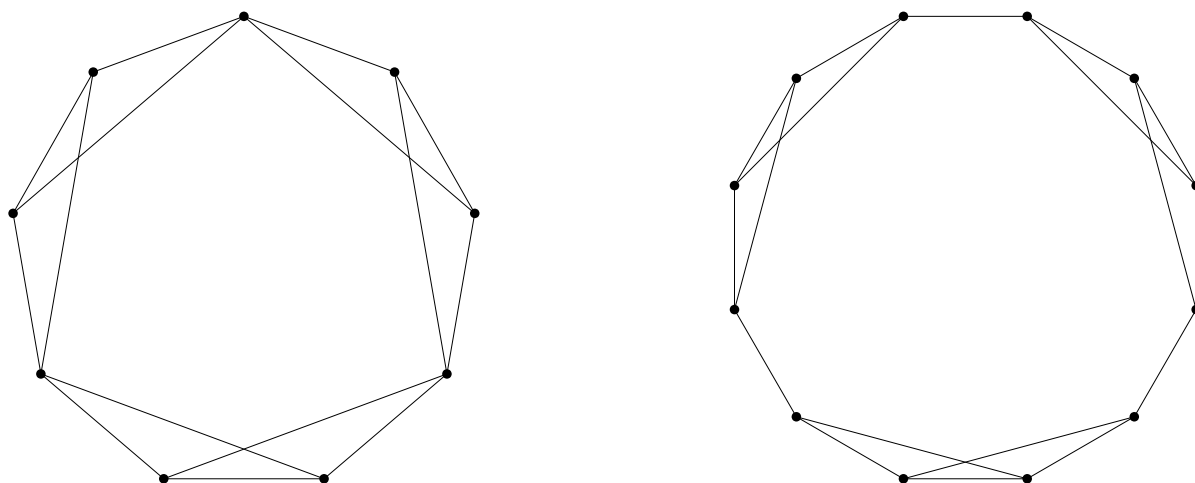
Trditev 36. Naj bo G dvodelen DDR-graf s premerom p . Potem je vrednost $|D_i^{i-1}(u, v)|$ pri izbranem i , $1 \leq i \leq p$, enaka za vse povezave $\{u, v\} \in E(G)$. Enake so tudi vse vrednosti $|W_{uv}|$.

Dokaz. Za poljubno povezavo $\{u, v\} \in E(G)$ velja $d_i(G, u) = |D_i^{i-1}(u, v)| + |D_i^i(u, v)| + |D_i^{i+1}(u, v)|$, kjer je $1 \leq i \leq p$. Ker je G dvodelen graf, je množica $D_i^i(u, v)$ prazna. Vzemimo povezavo $\{w, z\} \neq \{u, v\}$. Ker je G tudi DDR-graf, velja $d_i(G, u) = d_i(G, w)$, kjer je $0 \leq i \leq p$. Pri dokazu prvega dela trditve si pomagamo z indukcijo. Vemo, da je $|D_1^0(u, v)| = 1$ za vsako povezavo iz G . Privzemimo, da je za dani i za vse povezave enaka tudi vrednost $|D_i^{i-1}(u, v)|$. Potem velja

$$\begin{aligned} d_i(G, u) &= d_i(G, w), \\ |D_i^{i-1}(u, v)| + |D_i^{i+1}(u, v)| &= |D_i^{i-1}(w, z)| + |D_i^{i+1}(w, z)|, \\ |D_i^{i+1}(u, v)| &= |D_i^{i+1}(w, z)|, \\ |D_{i+1}^i(u, v)| &= |D_{i+1}^i(w, z)|, \end{aligned}$$

pri čemer zadnji sklep sledi iz definicije krepke razdaljne uravnoreženosti. Torej je tudi vrednost $|D_{i+1}^i(u, v)|$ enaka za vse povezave, kar dokazuje prvi del trditve. Drugi del pa je posledica pravkar dokazanega, saj velja $|W_{uv}| = \sum_{i=1}^p |D_i^{i-1}(u, v)|$. \square

Razdaljna uravnoreženost je torej šibkejši pogoj od regularnosti razdaljnih stopenj. Izkaže se, da je strogo šibkejši, saj obstajajo DB-grafi, ki niso DDR-grafi; npr. $GP(24, 4)$ [71]. Kot vemo, so vsi DDR-grafi regularni, na drugi strani pa obstajajo DB-grafi, ki niso regularni. Prvega je našel Sabidussi [104, slika 2]. S pregledom vseh povezanih grafov [79] smo ugotovili, da je omenjeni graf najmanjši te vrste (reda 9) in celo najmanjši DB-graf, ki ni DDR-graf. Dalje smo našli tudi najmanjši regularen DB-graf, ki ni DDR-graf (reda 12). Oba sta prikazana na sliki 4.8. Obstajajo tudi neregularni dvodelni DB-grafi, kot je delna kocka iz [52, slika 2].

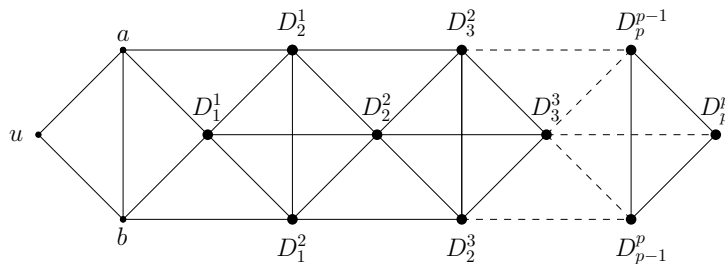


Slika 4.8: (levo) Najmanjši razdaljno uravnorežen graf, ki ni DDR-graf – graf Sabidussija. (desno) Najmanjši regularen razdaljno uravnorežen graf, ki ni DDR-graf.

Pri tolikšnem številu DB-grafov z zelo različnimi lastnostmi se porodi vprašanje o njihovi karakterizaciji. Kot smo omenili, je Handa dokazal [52], da so dvodelni DB-grafi stopnje 2 lahko le cikli sode dolžine. Ta rezultat pa se da še posplošiti.

Izrek 37. *Razdaljno uravnotežen graf G vsebuje vozlišče stopnje 2, če in samo če je G cikel.*

Dokaz. Če je graf G cikel, ki vemo, da spada med DB-grafe, ima vsa vozlišča stopnje dve. Dokaz implikacije v desno pa obsega pregled dveh različnih primerov. Naj bo $u \in V(G)$ vozlišče DB-grafa G , ki je stopnje 2, ter naj bosta $a, b \in V(G)$ njegova soseda. Označimo z n red grafa G , s p njegov premer ter uvedimo okrajšavo $D_j^i := D_j^i(a, b)$. Najprej si pogledjmo primer, ko sta tudi a in b soseda. Tedaj naredimo razdaljno particijo glede na povezavo $\{a, b\}$, pri čemer vozlišče u prikažemo posebej; glej sliko 4.9.



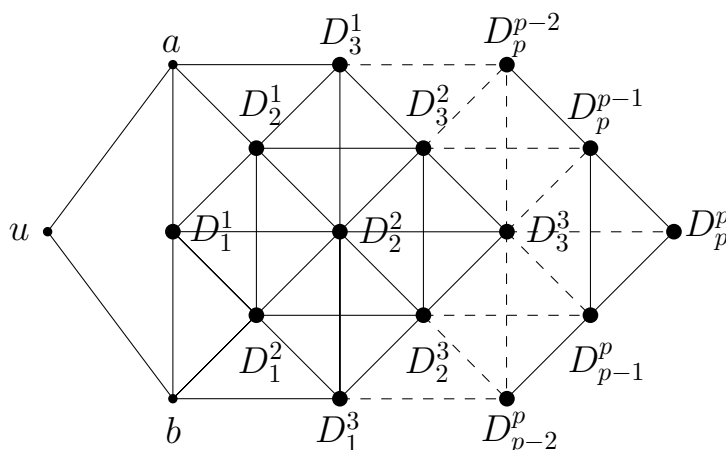
Slika 4.9: Razdaljna particija grafa glede na povezavo $\{a, b\}$, pri čemer vozlišče u , ki je stopnje 2, ločimo od ostalih vozlišč iz D_1^1 .

Definirajmo množice $A := \bigcup_{i=1}^p D_i^{i-1}$, $B := \bigcup_{i=1}^p D_{i-1}^i$ ter $I := \bigcup_{i=1}^p D_i^i$. Zaradi razdaljne uravnoteženosti glede na povezavi $\{u, a\}$ in $\{u, b\}$ dobimo pogoja

$$\begin{aligned} |W_{au}| &= |A \cup I| = |\{u\}| = |W_{ua}|, \\ |W_{bu}| &= |B \cup I| = |\{u\}| = |W_{ub}|. \end{aligned}$$

Ker množici A in B vsebujeta vsaj element a oziroma b , sledi $A = \{a\}$, $B = \{b\}$ ter $I = \emptyset$. Torej je graf G enak ciklu C_3 .

Raziščimo še, kaj se zgodi, ko vozlišči a in b nista sosednji. Tu konstruiramo finejšo razdaljno particijo, saj poleg množic D_{i-1}^i, D_i^{i-1} in D_i^i obstajajo tudi množice D_{i-2}^i ter D_i^{i-2} . Takšna particija je prikazana na sliki 4.10. Na podoben način kot prej uvedimo oznake za množice $A := \bigcup_{i=2}^p D_i^{i-2}$, $B := \bigcup_{i=2}^p D_{i-2}^i$ ter $I := \bigcup_{i=1}^p D_i^i$, kjer vozlišče u zopet prikažemo



Slika 4.10: Razdaljna particija grafa glede na nesosednji vozlišči a in b , pri čemer vozlišče u , ki je stopnje 2, ločimo od ostalih vozlišč iz D_1^1 .

posebej, tj. $u \notin D_1^1$. Poglejmo si, kakšne pogoje nam da zahteva po razdaljni uravnoveženosti.

$$|W_{au}| = |A \cup I \cup \bigcup_{i=1}^{p-1} D_{i+1}^i| = |B \cup \{u\}| = |W_{ua}|, \quad (4.2)$$

$$|W_{bu}| = |B \cup I \cup \bigcup_{i=1}^{p-1} D_i^{i+1}| = |A \cup \{u\}| = |W_{ub}|. \quad (4.3)$$

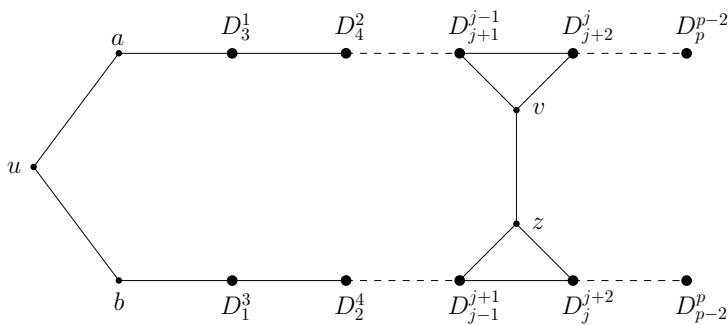
Odtod dobimo pogoj

$$\left| \bigcup_{i=1}^{p-1} D_{i+1}^i \right| + \left| \bigcup_{i=1}^{p-1} D_i^{i+1} \right| + 2|I| = 2,$$

kar nam da dve možnosti:

1. Če je $I = \emptyset$, $\exists j \in \{1, \dots, p-1\}$, da je $|D_{j+1}^j| = |D_j^{j+1}| = 1$, ostale množice D_{i+1}^i ter D_i^{i+1} pa so prazne. To je edina možnost, saj je D_{i+1}^i neprazna le, če je neprazna D_i^{i+1} ali D_i^i . Iz enačb (4.2) in (4.3) tako dobimo pogoj $|A| = |B|$, če seštejemo število vseh vozlišč grafa, pa še $|A| + |B| + 3 = n$. Od tod sledi $|A| = (n-3)/2$, kar pomeni, da se ta primer lahko pripeti le za grafe lihega reda.
2. Če je $|I| = 1$, $\exists j \in \{1, \dots, p\}$, da je $|D_j^j| = 1$, vse ostale množice D_i^i , D_{i+1}^i ter D_i^{i+1} pa so prazne. Iz enačb (4.2) in (4.3) dobimo pogoj $|A| = |B|$, če seštejemo število vseh vozlišč grafa, pa še $|A| + |B| + 2 = n$. Od tod sledi $|A| = n/2 - 1$, zato se ta primer zgodi le pri grafih sodega reda.

Za vsako od možnosti želimo dokazati, da sta oba sosedna vozlišča stopnje 2 tudi enake stopnje. Zaradi povezanosti grafa G bo to pomenilo, da imajo vsa vozlišča stopnjo 2, tj. da je graf G cikel.

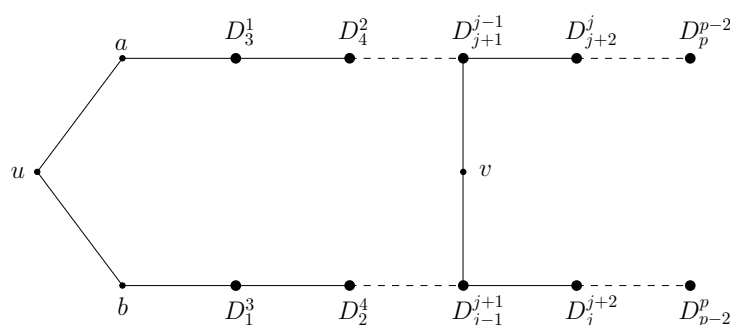


Slika 4.11: Prvi primer particije grafa glede na nesosednji vozlišči a in b , kjer je $D_{j+1}^j = \{v\}$ in $D_j^{j+1} = \{z\}$.

Poglejmo si najprej prvo od obeh možnosti, ki jo prikazuje slika 4.11. Naj bo $D_{j+1}^j = \{v\}$ in $D_j^{j+1} = \{z\}$. Denimo, da obstaja povezava $\{v, a_j\}$ za nek $a_j \in D_{j+2}^j$. Poglejmo si moč množice W_{va_j} . Velja $|W_{va_j}| \geq |B \cup \{v, z\}| = (n - 3)/2 + 2 = (n + 1)/2$. Ker mora veljati $|W_{va_j}| = |W_{a_jv}|$ in je $n = |W_{va_j}| + |W_{a_jv}| + |{}_vW_{a_j}|$, pridemo do protislovja. Zato omenjena povezava ni možna, zaradi simetrije pa lahko sklepamo tudi na neobstoj povezave $\{z, b_j\}$, kjer je $b_j \in D_j^{j+2}$. Dalje, za poljuben $a_1 \in D_3^1$ velja $d(a_1, z) = j$, sicer bi bila $|W_{aa_1}| \geq |B \cup \{a, u\}| = (n + 1)/2 > n/2$ (enako za poljuben $b_1 \in D_1^3$ velja $d(b_1, v) = j$). Posledično je vsako vozlišče iz D_1^3 in s tem množica $B \setminus \{b\}$ bližje vozlišču v kot vozlišču $a_{j-1} \in D_{j+1}^{j-1}$. Če izberemo povezavo $\{v, a_{j-1}\}$, tako velja $|W_{va_{j-1}}| \geq |B \setminus \{b\} \cup \{v, z\}| = (n - 1)/2$. Ker je $|{}_vW_{a_{j-1}}| \geq |\{b\}|$, v obeh primerih velja enakost, zato ima v le enega soseda iz D_{j+1}^{j-1} , ki ga označimo z a_{j-1}^* . Enako lahko dokažemo za vozlišče z ter njegovega soseda $b_{j-1}^* \in D_{j-1}^{j+1}$. Torej sta tako v kot z stopnje 2.

Denimo, da je $j < p - 1$. Vzemimo vozlišče a_j , ki je od vseh vozlišč iz D_{j+2}^j najbližje vozlišču a_{j-1}^* (če je več takšnih, izberemo enega od njih). Najkrajša pot od a_j do a_{j-1}^* (oziroma ena od najkrajših poti, če jih je več) gre tako prek soseda a_j iz D_{j+1}^{j-1} , ki ga označimo z a_{j-1} (slednji je lahko tudi enak a_{j-1}^*). Tedaj velja $|W_{a_{j-1}a_j}| \geq |B \cup \{u, a, v, z, a_{j-1}^*\}| = (n + 7)/2 > n/2$. To pa pomeni, da graf ne more biti razdaljno uravnotežen, če obstajajo povezave med množicama D_{j+1}^{j-1} in D_{j+2}^j . Posledično so za $i > j - 1$ vse množice D_{i+2}^i (ter po podobnem razmisleku tudi D_i^{i+2}) prazne.

Če je $j = 1$, ima vozlišče u že oba soseda stopnje 2. Sicer pa izberemo povezavo $\{a, a_1\}$, kjer je $a_1 \in D_3^1$. Velja $|W_{aa_1}| \geq |B \setminus \{b_{j-1}^*\} \cup \{a, u\}| = (n - 1)/2$. Ker je $d(a_1, z) = j$, je $|{}_aW_{a_1}| \geq |\{b_{j-1}^*\}|$. V obeh izrazih mora tako veljati enakost. Če bi imel a v D_3^1 še kakšnega soseda, bi le-ta spadal bodisi v W_{aa_1} bodisi v ${}_aW_{a_1}$, kar bi privedlo do protislovja. Vozlišče a je zato stopnje 2, z uporabo podobnega razmisleka pa ugotovimo, da to velja tudi za vozlišče b , kar smo želeli pokazati.



Slika 4.12: Drugi primer particije grafa glede na nesosednji vozlišči a in b , kjer je $D_j^j = \{v\}$.

Sedaj pa si pogledjmo še drugo od obeh možnosti, ki jo prikazuje slika 4.12. Naj bo $D_j^j = \{v\}$. Če obstaja povezava $\{v, a_{j-1}\}$ za nek $a_{j-1} \in D_{j+1}^{j-1}$, velja $|W_{va_{j-1}}| \geq |B \cup \{v\}| = n/2$. Torej mora veljati enakost, kar pomeni, da ima v le enega soseda iz D_{j+1}^{j-1} , ki ga označimo z a_{j-1}^* . Enako velja za soseda v iz D_{j-1}^{j+1} , ki ga označimo z b_{j-1}^* . Vozlišče v je torej stopnje 2.

Denimo, da velja $j < p - 1$. Vzemimo vozlišče a_j , ki je od vseh vozlišč iz D_{j+2}^j najbližje vozlišču a_{j-1}^* (če je več takšnih, izberemo enega od njih). Najkrajša pot od a_j do a_{j-1}^* (oziroma ena od najkrajših poti, če jih je več) gre tako prek soseda a_j iz D_{j+1}^{j-1} , ki ga označimo z a_{j-1} (slednji je lahko tudi enak a_{j-1}^*). Tedaj velja $|W_{a_{j-1}a_j}| \geq |B \cup \{u, a, v, a_{j-1}^*\}| = n/2 + 3$. To pa pomeni, da graf ne more biti razdaljno uravnotežen, če obstajajo povezave med množicama D_{j+1}^{j-1} in D_{j+2}^j . Posledično so za $i > j - 1$ vse množice D_{i+2}^i (ter po podobnem razmisleku tudi D_i^{i+2}) prazne.

Dalje, za poljuben $a_1 \in D_3^1$ velja $d(a_1, v) = j - 1$, sicer bi veljalo $|W_{aa_1}| \geq |B \setminus \{b_{j-1}^*\} \cup \{u, a\}| = n/2$. Ker pa bi bil b_{j-1}^* bodisi v W_{aa_1} bodisi v ${}_aW_{a_1}$, bi s tem prišli v protislovje s številom vseh vozlišč. Enako dobimo, da je $d(b_1, v) = j - 1$ za poljuben $b_1 \in D_1^3$.

Če obstaja povezava $\{a_{j-1}^*, a_{j-1}\}$ za nek $a_{j-1} \in D_{j+1}^{j-1}$, potem je $|W_{a_{j-1}^*a_{j-1}}| \geq |B \setminus \{b\} \cup \{a_{j-1}^*, v\}| = n/2$. Ker pa je $|{}_{a_{j-1}^*}W_{a_{j-1}}| \geq |\{b\}|$, pridemo do protislovja s številom vozlišč grafa. Zato a_{j-1}^* nima sosedov iz D_{j+1}^{j-1} in podobno b_{j-1}^* nima sosedov iz D_{j-1}^{j+1} .

Sedaj si pogledjmo povezavo $\{a, a_1\}$, kjer je $a_1 \in D_3^1$. Velja $|W_{aa_1}| \geq |B \setminus \{b_{j-1}^*\} \cup \{a, u\}| = n/2$. Torej a nima drugih sosedov v D_3^1 , saj bi le-ti spadali bodisi v W_{aa_1} bodisi v ${}_aW_{a_1}$, kar bi privedlo do protislovja. S podobnimi sklepi pokažemo, da je tudi b stopnje 2, kar smo želeli dokazati. \square

Izkaže se, da obstaja karakterizacija (povezanih) DB-grafov z uporabo vsot razdalj med vozlišči v grafu.

Izrek 38 ([4]). Graf G je razdaljno uravnotežen natanko tedaj, ko velja $M(G) = V(G)$, tj. ko vsa vozlišča ležijo v mediani grafa.

Balakrishnan in soavtorji [4] so s tem pokazali, da so DB-grafi ravno sebi-medianski grafi, čeprav to sledi že iz naslednje trditve, ki so jo že leta 1976 v članku [33] objavili Entringer in soavtorji.

Trditev 39 ([33]). Naj bosta u in v sosednji vozlišči v grafu G . Potem velja $d_G(u) - d_G(v) = |W_{vu}| - |W_{uv}|$.

Ker je graf povezan, iz razdaljne uravnoveženosti avtomatsko sledi enakost razdalj za vsa vozlišča ter obratno. V želji po podobni karakterizaciji DDR-grafov so Balakrishnan in soavtorji [4] postavili naslednjo domnevo.

Domneva 2 ([4]). Graf G je krepko razdaljno uravnovežen, tj. DDR-graf, če in samo če velja

$$\sum_{x \in W_{uv}} d(u, x) = \sum_{x \in W_{vu}} d(v, x)$$

za vse pare sosednjih vozlišč u in v v G .

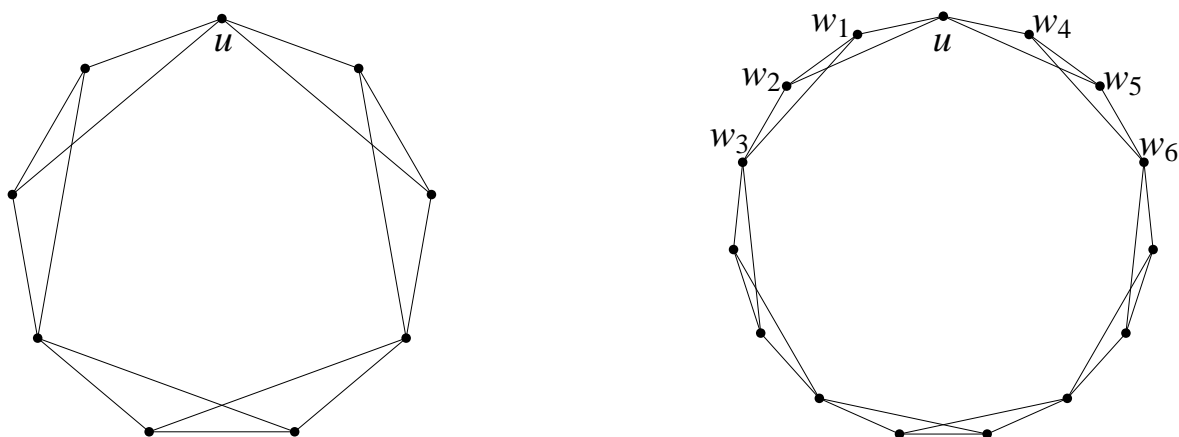
Če je G DDR-graf, zgornji pogoj seveda velja, saj je $|D_i^{i-1}(u, v)| = |D_{i-1}^i(u, v)|$ za vsak i in vsako povezavo $\{u, v\} \in E(G)$. Čeprav si je mogoče zamisliti možne velikosti množic $D_i^{i-1}(u, v)$ in $D_{i-1}^i(u, v)$, da obrat trditve v zgornji domnevi ne bi veljal, pa trenutno ne obstaja noben protiprimer.

Ker so vsi DDR-grafi tudi DB-grafi, je pričakovati, da je precejšen del DB-grafov regularen. Kot smo videli, obstajajo tudi neregularni DB-grafi, kot je primer grafa Sabidussija na sliki 4.8 levo. Kot bo razvidno iz naslednje trditve, nam ta graf porodi celo družino neregularnih razdaljno uravnoveženih oziroma sebi-medianskih grafov.

Trditev 40. Za vsak $p \geq 3$ obstaja neregularen razdaljno uravnovežen graf s premerom p . Med drugim obstaja neskončna družina neregularnih DB-grafov, ki izhajajo iz grafa Sabidussija.

Dokaz. Omenjeno trditev je brez dokaza navedel že Sabidussi [104]. Ločimo dva primera, lihe in sode premere. Ko je $p = 3$, je rešitev kar graf Sabidussija, ki smo ga že omenili (slika 4.8 levo). Iz njega lahko konstruiramo družino neregularnih DB-grafov za vse možne lihe premere. Najprej graf, ki ga omenja Sabidussi, narišemo kot je na sliki 4.13 levo. Nato mu dodamo šest novih vozlišč w_i , $i = 1, 2, \dots, 6$, in jih povežemo tako, kot je prikazano na sliki 4.13 desno. S tem dobimo graf premera 5.

Opisani postopek lahko ponavljamo in tako generiramo grafe za vse lihe premere. Naj bo Sab_k graf, ki ga dobimo po $k - 1$ ponovitvah omenjenega postopka dodajanja vozlišč. Začetni



Slika 4.13: (levo) Neregularen DB-graf premera 3. (desno) Neregularen DB-graf premera 5, ki ga dobimo iz grafa na levi z dodatkom šestih vozlišč w_i , $i = 1, 2, \dots, 6$.

graf je Sab_1 s slike 4.13 levo. Za Sab_k lahko hitro ugotovimo, da ima $3(2k + 1)$ vozlišč ter $5(2k + 1)$ povezav. Zaradi simetričnosti imamo le dve vrsti vozlišč z različnima zaporedjema razdaljnih stopenj. Naj bodo $u_k \in V(Sab_k)$ vozlišča stopnje 3, $v_k \in V(Sab_k)$ pa vozlišča stopnje 4. Velja

$$DDS(Sab_k, u_k) = (1, 3, \underbrace{4, 2, \dots, 4, 2}_{(k-1)\text{-krat}}, 4, 1),$$

$$DDS(Sab_k, v_k) = (1, \underbrace{4, 2, \dots, 4, 2}_{k\text{-krat}}, 2).$$

Razdalje vozlišč so tako

$$\begin{aligned} d_{Sab_k}(u_k) &= 3 + 4(2 + 4 + \dots + 2k) + 2(3 + 5 + \dots + (2k - 1)) + 2k + 1 \\ &= 3 + 4k(k + 1) + 2(k(2k + 1) - k(k + 1) - 1) + 2k + 1 \\ &= 6k^2 + 6k + 2, \\ d_{Sab_k}(v_k) &= 4(1 + 3 + \dots + (2k - 1)) + 2(2 + 4 + \dots + 2k) + 2(2k + 1) \\ &= 4(k(2k + 1) - k(k + 1)) + 2k(k + 1) + 2(2k + 1) \\ &= 6k^2 + 6k + 2. \end{aligned}$$

Sledi, da je Sab_k neregularen razdaljno uravnorežen graf premera $2k + 1$. S tem smo dokazali trditev za vse lihe premere. Pri sodih pa si pomagamo z lemo 2 iz članka [86]. Ta pravi, da je kartezični produkt DB-grafa z grafom K_2 tudi DB-graf. Zaradi lastnosti razdalj v kartezičnem

produktu [61, posledica 1.35] sledi, da je $Sab_k \square K_2$ DB-graf s premerom $2k + 2$. Ker vsebuje tako vozlišča stopnje 4 kot stopnje 5, ni regularen, zato je s tem pokazana trditev še za vse sode premere večje od 2. \square

Opomba. V trditvi 40 bi lahko izhajali iz osnovnega grafa Sabidussija (slika 4.8 levo) in le s pomočjo kartezičnih produktov s K_2 za vse premere večje od 3 generirali neregularne razdaljno uravnotežene grafe. Omenimo še, da za premer 2 takšni grafi ne obstajajo, saj so vsi DB-grafi premera 2 regularni.

Poleg neregularnih obstajajo tudi regularni DB-grafi, ki ne spadajo med DDR-grafe. Enega smo že prikazali na sliki 4.8 desno, z njegovo pomočjo pa lahko generiramo neskončno družino grafov z omenjeno lastnostjo.

Trditev 41. Za vsak $p \geq 4$ obstaja regularen razdaljno uravnotežen graf s premerom p , ki ni DDR-graf. Med drugim obstaja neskončna družina regularnih DB-grafov, ki niso DDR-grafi.

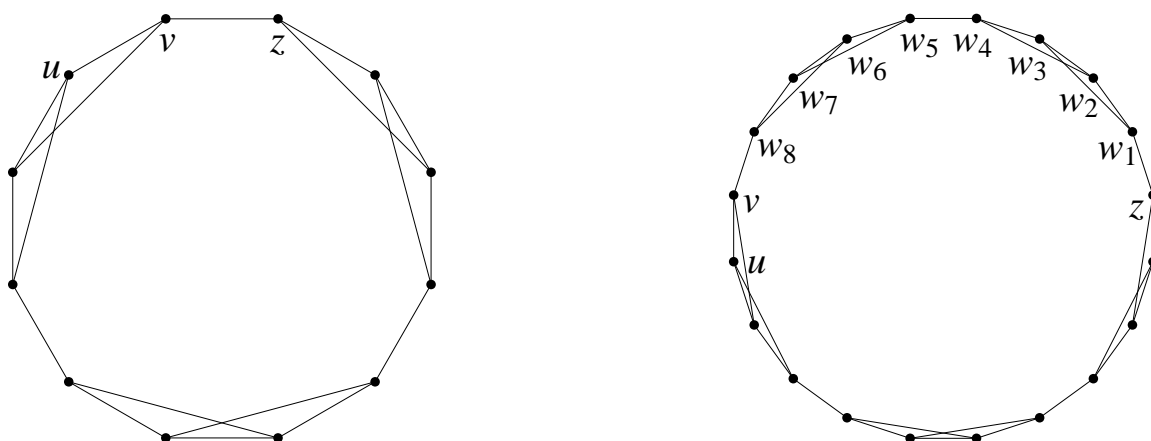
Dokaz. Kot se lahko hitro prepričamo, je graf 4.8 desno, DB-graf premera 4, ki hkrati ni DDR-graf. Označimo ga z $RegDB_1$. Kot smo omenili pri dokazu trditve 40, lahko s pomočjo [86, lema 2] z uporabo kartezičnega produkta $RegDB_1$ s K_2 generiramo nov regularen DB-graf, ki ima premer večji za 1. Poleg tega zaradi izreka 30 ne spada med DDR-grafe. S ponavljanjem postopka dobimo takšne grafe za vse omenjene premere.

Graf $RegDB_1$ (slika 4.14 levo) predstavlja tudi izhodišče za generiranje neskončne družine regularnih DB-grafov, ki niso DDR-grafi. Začnemo tako, da mu dodamo 8 novih vozlišč w_i , $i = 1, 2, \dots, 8$, in jih povežemo, kot je prikazano na sliki 4.14 desno. S tem dobimo graf premera 7.

Opisani postopek lahko ponavljamo. Naj bo $RegDB_k$ graf, ki ga dobimo po $k - 1$ ponovitvah omenjenega postopka dodajanja vozlišč. Za $RegDB_k$ lahko hitro ugotovimo, da ima $4(2k + 1)$ vozlišč ter $6(2k + 1)$ povezav. Zaradi simetričnosti imamo le dve vrsti vozlišč, katerih predstavnika sta v izhodiščnem grafu $RegDB_1$ (slika 4.14 levo) označena z u in v . Naj bodo $u_k \in V(RegDB_k)$ ter $v_k \in V(RegDB_k)$. Velja

$$DDS(RegDB_k, u_k) = (1, 3, \underbrace{2, 4, 2, \dots, 2, 4, 2}_{k\text{-krat}}),$$

$$DDS(RegDB_k, v_k) = (1, 3, \underbrace{3, 2, 3, \dots, 3, 2, 3}_{k\text{-krat}}).$$



Slika 4.14: (levo) Regularen DB-graf premera 4, ki ni DDR-graf. (desno) Regularen DB-graf premera 7, ki ni DDR-graf, in ga dobimo iz grafa na levi z dodatkom osmih vozlišč w_i , $i = 1, 2, \dots, 8$.

Razdalje vozlišč so tako

$$\begin{aligned}
 d_{RegDB_k}(u_k) &= 3 + 2(2 + 5 + \dots + (3k - 1)) + 4(3 + 6 + \dots + 3k) + \\
 &\quad + 2(4 + 7 + \dots + (3k + 1)) \\
 &= 3 + 2(3k^2 - 1) + 6k(k + 1) + 2(3k + 1) = 12k^2 + 12k + 3, \\
 d_{RegDB_k}(v_k) &= 3 + 3(2 + 5 + \dots + (3k - 1)) + 2(3 + 6 + \dots + 3k) + \\
 &\quad + 3(4 + 7 + \dots + (3k + 1)) \\
 &= 3 + 3(3k^2 - 1) + 3k(k + 1) + 3(3k + 1) = 12k^2 + 12k + 3.
 \end{aligned}$$

Sledi, da je $RegDB_k$ regularen razdaljno uravnorežen graf premera $3k + 1$, ki hkrati ni DDR-graf. S tem smo dokazali obstoj neskončne družine iz trditve. \square

Posledica 42. Najmanjši premer, ki ga ima lahko regularen DB-graf, ki ne spada med DDR-grafe, je enak 4.

Dokaz. Kot vemo iz trditve 34, so vsi DB-grafi s premerom 2 tudi DDR-grafi, saj so regularni. Naj ima graf G premer 3. Obstaja torej vozlišče v , ki ima $DDS(v) = (1, v_1, v_2, v_3)$. Denimo, da obstaja tudi vozlišče u z zaporedjem razdaljnih stopenj $DDS(u) = (1, u_1, u_2, u_3)$. Potem zaradi regularnosti sledi $u_1 = v_1$, iz pogoja $d_G(u) = d_G(v)$ pa $2v_2 + 3v_3 = 2u_2 + 3u_3$. Če upoštevamo še, da je $v_2 + v_3 = u_2 + u_3$, sledi $v_3 = u_3$ in posledično $v_2 = u_2$. Torej morajo imeti vsa vozlišča razen v ekscentričnost 2. Naj bo $DDS(u) = (1, u_1, u_2)$. Potem na

enak način dobimo enačbi $2v_2 + 3v_3 = 2u_2$ ter $v_2 + v_3 = u_2$, od koder sledi $v_3 = 0$, kar je protislovje. Zato je premer regularnega DB-grafa, ki ni DDR-graf, vsaj 4, temu pa zadošča graf $RegDB_1$ na sliki 4.8 desno. \square

Iz trditve 40, trditve 41 ter njene posledice lahko sklepamo, da graf Sabidussija ter graf $RegDB_1$, ki sta prikazana na sliki 4.8, predstavljata najmanjši neregularen ter regularen DB-graf, ki hkrati ni DDR-graf, tako po številu vozlišč kot po premeru.

4.4.1 Produkti razdaljno uravnoveženih grafov

V tem razdelku si pogledjmo pogoje za ohranjanje razdaljne uravnoveženosti v grafovskih produktih. Za razliko od DDR-grafov razdaljno uravnoveženost ohranjata le kartezični in leksikografski produkt. Spomnimo, da skozi disertacijo vseskozi privzemamo, da so grafi povezani, razen če ne omenimo drugače.

Izrek 43. *Imejmo grafa G in H . Potem je $G \square H$ DB-graf, če in samo če sta G in H DB-grafa. Med razdaljami vozlišč produkta in faktorjev velja zveza*

$$d_{G \square H}((g, h)) = d_G(g)|V(H)| + d_H(h)|V(G)|.$$

Dokaz. Prvi del izreka je dokazan v [65]. Formulo, ki povezuje razdalje vozlišč, izpeljemo iz izreka 30. Naj bosta premera grafov G in H enaka p_1 ter p_2 . S pomočjo razdaljnih stopenj vozlišča $(g, h) \in V(G \square H)$ lahko zapišemo razdaljo vozlišča kot

$$\begin{aligned} d_{G \square H}((g, h)) &= \sum_{j=0}^{p_1+p_2} j \sum_{i=0}^j d_i(G, g) d_{j-i}(H, h) = \sum_{i=0}^{p_1+p_2} \sum_{j=i}^{p_1+p_2} j d_i(G, g) d_{j-i}(H, h) \\ &= \sum_{i=0}^{p_1+p_2} d_i(G, g) \sum_{j=i}^{p_1+p_2} j d_{j-i}(H, h) = \sum_{i=0}^{p_1} d_i(G, g) \sum_{j=i}^{p_1+p_2} j d_{j-i}(H, h) \\ &= \sum_{i=0}^{p_1} d_i(G, g) \sum_{k=0}^{p_2} (k+i) d_k(H, h) \\ &= \sum_{i=0}^{p_1} d_i(G, g) \left(\sum_{k=0}^{p_2} k d_k(H, h) + i \sum_{k=0}^{p_2} d_k(H, h) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{p_1} d_i(G, g) (d_H(h) + i|V(H)|) \\ &= d_H(h) \sum_{i=0}^{p_1} d_i(G, g) + |V(H)| \sum_{i=0}^{p_1} i d_i(G, g) \\ &= d_H(h)|V(G)| + d_G(g)|V(H)|. \end{aligned}$$

Ko sta oba faktorja ter njun kartezični produkt DB-grafi, so seveda razdalje za vsa vozlišča enake. \square

Lema 2 iz članka [86], ki pravi, da je kartezični produkt DB-grafa G z vozlišči z razdaljo s ter grafa K_2 tudi DB-graf, v katerem imajo vozlišča razdaljo $2s + |V(G)|$, je tako le posledica izreka 43.

Izrek 44. *Naj bo G netrivialen graf, H pa graf, ki ni nujno povezan. Potem je $G \circ H$ DB-graf, če in samo če je G DB-graf, H pa regularen graf. Med razdaljami vozlišč produkta in faktorjev velja zveza*

$$d_{G \circ H}((g, h)) = (d_G(g) + 2)|V(H)| - d_1(H, h) - 2.$$

Dokaz. Prvi del izreka je dokazan v [65], vendar le v primeru, ko sta oba faktorja povezana. Formulo, ki povezuje razdalje vozlišč, bomo izpeljali iz izreka 32 in z njeno pomočjo pokazali, da H ni nujno povezan. Naj bo premer grafa G enak p_1 . S pomočjo razdaljnih stopenj vozlišča $(g, h) \in V(G \circ H)$ lahko zapišemo razdaljo vozlišča kot

$$\begin{aligned} d_{G \circ H}((g, h)) &= d_1(G, g)|V(H)| + d_1(H, h) + 2(d_2(G, g)|V(H)| + |V(H)| - d_1(H, h) - 1) \\ &\quad + \sum_{i=3}^{p_1} id_i(G, g)|V(H)| \\ &= d_G(g)|V(H)| + 2|V(H)| - d_1(H, h) - 2 \\ &= (d_G(g) + 2)|V(H)| - d_1(H, h) - 2. \end{aligned}$$

Če je G DB-graf in H regularen, iz zgornje formule avtomatsko sledi, da je tudi $G \circ H$ DB-graf. Poglejmo še obraten pogoj. Naj bo torej $G \circ H$ DB-graf. Potem za $g_1, g_2 \in V(G)$ velja

$$\begin{aligned} d_{G \circ H}((g_1, h)) &= d_{G \circ H}((g_2, h)) \\ (d_G(g_1) + 2)|V(H)| - d_1(H, h) - 2 &= (d_G(g_2) + 2)|V(H)| - d_1(H, h) - 2 \\ d_G(g_1) &= d_G(g_2). \end{aligned}$$

Torej je G DB-graf. Na enak način dobimo iz $d_{G \circ H}((g, h_1)) = d_{G \circ H}((g, h_2))$ pogoj $d_1(H, h_1) = d_1(H, h_2)$, zato je H regularen graf. \square

Ostali produkti, kot omenjeno, ne ohranjajo razdaljne uravnoreženosti. Protiprimera za krepki produkt ter direktni produkt dveh dvodelnih grafov sta dana v [65], protiprimer za direktni produkt, kjer eden od faktorjev ni dvodelen, pa je $GP(7, 2) \times K_2$. Polovica vozlišč tega produkta ima namreč razdaljo 78, druga polovica pa 82. Spomnimo, da je $GP(7, 2)$ DDR-graf [71], torej je razdaljno uravnorežen.

4.4.2 Razpoznavanje razdaljno uravnoreženih grafov

Naj bo G graf z n vozlišči in m povezavami. Če pri ugotavljanju, ali je G razdaljno uravnorežen, izhajamo iz prvotne definicije, je potrebno za vsako povezavo ugotoviti število vozlišč, ki so bližje prvemu oziroma drugemu krajišču povezave. Najlažje to razberemo iz matrike razdalj, za konstrukcijo katere potrebujemo $\mathcal{O}(mn)$ časa. Nato za vsako povezavo $\{u, v\}$ ugotovimo, če za izbrano vozlišče w velja $d(u, w) < d(v, w)$ ali $d(v, w) < d(u, w)$ ter ustrezno povečamo ali $|W_{uv}|$ ali $|W_{vu}|$, za kar skupaj zopet porabimo $\mathcal{O}(mn)$ časa.

Ugotovitev, da so DB-grafi natanko sebi-medianski grafi, reda časovne zahtevnosti ugotavljanja razdaljne uravnoreženosti ne zmanjša. Vendar je potrebno za vsako vozlišče sešteti le razdalje do vseh sosedov, ki jih najdemo s pregledom grafa v širino. Časovna zahtevnost razpoznavanja DB-grafov s tem postopkom je prav tako $\mathcal{O}(mn)$ [4, posledica 3.3].

Kot je razvidno s slike 4.6, skoraj vsi grafi z različnimi stopnjami simetrije spadajo med DDR-grafe ter posledično tudi med DB-grafe. Izjema so povezavno tranzitivni grafi, a ravno zaradi te lastnosti obstaja lažji način ugotavljanja njihove razdaljne uravnoreženosti. S pomočjo trditve 45 jo lahko ugotovimo le s pregledom ene povezave oziroma – zaradi trditve 39 – razdalj dveh vozlišč, kar nam da časovno zahtevnost $\mathcal{O}(m)$.

Trditev 45 ([60]). *Naj bo G povezavno tranzitiven graf. Potem je za vsako povezavo $\{u, v\} \in E(G)$ absolutna vrednost razlike $|W_{uv}| - |W_{vu}|$ konstantna.*

V članku, kjer so Jerebic in soavtorji definirali razdaljno uravnoreženost [65], so med drugim izpostavili naslednje vprašanje:

Vprašanje: *Kolikšno je najmanjše število povezav, ki jih je potrebno dodati grafu, da ta postane razdaljno uravnorežen?*

Odločitveni obliki tega vprašanja bomo rekli *problem razdaljne uravnoreženosti (PRU)*.

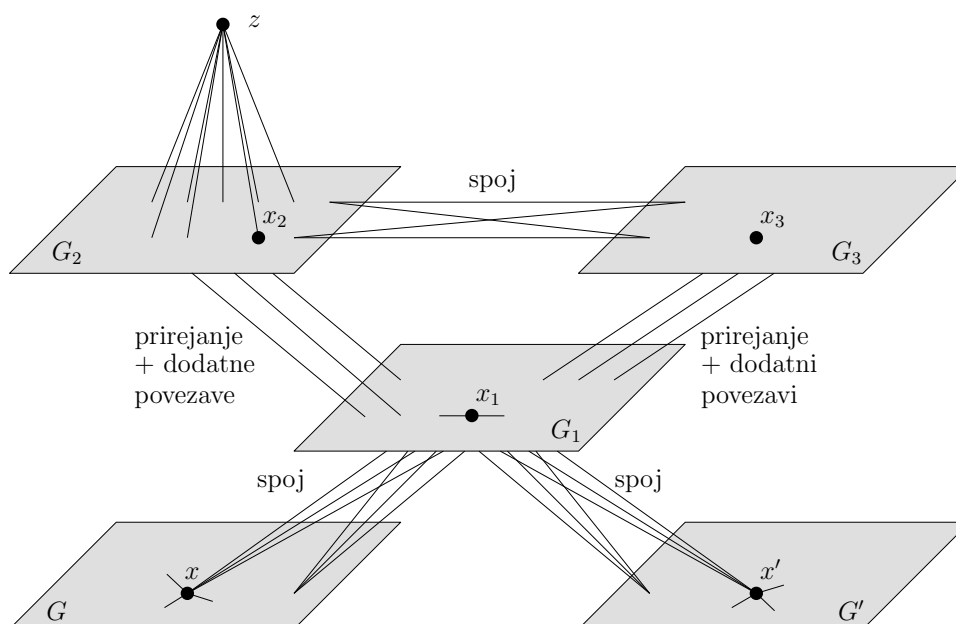
Ker so polni grafi razdaljno uravnoreženi, na zgornje vprašanje vedno obstaja odgovor. Vendar se izkaže, da ga je v splošnem težko najti. Še več, dokazali smo, da je omenjeni problem \mathcal{NP} -poln ter da je polinomski za grafe premera 2. Poleg tega smo na preprostih primerih grafov uporabili nekaj heuristik za dopolnjevanje do DB-grafa ter primerjali njihovo učinkovitost.

\mathcal{NP} -polnost problema PRU smo dokazali tako, da smo nanj prevedli znan \mathcal{NP} -poln problem dominantne množice [38], zato najprej definirajmo slednjega.

Definicija. Imejmo graf G ter naravno število k . *Problem dominantne množice* sprašuje po obstoju podmnožice vozlišč $U \subseteq V(G)$ velikosti manj ali enako k , tako da za vsako vozlišče $v \in V(G) \setminus U$ obstaja vozlišče $u \in U$, ki je njegov sosed v G , tj. $\{u, v\} \in E(G)$.

Izrek 46. *Odločitvena oblika problema iskanja najmanjšega števila povezav, ki jih je potrebno dodati grafu, da ta postane razdaljno uravnorežen, je \mathcal{NP} -poln problem.*

Dokaz. Da se lahko lotimo dokazovanja \mathcal{NP} -polnosti, moramo najprej problem formulirati v odločitveni obliki. Definirajmo spremenljivko k , ki bo predstavljala število dodanih povezav. Problem razdaljne uravnoreženosti sprašuje, če lahko iz danega grafa pridobimo DB-graf z dodatkom največ k povezav. PRU spada v razred \mathcal{NP} , saj lahko za uganjeno rešitev v času $\mathcal{O}(mn)$ [4, posledica 3.3] ugotovimo, ali je graf z dodanimi uganjenimi povezavami razdaljno uravnorežen. \mathcal{NP} -polnost PRU dokažemo s (Karpovo) polinomsko prevedbo problema dominantne množice nanj. Problem dominantne množice spada med \mathcal{NP} -polne probleme [38], vendar smo mi za prevedbo uporabili problem dominantne množice v kubičnih grafih, ki pa je prav tako \mathcal{NP} -poln [70, izrek 10].



Slika 4.15: Podatki za reševanje problema razdaljne uravnoreženosti, ki jih dobimo iz podatkov problema dominantne množice v kubičnih grafih.

Najprej s pomočjo podatkov za problem dominantne množice, tj. kubičnega grafa G in števila k , zgradimo podatke za PRU. Graf H , prikazan na sliki 4.15, ima množico vozlišč sestavljeno iz vozlišč grafov G, G', G_1, G_2, G_3 ter vozlišča z . Denimo, da ima graf G število vozlišč enako n . Graf G' naj bo kopija grafa G , graf G_1 cikel na $2n$ vozliščih, G_2

krožni graf $C_{i_{2n+4-2k}}(1, 2)$, G_3 pa $2k - 1$ regularen graf, ki ga zgradimo kot krožni graf $C_{i_{2n-2}}(1, 2, \dots, k - 1, n - 1)$. Red grafa H je tako enak $8n - 2k + 3$.

Omenjene grafe povežemo med seboj na naslednji način. Vsakega od grafov G in G' spojimo z grafom G_1 . Podobno naredimo spoj grafov G_2 in G_3 ter povežemo vozlišče z z vsemi vozlišči grafa G_2 . Grafa G_1 in G_3 povežemo tako, da najprej naredimo največje prirejanje med njihovimi vozlišči, tj. za $u_i \in V(G_1)$ ter $v_i \in V(G_3)$, kjer je i med 1 in $2n - 2$, dodamo povezavo $\{u_i, v_i\}$. Nato izberemo dve sosednji vozlišči iz G_3 , odstranimo povezavo med njima ter prvega povežemo z $u_{2n-1} \in V(G_1)$, drugega pa z $u_{2n} \in V(G_1)$. S tem ohranimo pri vseh vozliščih grafa G_3 enako stopnjo, poleg tega pa je enaka tudi stopnja vseh vozlišč v grafu G_1 .

Vozlišča grafov G_1 in G_2 povežemo na enak način kot smo to storili v primeru grafov G_1 in G_3 , tj. s pomočjo maksimalnega prirejanja. Nadaljnji korak pa je odvisen od števila k . Če je $2k - 1 \geq 3$, torej če je $k \geq 2$, ima graf G_1 vsaj toliko vozlišč kot graf G_2 . V tem primeru dodatno omejimo tudi velikost števila k , saj želimo, da je red grafa G_2 vsaj n . Torej mora veljati $n \leq 2n + 4 - 2k$, iz česar sledi $k \leq n/2 + 2$. Sedaj vzamemo popolno prirejanje v grafu G_2 , ki ga dobimo kar z izborom vsake druge povezave v zunanjem ciklu grafa, saj je le-ta krožni graf sodega reda. Naj bosta v_1 in v_2 krajišči povezave iz popolnega prirejanja. Ker je bilo v maksimalnem prirejanju med G_1 in G_2 povezanih $2n + 4 - 2k$ vozlišč obeh grafov, jih je v G_1 ostalo še sodo mnogo nesosednjih z vozlišči iz G_2 . Še več, zaradi omejitve za k je število teh vozlišč največ n . Izberimo dve izmed njih, u_1 in u_2 , ter dodajmo v H povezavi $\{u_1, v_1\}$ ter $\{u_2, v_2\}$. Nato v G_2 odstranimo povezavo $\{v_1, v_2\}$. Ker G_2 vsebuje vsaj n vozlišč, lahko ta postopek ponavljamo, dokler obstajajo vozlišča v G_1 , ki niso sosednja z vozlišči iz G_2 . Posledično ohranimo vse stopnje vozlišč v G_2 enake, v G_1 pa z dodajanjem povezav povzročimo, da stopnje vseh vozlišč postanejo enake.

Če je $k = 1$, vsebuje G_2 $2n + 2$ vozlišč, G_1 pa le $2n$. Ko naredimo med njima maksimalno prirejanje, ostaneta dve vozlišči iz G_2 , v_1 in v_2 , nesosednji z vozlišči iz G_1 . V tem primeru izberemo sosednji vozlišči u_1 in u_2 iz G_1 , v H dodamo povezavi $\{u_1, v_1\}$ in $\{u_2, v_2\}$ ter odstranimo povezavo $\{u_1, u_2\}$. Tako pridemo do istega sklepa kot v prejšnjem odstavku.

S tem smo zgradili graf H z $8n - 2k + 3$ vozlišči ter $12n^2 - 6nk + 18n + 2k - 8$ povezavami (oziroma $12n^2 - 12n + 5$, ko je $k = 1$), ki je premera 3. Zaradi opisanega načina izgradnje podgrafov, ki tvorijo H , lahko le-tega zgradimo v polinomskem času glede na dani graf G ter število k . Sedaj dokažimo naslednjo trditev, ki je zadnji korak v dokazu \mathcal{NP} -polnosti.

TRDITEV: Graf H postane razdaljno uravnotežen z dodatkom največ $n + k$ povezav, če in samo če ima kubičen graf G dominantno množico velikosti največ k .

Za začetek poudarimo, da s tem, ko smo pri gradnji grafa H privzeli $k \leq n/2 + 2$, nismo

vplivali na težavnost problema dominantne množice, saj po Reedovem izreku [99] za grafe z minimalno stopnjo 3 velja $k \leq 3n/8$.

Če ima G dominantno množico U velikosti k , potem dodajmo za vsak $u \in U$ ter $u' \in U'$ (iz kopije G') povezavo $\{u, z\}$ oziroma $\{u', z\}$. Grafu H se tako premer zmanjša s 3 na 2. Naj bo $x_i \in V(G_i)$ za $i = 1, 2, 3$. Potem velja $\deg(z) = \deg(x_1) = \deg(x_2) = \deg(x_3) = 2n + 4$. Če je $x \in U$ (oziroma U'), ima prav tako stopnjo enako $2n + 4$. Če pa je $x \in V(G) \setminus U$ (oziroma $V(G') \setminus U'$), pa velja $\deg(x) = 2n + 3$. Slednjih vozlišč je $2(n - k)$, zato jih lahko povežemo s pomočjo prirejanja in pri tem uporabimo $n - k$ povezav. Ker imajo sedaj vsa vozlišča enako stopnjo, je H regularen graf premera 2 in po trditvi 34 razdaljno uravnotežen. Skupaj smo torej dodali $2k + (n - k) = n + k$ povezav.

Dokažimo še obrat trditve. Poglejmo si stopnje in razdalje vozlišč v H . Naj bo $x \in V(G)$, $x' \in V(G')$ ter $x_i \in V(G_i)$ za $i = 1, 2, 3$. Potem velja

$$\begin{aligned}\deg(x_1) &= \deg(x_2) = \deg(x_3) = 2n + 4, \\ \deg(x) &= \deg(x') = 2n + 3, \\ \deg(z) &= 2n - 2k + 4\end{aligned}$$

ter

$$\begin{aligned}d_H(x_1) &= d_H(x_2) = d_H(x_3) = 14n - 4k, \\ d_H(x) &= d_H(x') = 14n - 4k + 2, \\ d_H(z) &= 16n - 2k.\end{aligned}$$

Če bi dodali povezavo $\{x_i, v\}$ za poljubno vozlišče v , ki ni sosed x_i , bi se $d_H(x_i)$ zmanjšal za 1, saj je $d(x_i, v) = 2$. Za doseglo razdaljne uravnoteženosti bi zato morali zmanjšati razdaljo vsem preostalim vozliščem iz $G_1 \cup G_2 \cup G_3$ ter tako dodati vsaj $(2n + 2n - 2 + 2n - 2k + 2)/2 = 3n - k$ povezav, kar pa je več od $n + k$.

Dodamo lahko torej le povezave vozlišča z z grafoma G in G' ter povezave v oziroma med omenjenima grafoma. Ker pri tem razdalje vozlišč v grafih G_i ostanejo enake, je potrebno razdaljo $d_H(z)$ zmanjšati za $2n + 2k$, razdaljo $d_H(x)$ oziroma $d_H(x')$ pa za 2. Če vozlišče z povežemo z ℓ vozlišči iz $V(G) \cup V(G')$, lahko $d_H(z)$ zmanjšamo za največ $2\ell + (2n - \ell)$, kadar so vsa vozlišča na razdalji največ 2 od z . Torej mora biti $\ell \geq 2k$. Če je $\ell > 2k$, potem obstaja po dodanih $n + k = 2k + (n - k)$ povezavah v G ali G' vozlišče x , ki ohrani svojo

stopnjo. Ker x ni sosed z , se mu razdalja $d_H(x)$ zmanjša za največ 1, kar pa je premalo za doseg uravnoveženosti grafa H . Dodati je torej potrebno natanko $2k$ povezav iz z do vozlišč grafov G in G' . Krajiščem teh povezav iz $V(G) \cup V(G')$, ki naj spadajo v množico U , se razdalja zmanjša ravno za 2. Ostalih $2n - 2k$ vozlišč iz $X := (V(G) \cup V(G')) \setminus U$ pa moramo povezati med seboj z največ $n - k$ povezavami. Naj bo $x \in X$. Če x nima soseda iz U , ga moramo povezati z dvema vozliščema iz X , vendar zaradi omejitve števila dodanih povezav vsaj eno vozlišče iz X ohrani stopnjo, kar pomeni, da se mu razdalja ne zmanjša. Zato mora imeti vsak $x \in X$ soseda iz U , kar njegovo razdaljo že zmanjša za 1. Dodatno zmanjšanje za 1 pa omogoči $n - k$ dodanih povezav med pari vozlišč iz X .

Če je H razdaljno uravnovežen, ima tako G dominantno množico, ki jo sestavljajo vozlišča iz $V(G) \cap U$, medtem ko ima G' dominantno množico iz vozlišč $V(G') \cap U$. Velikost vsaj ene od obeh množic je manjša ali enaka k , ker pa je G' kopija grafa G , obstaja v G dominantna množica velikosti kvečjemu k . \square

Posledica 47. *Odločitvena oblika problema iskanja najmanjšega števila povezav, ki jih je potrebno dodati grafu, da ta postane krepko razdaljno uravnovežen (PKRU), tj. DDR-graf, je \mathcal{NP} -poln problem.*

Dokaz. Sledimo dokazu \mathcal{NP} -polnosti problema razdaljne uravnoveženosti iz izreka 46. Problem PKRU je očitno v razredu \mathcal{NP} , saj enakost zaporedij razdaljnih stopenj lahko preverimo v času $\mathcal{O}(mn)$. Dalje, iz trditve 17 in 34 sledi, da je graf s premerom 2 razdaljno uravnovežen natanko tedaj, ko je DDR-graf. Zato lahko zaradi obstoja dominantne množice velikosti k v grafu G (slika 4.15) iz H konstruiramo DDR-graf z dodatkom $n + k$ povezav. V obratu trditve pa namesto razdalj gledamo razdaljne stopnje, ki so

$$\begin{aligned} DDS(H, x_1) &= DDS(H, x_2) = DDS(H, x_3) = (1, 2n + 4, 6n - 2k - 2), \\ DDS(H, x) &= DDS(H, x') = (1, 2n + 3, 6n - 2k - 2, 1), \\ DDS(H, z) &= (1, 2n - 2k + 4, 4n - 2, 2n). \end{aligned}$$

Z $n + k$ povezavami lahko H dopolnimo do DDR-grafa le, če vsa zaporedja razdaljnih stopenj postanejo enaka $(1, 2n + 4, 6n - 2k - 2)$. Zato moramo vozlišče z povezati z $2k$ vozlišči iz $G \cup G'$, ostala vozlišča iz $G \cup G'$ pa moramo povezati med seboj po parih (z $n - k$ povezavami), biti pa morajo tudi na razdalji 2 od z . To pa pomeni, da v G obstaja dominantna množica. Razmislek, da je velika kvečjemu k , je enak kot v dokazu izreka 46. \square

Izrek 48. *Problem iskanja najmanjšega števila povezav, ki jih je potrebno dodati grafu s premerom 2, da ta postane (krepko) razdaljno uravnovežen, ima polinomsko časovno zahtevnost.*

Dokaz. Namesto dodajanja povezav bomo trditev prevedli v problem odzemanja povezav. Naj bo G graf s premerom 2. Če vzamemo njegov komplement \overline{G} , je osnovni problem enakovreden problemu odzemanja čim manjšega števila povezav grafu \overline{G} , da dobimo regularen graf (trditev 34). Po izreku [21, izrek 3.6], ki sledi iz Tuttejevega problema iskanja k -faktorja [116], pa obstaja polinomski algoritem za ugotavljanje obstoja k -regularnega inducirane podgrafa. S tem pa ugotovimo ali lahko graf G dopolnimo do $(|V(G)| - 1 - k)$ -regularnega in tako do (krepko) razdaljno uravnoreženega. \square

Trditev 49. *Problem ugotavljanja, ali lahko graf z največ k dodanimi povezavami dopolnimo do (krepko) razdaljno uravnoreženega, ima za fiksno k polinomsko časovno zahtevnost.*

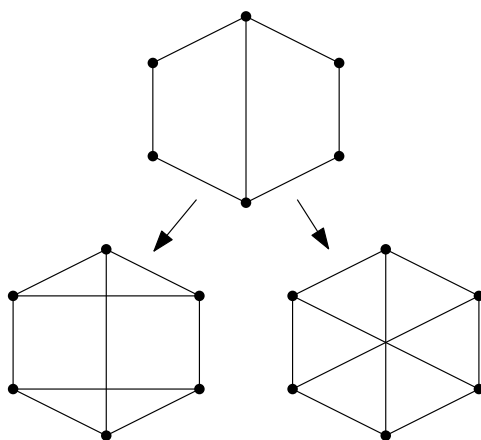
Dokaz. Grafu lahko dodamo povezavo na največ $n(n-1)/2$ načinov. Če pa dodajamo k povezav, lahko to storimo na največ $\binom{n(n-1)/2}{k} = \mathcal{O}(n^{2k})$ načinov. Preverjanje (krepke) razdaljne uravnoreženosti nam po [4, posledica 3.3] vzame $\mathcal{O}(mn)$ časa, zato je skupna časovna zahtevnost enaka $\mathcal{O}(mn^{2k+1})$. Torej je za fiksno k polinomska. \square

Ker je problem razdaljne uravnoreženosti \mathcal{NP} -poln, imajo trenutno obstoječi algoritmi, ki ga rešijo, eksponentno časovno zahtevnost, kar je posledica pregleda vseh možnosti za dodajanje povezav. Naj bo G graf reda n z m povezavami. Ker je za dodajanje i povezav $\binom{n(n-1)/2-m}{i}$ možnosti, je v skupnem $2^{n(n-1)/2-m}$ možnosti, kar da časovno zahtevnost $\mathcal{O}(mn \cdot 2^{n(n-1)/2-m})$. Zato lahko rešitev, ki ni nujno optimalna, hitreje pridobimo le s pomočjo heuristik. Tiste, ki smo jih uporabili, temeljijo na logičnih predpostavkah in večinoma uporabljajo požrešno metodo. Poglejmo si jih.

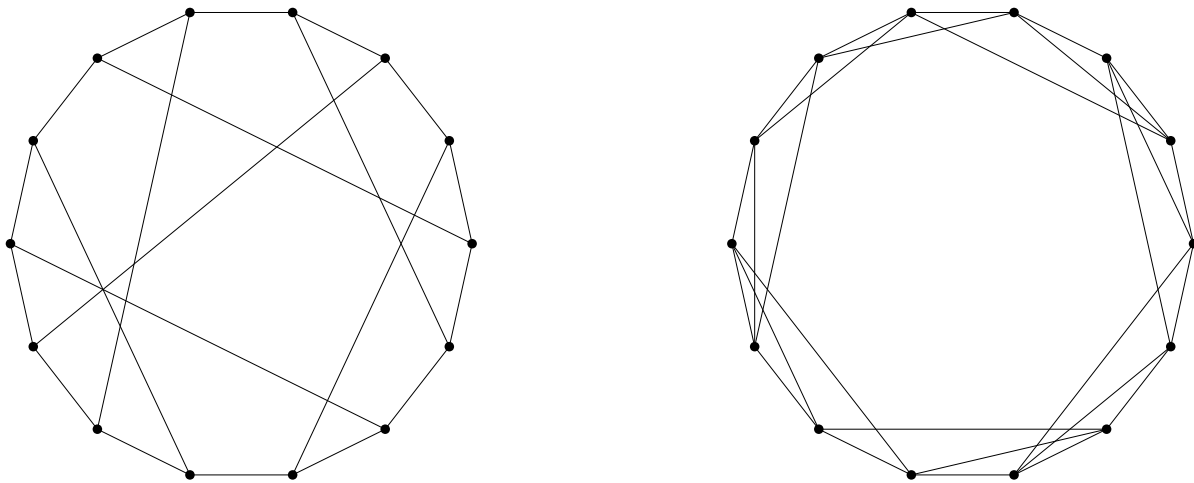
- a) Ker je cilj izenačiti vse razdalje, je ideja vzeti nesosednja vozlišča z maksimalnimi razdaljami in jih povezati med seboj. V najbolj preprosti različici smo izbrali kar prvi dve vozlišči po vrsti z največjo razdaljo (algoritem MAX-MAX), nato pa vzeli tudi vse pare takšnih vozlišč in postopek ugotavljanja vodili vzporedno (algoritem MAX-VSE). Algoritem MAX-MAX je dokaj hiter, saj se izvede največ $\mathcal{O}(n^2)$ dodajanj, kar pomeni, da je skupna časovna zahtevnost $\mathcal{O}(n^3m)$. Drugi algoritem pa ima zahtevnost odvisno od števila parov z maksimalno razdaljo, katerih število narašča, ko se bližamo rešitvi.
- b) Z uporabo požrešne metode smo minimizirali razliko med maksimalno in minimalno razdaljo (algoritem MAX-MIN), minimizirali varianco zaporedja razdalj grafa (algoritem VAR) ter dodajali povezave, ki najmanj zmanjšajo minimalno razdaljo vozlišč v grafu (algoritem MIN-MAX). Ideja tu je bila čim bolj približati razdalje vozlišč. Ti algoritmi v najbolj osnovni obliki, tj. ko izmed enako dobrih možnosti izberemo kar prvo po vrsti,

potrebujejo $\mathcal{O}(n^2)$ časa za izbor povezave za dodajanje, zato je skupna časovna zahtevnost $\mathcal{O}(n^5m)$.

Seveda to niso vse možne heuristike, vendar predstavljajo osnovne pristope, ki so nam pomagali prikazati zahtevnost problema PRU. Najprej opozorimo, da rešitev ni nujno enolična, torej lahko z enako dodanimi povezavami dobimo neizomorfne razdaljno uravnotežene grafe, kot je razvidno s slike 4.16. Prav tako ni nujno, da iz danega grafa z manj dodanimi povezavami dobimo DB-graf, v katerem imajo vozlišča večjo razdaljo kot v DB-grafu, ki ga dobimo z dodatkom več povezav; glej sliko 4.17. To nam preprečuje, da bi imeli minimalno razdaljo vozlišča v grafu za spodnjo mejo pri reševanju problema.



Slika 4.16: Graf C_6 z dodano povezavo, ki je prikazana na sliki zgoraj, lahko z dvema povezavama na dva načina dopolnimo do DB-grafa.



Slika 4.17: Na 14 vozliščih lahko konstruiramo kubičen DB-graf z razdaljami vozlišč enakimi 27 (levo) ali pa 4-regularen DB-graf, kjer imajo razdalje vozlišč vrednost 28 (desno).

Poglejmo si, kakšne rezultate so vrnilo uporabljene heuristike na izbrani družini grafov.

red grafa	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
MAX-MAX	4	2	13	3	8	19	21	9	64	34	29
MAX-VSE	4	2	6	3	8	9	9	5	10	13	14
MAX-MIN	4	8	6	19	26	34	10	5	64	76	14
VAR	4	5	6	11	8	34	43	29	64	41	89
MIN-MAX	4	8	13	19	26	34	43	53	64	76	89
OPT.	4	2	6	3	5	9	9	5	10	7	9

Tabela 4.3: Seznam, ki prikazuje število povezav, ki jih je potrebno dodati ciklu C_n z dodano povezavo $\{v_1, v_3\}$, da postane DB-graf, v odvisnosti od izbranega algoritma.

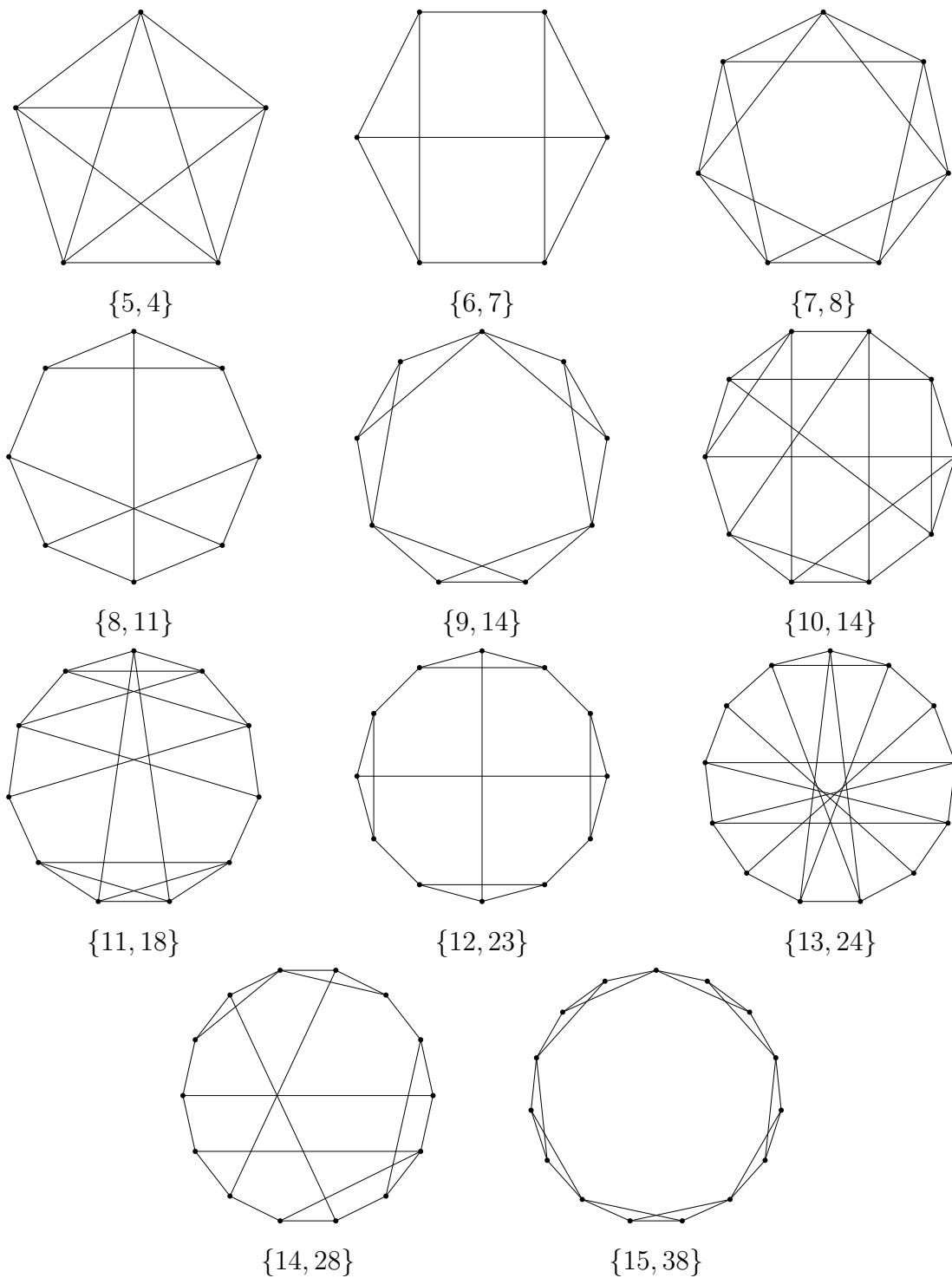
Izbrali smo si družino ciklov C_n z dodano povezavo med vozliščema v_1 in v_3 , ki jih bomo označili s C_n^+ . Vzrok za izbiro je v razdaljni uravnoreženosti ciklov ter v njihovi preprosti zgradbi. Zanimalo nas je, koliko povezav je potrebno, da ponovno vzpostavimo razdaljno uravnoreženost, ki jo izgubimo z dodatkom povezave $\{v_1, v_3\}$.

Iz tabele 4.3 je razvidno, da se algoritem MAX-MAX odreže najboljše od vseh in vrne v večini primerov celo optimalne rešitve. Izjema so C_n^+ za $n = 9, 14, 15$. Spomnimo, da rešitvi redov 9 in 15 spadata med tako imenovane grafe Sabidussija; glej sliko 4.8. Seznam je narejen le do grafa reda 15, saj postaja iskanje rešitve z algoritmom MAX-MAX, še bolj pa iskanje optimalne rešitve, časovno prezahtevno (pregledati moramo več kot 100 milijonov možnosti). Pri iskanju optimalne rešitve smo si pri grafih višjega reda pomagali s pregledom vseh 2-povezanih grafov ožine 3 in stopnje večje od 2 (glej trditev 37), generiranih s programom *nauty* [81]. Omenjena pogoja sta nujna za razdaljno uravnoreženost grafov, ki jih dobimo iz C_n^+ , prav tako pa je potreben obstoj Hamiltonovega cikla. Slednjega nam ni bilo potrebno velikokrat preverjati, saj je bilo med generiranimi grafi le malo DB-grafov.

Slika 4.18 kaže optimalne DB-grafe, ki jih dobimo iz grafov C_n^+ . Kot je razvidno, med njimi ne obstajajo simetrije, ki bi omogočale napovedovanje rešitev za grafe višjega reda. Že na razmeroma preprostih primerih tako dobimo občutek o težavnosti problema dopolnitve do razdaljne regularnosti, kar nas je motiviralo k dokazu \mathcal{NP} -polnosti problema PRU.

4.4.3 Primeri razdaljno uravnoreženih grafov

Kot smo že omenili, so najbolj preprost zgled DB-grafov cikli in polni grafi, a mednje spadajo tudi krožni grafi, vozliščno tranzitivni grafi ter tudi nekateri posplošeni Petersenovi grafi, ki



Slika 4.18: Primeri minimalne dopolnitve grafov C_n^+ do DB-grafov za $n = 5, 6, \dots, 15$. Pod vsakim grafom je podan seznam, ki vsebuje red grafa ter razdaljo vozlišč v njem.

hkrati niso vozliščno tranzitivni. Kutnar in soavtorji [71] so si zato pogledali razdaljno uravnoreženost v semisimetričnih grafih, ki so po simetriji blizu vozliščno tranzitivnim. Dokazali so obstoj neskončne družine semisimetričnih grafov – posplošenih Folkmanovih grafov [71, trditev 4.2], ki niso razdaljno uravnoreženi, s pomočjo lastnosti izbrisanega leksikografskega produkta [71, izrek 3.1] pa tudi obstoj neskončne družine (krepko) razdaljno uravnoreženih grafov. Izkazalo se je, da so vsi najdeni semisimetrični DB-grafi tudi DDR-grafi, zato je bilo v [71] podano naslednje vprašanje.

Vprašanje: *Ali je res, da je razdaljno uravnorežen semisimetričen graf tudi krepko razdaljno uravnorežen, tj. DDR-graf?*

Odgovor na to vprašanje je negativen. V zbirki povezavno tranzitivnih grafov stopnje štiri [123] namreč obstaja semisimetričen graf reda 150, premera 8, ožine 4 ter s 300 povezavami, ki nosi oznako $C4[150, 9]$ in ima zaporedje razdaljnih stopenj enako $\{(1, 4, 10, 20, 30, 40, 34, 11)^{75}, (1, 4, 10, 20, 32, 40, 30, 11, 2)^{75}\}$, zato ne spada med DDR-grafe. Hkrati pa ima vsako njegovo vozlišče razdaljo 685, torej je razdaljno uravnorežen.

V članku [71] so preučevali tudi razdaljno uravnoreženost posplošenih Petersenovih grafov. Trdili so, da do reda 120 obstajajo le trije ($GP(24, 4)$, $GP(35, 8)$ in $GP(35, 13)$), ki so razdaljno uravnoreženi, a ne spadajo med DDR-grafe. Izkaže se, da to ne drži, saj imajo to lastnost tudi $GP(40, 12)$, $GP(44, 16)$, $GP(48, 6)$, $GP(54, 10)$ ter $GP(60, 18)$. Še več, obstaja neskončna družina takšnih grafov.

Izrek 50. *Družina posplošenih Petersenovih grafov $GP((2k - 1)(k + 1), 2k)$, kjer je $k \geq 4$, spada med razdaljno uravnorežene grafe, ki hkrati niso DDR-grafi.*

V dokazu izreka 50 potrebujemo nekaj pomožnih trditev, ki veljajo za posplošene Peterse-nove grafe $GP((2k - 1)(k + 1), 2k)$. Spomnimo, da je u_0 vozlišče na zunanem ciklu, v_0 pa vozlišče v notranjosti grafa.

Lema 51. *Naj bo $k \geq 4$ naravno število ter $u_0 \in V(GP((2k - 1)(k + 1), 2k))$. Potem za razdaljno particijo $P(GP((2k - 1)(k + 1), 2k), \{u_0\})$ velja naslednje:*

1. $V_1 = \{u_{\pm 1}, v_0\}$,
 $V_2 = \{u_{\pm 2}, v_{\pm 1}, v_{\pm 2k}\}$,
2. $V_i = \{u_{\pm i}, v_{\pm(i-1)}, v_{\pm 2(i-1)k}, u_{\pm 2jk \pm (i-j-2)}, v_{\pm 2jk \pm (i-j-1)} \mid 1 \leq j \leq i - 2\}$
za $3 \leq i \leq k$,
3. $V_{k+1} = \{u_{\pm(k+1)}, v_{\pm k}, u_{\pm 2jk \pm (k-j-1)}, v_{\pm((2j-1)k+j)} \mid 1 \leq j \leq k - 1\}$,

4. $V_{k+2} = \{u_{\pm((2j-1)k+j)}, v_{(2j-1)k+j-1} \mid 2 \leq j \leq k-1\}$,
 5. $V_{k+3} = \{u_{(2j-1)k+j-1}, \mid 2 \leq j \leq k-1\}$ ter
 $V_i = 0$ za $i > k+3$.

Dokaz. Pravilnost 1. točke je razvidna iz pregleda sosedov vozlišča u_0 na razdalji ena in dva. Točko 2 bomo dokazali s pomočjo indukcije. Podobno kot v točki 1 s pregledom sosedov preverimo veljavnost za primera $i \in \{3, 4\}$, pri čemer upoštevamo, da je $k \geq 4$. Privzemimo sedaj, da formula iz točke 2 drži za $i-1$ in i ($i < k$), tj. da velja

$$V_{i-1} = \{u_{\pm(i-1)}, v_{\pm(i-2)}, v_{\pm 2(i-2)k}, u_{\pm 2jk \pm (i-j-3)}, v_{\pm 2jk \pm (i-j-2)} \mid 1 \leq j \leq i-3\},$$

$$V_i = \{u_{\pm i}, v_{\pm(i-1)}, v_{\pm 2(i-1)k}, u_{\pm 2jk \pm (i-j-2)}, v_{\pm 2jk \pm (i-j-1)} \mid 1 \leq j \leq i-2\}.$$

Množica V_{i+1} sestoji iz sosedov vozlišč V_i , ki hkrati niso v V_{i-1} . Ker so posplošeni Petersenovi grafi 3-regularni, dobimo teoretično za vsako vozlišče dva nova soseda, vendar so nekateri ž elementi V_{i-1} ali pa so podvojeni. Tako preostanejo le:

$$V_i \rightarrow V_{i+1}$$

$$u_{\pm i} \rightarrow u_{\pm(i+1)}, v_{\pm i},$$

$$v_{\pm(i-1)} \rightarrow v_{\pm 2k \pm (i-1)},$$

$$v_{\pm 2(i-1)k} \rightarrow u_{\pm 2(i-1)k}, v_{\pm 2ik},$$

$$u_{\pm 2jk \pm (i-j-2)} \rightarrow u_{\pm 2jk \pm (i-j-1)} \text{ za } 1 \leq j \leq i-2,$$

$$v_{\pm 2jk \pm (i-j-1)} \rightarrow v_{\pm 2jk \pm (i-j)} \text{ za } 2 \leq j \leq i-1.$$

Vozlišči $u_{\pm 2(i-1)k}$ lahko dodamo k vozliščem $u_{\pm 2jk \pm (i-j-1)}$, vozlišča $v_{\pm 2k \pm (i-1)}$ pa k $v_{\pm 2jk \pm (i-j)}$ in tako indeks j omejimo med $1 \leq j \leq i-1$. Dobljena vozlišča lahko zapišemo v obliki

$$\{u_{\pm(i+1)}, v_{\pm i}, v_{\pm 2ik}, u_{\pm 2jk \pm (i-j-1)}, v_{\pm 2jk \pm (i-j)} \mid 1 \leq j \leq i-1\},$$

kar pa je enako množici iz točke 2 za vozlišča, ki so od u_0 oddaljena za $i+1$.

Za dokaz 3. točke uporabimo točko 2, da pridobimo vozlišča grafa, ki so na razdalji $k-1$ in k od u_0 :

$$V_{k-1} = \{u_{\pm(k-1)}, v_{\pm(k-2)}, v_{\pm 2(k-2)k}, u_{\pm 2jk \pm (k-j-3)}, v_{\pm 2jk \pm (k-j-2)} \mid 1 \leq j \leq k-3\},$$

$$V_k = \{u_{\pm k}, v_{\pm(k-1)}, v_{\pm 2(k-1)k}, u_{\pm 2jk \pm (k-j-2)}, v_{\pm 2jk \pm (k-j-1)} \mid 1 \leq j \leq k-2\}.$$

Če pogledamo sosede vozlišč iz V_k , dobimo po formuli iz točke 2 množico

$$\{u_{\pm(k+1)}, v_{\pm k}, v_{\pm 2k^2}, u_{\pm 2jk \pm (k-j-1)}, v_{\pm 2jk \pm (k-j)} \mid 1 \leq j \leq k-1\},$$

vendar nekatera vozlišča spadajo že v V_{k-1} ali V_k . Najdemo jih tako, da gledamo njihove indekse po modulu $(2k-1)(k+1) = 2k^2 + k - 1$. Tako dobimo, da je $v_{\pm 2k^2} = v_{\mp(k-1)} \in V_k$. Pogledjmo si še vozlišča $v_{\pm(2jk+(k-j))}$. Naj bo indeks $j := j_{k+1} = k - j_k$, kjer je j_k indeks, po katerem tečemo po vozliščih $v_{\mp(2jk+(k-j-1))} \in V_k$. Potem velja $v_{\pm(2j_{k+1}k+(k-j_{k+1}))} = v_{\mp(2j_k k+(k-j_k-1))} \in V_k$, saj je

$$\begin{aligned} 2j_{k+1}k + (k - j_{k+1}) + 2j_k k + (k - j_k - 1) &= \\ 2(k - j_k)k + (k - (k - j_k)) + 2j_k k + (k - j_k - 1) &= \\ 2k^2 + k - 1. \end{aligned}$$

Ker je $1 \leq j_k \leq k - 2$, si moramo primer $j_{k+1} = 1$ pogledati posebej: $v_{\pm(2k+(k-1))} = v_{\pm(3k-1)} = v_{\mp(2k^2-2k)}$. V množici V_{k+1} ostanejo vozlišča $v_{\pm(2jk-(k-j))} = v_{\pm(2j-1)k+j}$, kar nam da formulo iz točke 3.

Potencialne kandidate za elemente množice V_{k+2} dobimo kot sosede elementov iz točke 3, tj.

$$\{u_{\pm(k+2)}, v_{\pm(k+1)}, v_{\pm 3k}, u_{\pm 2k \pm (k-1)}, u_{\pm 2jk \pm (k-j)}, v_{\pm((2j-1)k+j-1)}, v_{\pm(2k^2-1)} \mid 2 \leq j \leq k-1\},$$

Ugotovimo, da sta $u_{\pm(k+2)}$ in $v_{\pm(k+1)}$ že elementa V_{k+1} . Dalje, enako kot v prejšnjem koraku s pomočjo definicije $j_{k+2} = k - j_{k+1}$ dobimo, da so $u_{\pm(2jk+(k-j))}$ (ter $u_{\pm(2k+(k-1))}$) elementi V_{k+1} . V tej množici so tudi $u_{\pm(2k-(k-1))} = u_{\pm(k+1)}$, $v_{\pm 3k} = v_{\mp(2k^2-2k-1)}$ ter $v_{\pm(2k^2-1)} = v_{\mp k}$. Primerjajmo še vozlišča $v_{(2j-1)k+j-1}$ z vozlišči $v_{-(2j'-1)k+j'-1}$ za $j' = k + 1 - j$. Ker velja

$$\begin{aligned} (2j-1)k + j - 1 + (2j'-1)k + j' - 1 &= \\ (2j-1)k + j - 1 + (2(k+1-j) - 1)k + (k+1-j) - 1 &= \\ 2k^2 + k - 1, \end{aligned}$$

so omenjena vozlišča enaka. Sledi veljavnost točke 4.

Kandidati za elemente množice V_{k+3} so

$$\{u_{\pm((2j-1)k+j-1)}, \mid 2 \leq j \leq k-1\} \cup \{v_{(2j-1)k+j-2}, \mid 3 \leq j \leq k\}.$$

Kot zgoraj, lahko s primerjavo vozlišč $u_{(2j-1)k+j-1}$ z vozlišči $u_{-(2j'-1)k+j'-1}$, kjer je $j' = k + 1 - j$, ugotovimo medsebojne enakosti. Vozlišča $v_{(2j-1)k+j-2}$ pa primerjajmo z vozlišči $v_{-(2j-1)k+j} \in V_{k+1}$, kjer je $j := j_{k+3} = k + 1 - j_{k+1}$:

$$\begin{aligned} (2j_{k+3} - 1)k + j_{k+3} - 2 + (2j_{k+1} - 1)k + j_{k+1} &= \\ (2(k+1-j_{k+1}) - 1)k + k + 1 - j_{k+1} - 2 + (2j_{k+1} - 1)k + j_{k+1} &= \\ 2k^2 + k - 1. \end{aligned}$$

Torej so vsa že elementi V_{k+1} . Ostanejo tako le vozlišča $u_{(2j-1)k+j-1}$ za $2 \leq j \leq k-1$, kar trdi prvi del točke 5. Iz njih dobimo kandidate za elemente V_{k+4} , tj. $u_{(2j-1)k+j-2}$, za katere pa lahko po pravkar opisanem postopku ugotovimo, da spadajo v V_{k+2} . Preverimo lahko tudi, da je

$$\sum_{i=0}^{k+3} |V_i| = 2(2k-1)(k+1),$$

kar je ravno enako številu vseh vozlišč grafa. \square

Lema 52. Naj bo $k \geq 4$ naravno število ter $v_0 \in V(GP((2k-1)(k+1), 2k))$. Potem za razdaljno particijo $P(GP((2k-1)(k+1), 2k), \{v_0\})$ velja naslednje:

1. $V_1 = \{v_{\pm 2k}, u_0\}$,
2. $V_2 = \{v_{\pm 4k}, u_{\pm 1}, u_{\pm 2k}\}$,
3. $V_i = \{u_{\pm 2(i-1)k}, u_{\pm 2(i-2)k \pm 1}, v_{\pm 2ik}, u_{\pm 2jk \pm (i-j-1)}, v_{\pm 2jk \pm (i-j-2)} \mid 0 \leq j \leq i-3\}$
za $3 \leq i \leq k$,
4. $V_{k+1} = \{u_{\pm 2(k-1)k-1}, v_{\pm 2(k+1)k}, u_{\pm k}, u_{\pm((2j-1)k+j)}, v_{\pm 2jk \pm (k-j-1)} \mid 1 \leq j \leq k-2\}$,
5. $V_{k+2} = \{v_{\pm 2(k+2)k}, v_{\pm k}, u_{(2j-1)k+j-1}, v_{\pm((2j-1)k+j)} \mid 2 \leq j \leq k-1\}$,
6. $V_{k+3} = \{v_{(2j-1)k+j-1}, \mid 3 \leq j \leq k-2\}$ ter
 $V_i = 0$ za $i > k+3$.

Dokaz. Dokaz bo potekal na podoben način kot dokaz leme 51. Pravilnost 1. točke je razvidna iz pregleda sosedov vozlišča v_0 na razdalji ena in dva. Točko 2 bomo dokazali s pomočjo indukcije. Podobno kot v točki 1 s pregledom sosedov preverimo veljavnost za $i \in \{3, 4\}$, pri čemer upoštevamo, da je $k \geq 4$. Privzemimo sedaj, da formula iz točke 2 drži za $i-1$ in i ($i < k$), tj. da velja

$$V_{i-1} = \{u_{\pm 2(i-2)k}, u_{\pm 2(i-3)k \pm 1}, v_{\pm 2(i-1)k}, u_{\pm 2jk \pm (i-j-2)}, v_{\pm 2jk \pm (i-j-3)} \mid 0 \leq j \leq i-4\},$$

$$V_i = \{u_{\pm 2(i-1)k}, u_{\pm 2(i-2)k \pm 1}, v_{\pm 2ik}, u_{\pm 2jk \pm (i-j-1)}, v_{\pm 2jk \pm (i-j-2)} \mid 0 \leq j \leq i-3\}.$$

Množica V_{i+1} sestoji iz sosedov vozlišč V_i , ki hkrati niso v V_{i-1} . Po pregledu vseh možnosti dobimo:

$$V_i \rightarrow V_{i+1}$$

$$u_{\pm 2(i-1)k} \rightarrow u_{\pm 2(i-1)k \pm 1},$$

$$u_{\pm 2(i-2)k \pm 1} \rightarrow u_{\pm 2(i-2)k \pm 2},$$

$$v_{\pm 2ik} \rightarrow u_{\pm 2ik}, v_{\pm 2(i+1)k},$$

$$u_{\pm 2jk \pm (i-j-1)} \rightarrow u_{\pm 2jk \pm (i-j)}, v_{\pm(i-1)} \text{ za } 0 \leq j \leq i-3,$$

$$v_{\pm 2jk \pm (i-j-2)} \rightarrow v_{\pm 2jk \pm (i-j-1)} \text{ za } 1 \leq j \leq i-2.$$

Vozlišča $u_{\pm 2(i-2)k \pm 2}$ lahko dodamo k vozliščem $u_{\pm 2jk \pm (i-j)}$, vozlišči $v_{\pm(i-1)}$ pa k $v_{\pm 2jk \pm (i-j-1)}$ in s tem indeks j omejimo med $0 \leq j \leq i-2$. Dobljena vozlišča lahko zapišemo v obliki

$$\{u_{\pm 2ik}, u_{\pm 2(i-1)k \pm 1}, v_{\pm 2(i+1)k}, u_{\pm 2jk \pm (i-j)}, v_{\pm 2jk \pm (i-j-1)} \mid 0 \leq j \leq i-2\},$$

kar pa je enako množici v točki 2 za vozlišča, ki so od v_0 oddaljena za $i+1$.

Za dokaz 3. točke uporabimo točko 2, da pridobimo vozlišča grafa, ki so na razdalji $k-1$ in k od v_0 .

$$V_{k-1} = \{u_{\pm 2(k-2)k}, u_{\pm 2(k-3)k \pm 1}, v_{\pm 2(k-1)k}, u_{\pm 2jk \pm (k-j-2)}, v_{\pm 2jk \pm (k-j-3)} \mid 0 \leq j \leq k-4\},$$

$$V_k = \{u_{\pm 2(k-1)k}, u_{\pm 2(k-2)k \pm 1}, v_{\pm 2k^2}, u_{\pm 2jk \pm (k-j-1)}, v_{\pm 2jk \pm (k-j-2)} \mid 0 \leq j \leq k-3\}.$$

Če pogledamo sosede vozlišč iz V_k , dobimo po formuli iz točke 2 množico

$$\{u_{\pm 2k^2}, u_{\pm 2(k-1)k \pm 1}, v_{\pm 2(k+1)k}, u_{\pm 2jk \pm (k-j)}, v_{\pm 2jk \pm (k-j-1)} \mid 0 \leq j \leq k-2\},$$

vendar nekatera vozlišča spadajo že v V_{k-1} ali V_k . Najdemo jih tako, da gledamo njihove indekse po modulu $(2k-1)(k+1) = 2k^2 + k - 1$. Tako dobimo, da je $u_{\pm 2k^2} = u_{\mp(k-1)} \in V_k$. Dalje velja $u_{\pm 2(k-1)k \pm 1} = u_{\mp(3k-2)} \in V_k$ ter $v_{\pm(k-1)} = v_{\mp k^2} \in V_k$. Za vozlišča $u_{\pm 2jk \pm (k-j)}$ na enak način kot v lemi 51 pokažemo, da so v V_k za $j \geq 3$. Za $j = 1$ sledi $u_{\pm(3k-1)} = u_{\mp(2k^2-2k)} \in V_k$, za $j = 2$ pa $u_{\pm(5k-2)} = u_{\mp(2k^2-4k+1)} \in V_k$. Preostanejo nam torej vozlišča $u_{\pm(2jk-(k-j))} = u_{\pm((2j-1)k+j)}$ ter $u_{\pm k}$, kar nam da formulo iz točke 3.

Kandidate za elemente množice V_{k+2} dobimo kot sosede elementov iz točke 3, tj.

$$\{u_{\pm 2(k+1)k}, v_{\pm 2(k+2)k}, v_{\pm k}, u_{\pm((2j-1)k+j-1)}, v_{\pm 2jk \pm (k-j)} \mid 1 \leq j \leq k-1\},$$

Ugotovimo, da je $u_{\pm 2(k+1)k} = u_{\pm(k+1)} \in V_{k+1}$ ter da v primeru $j = 1$ velja $u_{\pm k} \in V_{k+1}$ in $v_{\pm(k+1)} = v_{\pm 2(k+1)k} \in V_{k+1}$. Kot v lemi 51, so v množici V_{k+2} le vozlišča $u_{(2j-1)k+j-1}$ ter vozlišča $v_{\pm((2j-1)k+j)}$ za $2 \leq j \leq k-2$, s čimer smo pokazali točko 4.

Kandidati za elemente množice V_{k+3} so

$$\{u_{\pm 2(k+2)k}, v_{\pm 2(k+3)k}, v_{\pm 3k}, u_{(2j-1)k+j-2} \mid 2 \leq j \leq k-1\} \cup \{v_{\pm((2j-1)k+j-1)}, \mid 3 \leq j \leq k\}.$$

Velja $u_{\pm 2(k+2)k} = u_{\pm(3k+1)}$, $v_{\pm 2(k+3)k} = v_{\mp(2k^2-4k-2)}$ ter $v_{\pm 3k} = v_{\mp(2k^2-2k-1)}$, zato so omenjena vozlišča v V_{k+2} . Vozlišča $u_{(2j-1)k+j-2}$ spadajo že v množico V_{k+1} ; glej lemo 51. Poglejmo še vozlišča $v_{\pm((2j-1)k+j-1)}$. Za $3 \leq j \leq k-2$ so si pozitivno in negativno predznačena med seboj enaka (glej lemo 51), zato preostanejo le vozlišča $v_{(2j-1)k+j-1}$. Za $j = k-1$ dobimo $v_{\pm(2k^2-2k-2)} = v_{\mp 2(k+2)k} \in V_{k+2}$, za $j = k$ pa $v_{\pm(2k^2-1)} = v_{\mp k} \in V_{k+2}$. S tem je prvi del točke 5 dokazan.

Za kandidate elementov V_{k+4} , tj. $v_{(2j-1)k+j-2}$, lahko na enak način kot v lemi 51 pokažemo, da spadajo v V_{k+2} . Preverimo lahko tudi, da je

$$\sum_{i=0}^{k+3} |V_i| = 2(2k-1)(k+1),$$

kar je ravno enako številu vseh vozlišč grafa. \square

S pomočjo lem 51 ter 52 lahko preštejemo število vozlišč na določeni razdalji od u_0 oziroma v_0 .

Posledica 53. Naj bo $k \geq 4$ naravno število ter $u_0, v_0 \in V(GP((2k-1)(k+1), 2k))$. Označimo graf $GP((2k-1)(k+1), 2k)$ z GP . Potem velja naslednje:

1. $d_1(GP, u_0) = d_1(GP, v_0) = 3$,
 $d_2(GP, u_0) = d_2(GP, v_0) = 6$,
2. $d_i(GP, u_0) = d_i(GP, v_0) = 8i - 12$ za $3 \leq i \leq k$,
3. $d_{k+1}(GP, u_0) = 6k - 4$, $d_{k+1}(GP, v_0) = 6k - 6$,
4. $d_{k+2}(GP, u_0) = 3k - 6$, $d_{k+2}(GP, v_0) = 3k - 2$,
5. $d_{k+3}(GP, u_0) = k - 2$, $d_{k+3}(GP, v_0) = k - 4$ ter
 $d_i(GP, u_0) = d_i(GP, v_0) = 0$ za $i > k + 3$.

Sedaj se vrnimo k dokazu izreka 50.

Dokaz. (izreka 50) Izhajajoč iz lastnosti posplošenih Petersenovih grafov $GP(n, k)$ vemo, da za vsak graf obstajajo avtomorfizmi, ki preslikajo poljubno vozlišče u_i v vozlišče u_0 ter vozlišče v_i v v_0 . To pomeni, da imajo vsa vozlišča u_i (ter analogno v_i) enako zaporedje razdaljnih stopenj in posledično razdaljo. Zadošča torej, da se osredotočimo na predstavnika u_0 in v_0 . Iz posledice 53 sledi, da imata ti dve vozlišči v grafu $GP := GP((2k-1)(k+1), 2k)$ različni zaporedji razdaljnih stopenj, torej GP ne spada med DDR-grafe za poljuben $k \geq 4$. Poglejmo si še razdalji vozlišč:

$$d_{GP}(u_0) = 3 + 2 \cdot 6 + \sum_{i=3}^k i(8i - 12) + (k+1)(6k-4) + (k+2)(3k-6) + (k+3)(k-2),$$

$$d_{GP}(v_0) = 3 + 2 \cdot 6 + \sum_{i=3}^k i(8i - 12) + (k+1)(6k-6) + (k+2)(3k-2) + (k+3)(k-4).$$

Ker se vsoti razlikujeta samo v zadnjih treh sumandih, si oglejmo le-te. Njihova vsota je pri obeh vozliščih enaka $10k^2 + 3k - 22$, zato je GP razdaljno uravnotežen za vsak $k \geq 4$. \square

Opomba. Omenimo, da smo poleg družine $GP((2k - 1)(k + 1), 2k)$ našli še druge, ki zadoščajo pogojem izreka 50, vendar tega še nismo formalno dokazali.

Seveda spadajo nekateri posplošeni Petersenovi grafi tudi med DDR-grafe, npr. tisti med njimi, ki so vozliščno tranzitivni. Kutnar in soavtorji [71] so pokazali, da ima to lastnost še nekaj družin posplošenih Petersenovih grafov.

Izrek 54 ([71]). Naj bo k naravno število. Potem velja naslednje:

1. Če $k \not\equiv 0 \pmod{3}$ ter $k \neq 2$, potem je $GP(3k + 3, k)$ DDR-graf.
2. Če $k \not\equiv 0 \pmod{3}$ ter $k \neq 4$, potem je $GP(3k - 3, k)$ DDR-graf.
3. Če je k liho število, potem je $GP(2k + 2, k)$ DDR-graf.

V prvotnem članku o razdaljno uravnoteženih grafih [65] sta bili postavljeni tudi dve domnevi.

Domneva 3. Za vsak $k \geq 2$ obstaja tako število n_0 , da $GP(n, k)$ ni DB-graf za noben $n \geq n_0$.

Domneva 4. Za skoraj vsak n obstajajo razdaljno uravnoteženi posplošeni Petersenovi grafi $GP(n, k)$, kjer je $k \geq 2$.

Domneva 3 je bila potrjena za $n_0 = 6k^2$ [126], medtem ko domneva 4 še vedno ostaja odprta.

4.5 Razdaljni ostanek grafa

Naj bo $P(G, V_0) = \{V_0, V_1, \dots, V_m\}$ razdaljna particija grafa G s korenom V_0 . V nadaljevanju si podrobneje pogledjmo inducirane podgrafe $G[V_i]$, še posebej $Res(G, R) := G[V_m]$, ki mu pravimo *razdaljni ostanek*⁵ grafa G glede na koren $R := G[V_0]$.

Če koren sestoji iz enega samega vozlišča v , se razdaljni ostanek $Res(G, G[\{v\}])$ imenuje *vozliščni razdaljni ostanek*⁶ (VRO), če pa koren R vsebuje par sosednjih vozlišč, se $Res(G, R)$ imenuje *povezavni razdaljni ostanek*⁷ (PRO). Ta dva primera korenov smo izpostavili, saj sta najbolj zanimiva za preučevanje. Še posebej prvi, saj je vozliščni razdaljni ostanek grafa G

⁵angl. distance-residual subgraph

⁶angl. vertex-residual subgraph

⁷angl. edge-residual subgraph

glede na vozlišče v inducirani podgraf na vozliščih, katerih število predstavlja zadnji (neničeln) element zaporedja razdaljnih stopenj $DDS(G, v)$.

Zaradi operacij na induciranih grafih smo v tem razdelku večkrat uporabili notacijo \uplus , ki naj označuje inducirani podgraf na vozliščih dveh podgrafov danega grafa.

Definicija. Naj bosta H in K podgrafa grafa G . Potem je $H \uplus_G K := G[V(H) \cup V(K)]$. Kjer ni dvoma, uporabljamo kar oznako $H \uplus K$.

V nadaljevanju sledijo lastnosti razdaljnih ostankov grafov s poudarkom na VRO in PRO vozliščno in povezavno tranzitivnih grafov, dvodelnih grafov ter semisimetričnih grafov. Nato prikažemo, kako so razdaljni ostanki produktivnih grafov odvisni od razdaljnih ostankov njihovih faktorjev ter izračunamo razdaljne ostanke na nekaj primerih grafov. Zopet spomnimo, da so v osnovi vsi definirani grafi povezani, razen če omenimo drugače.

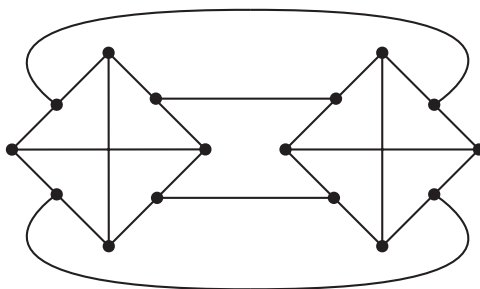
Izrek 55. *Naj bosta H in R ne nujno povezana grafa. Potem obstaja graf G , ki vsebuje R kot inducirani podgraf, tako da je H izomorfen $Res(G, R)$.*

Dokaz. Graf G konstruiramo s spojem grafov H in R , zato je $V(G) = V(H) \cup V(R)$. Množica povezav grafa G pa naj vsebuje vse originalne povezave H in R ter dodatno povezavo (u, r) za vsak $v \in V(H)$ in vsak $r \in V(R)$. Potem je očitno razdaljna particija $P(G, V_0)$ definirana z $V_0 = V(R)$ ter $V_1 = V(H)$, zato je $Res(G, R) = H$. \square

Lema 56. *Naj bo G vozliščno tranzitiven graf. Potem so vsi njegovi vozliščni razdaljni ostanki med seboj izomorfni, tj. neodvisni od izbire korena. Obratno ni nujno res niti za regularne grafe.*

Dokaz. Trditev leme je očitna, saj graf G ne bi imel tranzitivne grupe avtomorfizmov, če VRO ne bi bili med seboj izomorfni. Kubičen graf na sliki 4.19 pa dokazuje, da obratna trditev ni nujno resnična. Sestavimo ga iz dveh kopij grafa K_4 s tem, da združimo povezave, ki mejijo na zunanje lice vsakega od grafov. Operacija združevanja dveh povezav e in f , kot je definirana v [58], zahteva dodajanje novega vozlišča u na e ter vozlišča v na f , ki ju nato tudi povežemo. Vsi VRO grafa na sliki 4.19 so izomorfni grafu K_1 , vendar graf sam ni vozliščno tranzitiven, saj ne obstaja avtomorfizem, ki bi slikal vozlišče enega od grafov K_4 v vozlišče, ki je nastalo pri združevanju povezav. \square

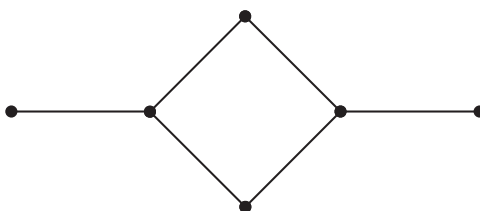
Posledica 57. *Graf na sliki 4.19 je tudi DDR-graf, tj. zaporedje razdaljnih stopenj poljubnega vozlišča je $(1, 3, 6, 5, 1)$, zato izomorfnost VRO ni zadosten pogoj, da bi bil graf z enakimi razdaljnimi stopnjami vozliščno tranzitiven.*



Slika 4.19: Graf z izomorfnimi vozliščnimi razdaljnimi ostanki, ki ni vozliščno tranzitiven.

Lema 58. Naj bo G povezavno tranzitiven graf. Potem so vsi njegovi povezavni razdaljni ostanki med seboj izomorfni. Obratno ni nujno res.

Dokaz. Dokaz uporablja podoben argument kot dokaz leme 56. Graf G namreč ne bi imel grupe avtomorfizmov, ki deluje tranzitivno po povezavah, če PRO ne bi bili med seboj izomorfni. Primer grafa, kjer obrat trditve ne drži, je prikazan na sliki 4.20 in ima vse PRO izomorfne K_1 , vendar očitno ni povezavno tranzitiven. \square



Slika 4.20: Graf z izomorfnimi povezavnimi razdaljnimi ostanki, ki ni povezavno tranzitiven.

Primer 4. Petersenov graf $GP(5, 2)$ je vozliščno, povezavno ter celo razdaljno tranzitiven, zato ima vse razdaljne ostanke glede na izbrane korene izomorfne naslednjim grafom:

$$Res(GP(5, 2), K_1) \cong C_6,$$

$$Res(GP(5, 2), K_2) \cong 2K_2,$$

$$Res(GP(5, 2), P_3) \cong 2K_1,$$

$$Res(GP(5, 2), P_4) \cong K_1,$$

$$Res(GP(5, 2), C_5) \cong C_5. \quad \blacksquare$$

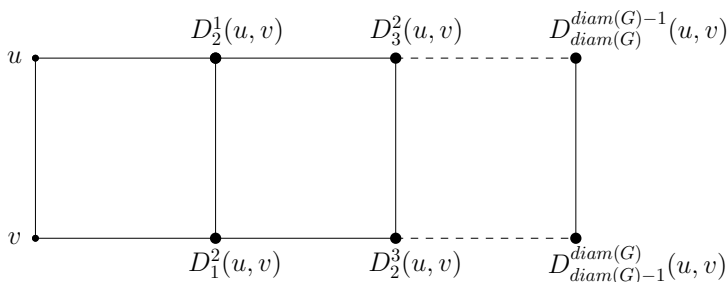
4.5.1 Razdaljni ostanki dvodelnih grafov

Za dvodelne grafe obstaja povezava med povezavnim razdaljnim ostankom ter vozliščnima razdaljnima ostankoma vozlišč v korenu PRO.

Izrek 59. Naj bo $G \neq K_2$ dvodelen graf s particijama vozlišč P_1 in P_2 . Naj bosta $u \in P_1$ in $v \in P_2$ sosednji vozlišči v G . Potem je povezavni razdaljni ostanek

$$Res(G, G[\{u, v\}]) = \begin{cases} Res(G, G[\{u\}]) \uplus Res(G, G[\{v\}]), & \text{če je } e(u) = e(v), \\ Res(G, G[\{u\}]), & \text{če je } e(u) = e(v) + 1, \\ Res(G, G[\{v\}]), & \text{če je } e(v) = e(u) + 1. \end{cases}$$

Dokaz. V dokazu si pomagamo z razdaljno particijo $V(G)$ glede na povezavo $\{u, v\}$ kot je prikazana na sliki 4.7 na strani 50. Ker je graf G dvodelen, ne vsebuje lih ciklov, kar pomeni, da v razdaljni particiji ne obstajajo množice D_i^j . Zato je njena zgradba takšna, kot je prikazana na sliki 4.21. Od tod pa lahko hitro vidimo, da je v primeru enakih ekscentričnosti vozlišč u in v povezavni razdaljni ostanek induciran na vozliščih $D_{e(u)}^{e(u)-1}$ ter $D_{e(u)-1}^{e(u)}$. Če je $e(u) = e(v) + 1$, pa je PRO induciran na $D_{e(u)}^{e(u)-1}$, kar je ravno VRO glede na vozlišče u . Če zamenjamo vlogi u in v , dobimo še tretjo možnost. \square



Slika 4.21: Razdaljna particija dvodelnega grafa G glede na povezavo $\{u, v\}$.

Zanimiva podmnožica dvodelnih grafov so semisimetrični grafi, ki so povezavno tranzitivni, a niso vozliščno tranzitivni. Grupa avtomorfizmov teh grafov deluje tranzitivno na vsaki od obeh particij množice vozlišč. Če vzamemo za koren eno samo vozlišče, so zaporedja razdaljnih stopenj enaka za korene, ki so v isti particiji. Primer je *Folkmanov graf* [36] reda 24, ki je najmanjši semisimetrični graf. Glede na particiji ima dve različni zaporedji razdaljnih stopenj $(1, 4, 9, 6)$ ter $(1, 4, 6, 6, 3)$, pri čemer so VRO izomorfni $6K_1$ ter $3K_1$. V članku [76] je bilo postavljeno vprašanje o obstoju semisimetričnih grafov, ki so hkrati tudi DDR-grafi, na kar lahko odgovorimo pritrdilno, saj primere takšnih grafov najdemo v zbirki 4-regularnih povezavno tranzitivnih grafov [123]; npr. $C_4[40, 9]$, ki je semisimetričen graf z zaporedjem razdaljnih stopenj $(1, 4, 10, 16, 9)$ za vsa vozlišča, VRO pa so izomorfni $9K_1$.

4.5.2 Razdaljni ostanki produktnih grafov

V tem podrazdelku si pogledjmo, kako so razdaljni ostanki produktnih grafov odvisni od razdaljnih ostankov njihovih faktorjev. To nam lahko poenostavi iskanje razdaljnih ostankov v grafih.

Analizirali smo vse štiri standardne grafovskie produkte: kartezičnega, krepkega, direktnega ter leksikografskega.

Izrek 60. Naj bosta G in H grafa ter $R \subset G$ in $S \subset H$ njuna korena. Potem velja naslednja zveza med razdaljnimi ostanki:

$$Res(G \square H, R \square S) \cong Res(G, R) \square Res(H, S).$$

Dokaz. Ker sta G in H povezana, je povezan tudi graf $G \square H$, zato je razdaljni ostanek dobro definiran. Razdalje v kartezičnem produktu so vsota razdalj v faktorjih [61], tj. razdalja med vozliščema (g_1, h_1) in (g_2, h_2) v $G \square H$ je enaka $d_G(g_1, g_2) + d_H(h_1, h_2)$. Ker velja

$$\begin{aligned} \min_{(r,s) \in V(R \square S)} d_{G \square H}((r, s), (g, h)) &= \min_{(r,s) \in V(R \square S)} d_G(r, g) + d_H(s, h) \\ &= \min_{r \in V(R)} d_G(r, g) + \min_{s \in V(S)} d_H(s, h), \end{aligned}$$

sledi

$$d_{G \square H}(R \square S, (g, h)) = d_G(R, g) + d_H(S, h).$$

Razdaljni ostanek torej vsebuje vozlišče (g, h) natanko tedaj, ko je $g \in V(Res(G, R))$ in $h \in V(Res(H, S))$. Ker je razdaljni ostanek induciran, vzamemo kartezični produkt razdaljnih ostankov obeh faktorjev. \square

Zaradi asociativnosti kartezičnega produkta lahko izpeljemo naslednjo posledico.

Posledica 61. Naj bodo G_1, G_2, \dots, G_n povezani grafi s pripadajočimi koreni R_1, R_2, \dots, R_n . Potem je

$$Res(G_1 \square \dots \square G_n, R_1 \square \dots \square R_n) \cong Res(G_1, R_1) \square \dots \square Res(G_n, R_n).$$

Primer 5. n -dimenzionalna hiperkocka Q_n je kartezični produkt n kopij K_2 , zato so vsi njeni vozliščni razdaljni ostanki izomorfni $K_1 \square \dots \square K_1 \cong K_1$. \blacksquare

Razdaljni ostanki v krepkem produktu grafov so odvisni od razdalj med koreni in razdaljnimi ostanki v faktorjih. Definirajmo še okrajšavo d_R za razdaljo $d(R, Res(G, R))$.

Izrek 62. Naj bosta G in H grafa s korenoma $R \subset G$ in $S \subset H$. Razdaljni ostanek krepkega produkta grafov G in H je

$$Res(G \boxtimes H, R \boxtimes S) \cong \begin{cases} G \boxtimes Res(H, S) \uplus H \boxtimes Res(G, R), & \text{če je } d_R = d_S, \\ G \boxtimes Res(H, S), & \text{če je } d_R < d_S, \\ H \boxtimes Res(G, R), & \text{če je } d_R > d_S. \end{cases}$$

Dokaz. Dokaz je podoben kot v primeru kartezičnega produkta. Krepki produkt povezanih grafov je povezan, zato je razdaljni ostanek dobro definiran. Razdalja v tem produktu je enaka maksimalni razdalji v obeh faktorjih [61], zato je

$$d_{G \boxtimes H}(R \boxtimes S, (g, h)) = \max\{d_G(R, g), d_H(S, h)\}.$$

Če je $d_R < d_S$, potem je $d_{G \boxtimes H}(R \boxtimes S, (g, h)) = d_H(S, g)$. Torej razdaljni ostanek vsebuje vozlišče (g, h) natanko tedaj, ko je $h \in V(\text{Res}(H, S))$. Vozlišče g lahko tako poljubno izberemo iz G . Ker je razdaljni ostanek induciran podgraf, dobimo navedeno trditev v izreku. Podobno velja, če je $d_R > d_S$.

V primeru, ko sta d_R in d_S enaki, razdaljni ostanek sestoji tako iz vozlišč grafa $\text{Res}(G, R) \times H$ kot vozlišč grafa $G \times \text{Res}(H, S)$. Ker je razdaljni ostanek induciran, dobimo omenjeni rezultat. \square

Naj bodo G_1, G_2, \dots, G_n grafi s pripadajočimi koreni R_1, R_2, \dots, R_n . Naj množica \mathcal{G}_{\max} vsebuje le tiste grafe, ki imajo največjo razdaljo od korenov do njihovih razdaljnih ostankov. Če grafe oštevilčimo tako, da imajo elementi \mathcal{G}_{\max} indekse od 1 do $k \leq n$, sledi naslednja posplošitev izreka 62:

Posledica 63. Naj bodo G_1, G_2, \dots, G_n grafi s pripadajočimi koreni R_1, R_2, \dots, R_n . Če jih označimo tako, da prvih k grafov spada v množico $\mathcal{G}_{\max} := \{G_j \mid d_{R_j} = \max_{1 \leq i \leq n} \{d_{R_i}\}\}$, potem je razdaljni ostanek krepkih produktov $\text{Res}(G_1 \boxtimes \dots \boxtimes G_n, R_1 \boxtimes \dots \boxtimes R_n)$ izomorfen

$$\bigoplus_{1 \leq i \leq k} G_1 \boxtimes \dots \boxtimes G_{i-1} \boxtimes \text{Res}(G_i, R_i) \boxtimes G_{i+1} \boxtimes \dots \boxtimes G_n.$$

Kot pri krepkem produktu, je razdaljni ostanek tudi pri leksikografskem produktu odvisen od razdalj med koreni in razdaljnimi ostanki faktorjev v produktu. Spomnimo se tudi definicije razdaljne particije $P(G, V_0)$; glej str. 9.

Definicija. Naj bo R podgraf grafa G . Vozlišče $r \in V(R)$ imenujemo R -izolirano, če so vsi njegovi sosedi iz grafa $G \setminus R$.

Izrek 64. Naj bosta G in H grafa s korenoma $R \subset G$ in $S \subset H$, pri čemer graf H ni nujno povezan. Naj bo $P(H, V(S))$ razdaljna particija grafa H . Potem je razdaljni ostanek $\text{Res}(G \circ H, R \circ S)$ izomorfen enemu od naslednjih grafov:

1. $\bigcup_{r \text{ je } R\text{-izolirano}} (H \setminus H[V(S) \cup V_1])$, če je $d_R = 1$, $d_S \neq 1$ in obstajajo R -izolirana vozlišča,

2. $(G \circ H) \setminus (R \circ S)$, če je $d_R = d_S = 1$ ali pa je $d_R = 1$ ter ni R -izoliranih vozlišč,
3. $Res(G, R) \circ H \cup \bigcup_{r \text{ je } R\text{-izolirano}} (H \setminus H[V(S) \cup V_1])$, če je $d_R = 2$,
4. $Res(G, R) \circ H$, če je $d_R \geq 3$.

Dokaz.

1. Če je $d_R = 1$, so vozlišča (g, h) , kjer $g \notin V(R)$, na razdalji 1 od korena $R \circ S$. Če sta vozlišči u in v sosednji v R , so na enaki razdalji tudi vozlišča (u, h) in (v, h) , kjer je $h \in V(H \setminus S)$. Če je r R -izolirano vozlišče, potem so vozlišča (r, h) , kjer je $h \in V(H) \setminus (V(S) \cup V_1)$, na razdalji 2 od korena in tako inducirajo razdaljni ostanek produkta. Taka vozlišča obstajajo, saj $d_S \neq 1$.
2. Naj bo $d_R = 1$. Če ni R -izoliranih vozlišč ali pa je $d_S = 1$, iz 1. točke sledi, da so vsa vozlišča produkta razen vozlišč iz $V(R \circ S)$ na razdalji 1 od korena.
3. Če je $d_R = 2$, potem so vozlišča (g, h) , kjer je $g \in V(Res(G, R))$, na razdalji 2 od korena $R \circ S$. Iz 1. točke lahko sklepamo, da so na razdalji 2 tudi vozlišča (r, h) , kjer je r R -izolirano vozlišče ter $h \in V(H) \setminus (V(S) \cup V_1)$. Če G ne vsebuje R -izoliranih vozlišč ali če je $d_S = 1$, potem omenjena vozlišča (r, h) ne obstajajo.
4. Dokaz sledi iz 3. točke, saj so vozlišča (g, h) , kjer je $g \in V(Res(G, R))$, na razdalji $d_R \geq 3$ od korena $R \circ S$, vsa ostala vozlišča pa so mu bližje. \square

Točko 4 iz izreka 64 lahko enostavno posplošimo na več faktorjev zaradi asociativnosti leksikografskega produkta.

Posledica 65. Naj bodo G_1, G_2, \dots, G_n grafi s pripadajočimi koreni R_1, R_2, \dots, R_n , kjer je le graf G_1 nujno povezan. Naj bo razdalja $d_{R_1} \geq 3$. Potem velja

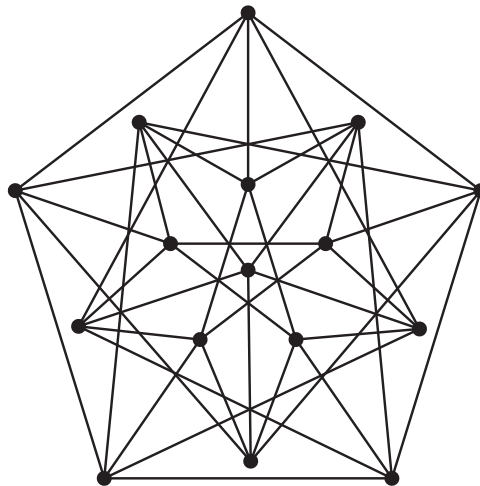
$$Res(G_1 \circ G_2 \circ \dots \circ G_n, R_1 \circ R_2 \circ \dots \circ R_n) \cong Res(G_1, R_1) \circ G_2 \circ \dots \circ G_n.$$

S pomočjo leksikografskega produkta lahko dokažemo zanimivo lastnost razdaljnih ostankov vozliščno tranzitivnih grafov.

Izrek 66. Naj bo H vozliščno tranzitiven graf in $n \in \mathbb{N}$. Potem obstaja vozliščno tranzitiven graf G s korenom R reda n , tako da velja $H \cong Res(G, R)$.

Dokaz. Graf G konstruiramo kot leksikografski produkt grafov C_{n+5} in H . Ker sta oba grafa vozliščno tranzitivna, je tak tudi njun produkt $G := C_{n+5} \circ H$ [61]. Ker je graf C_{n+5} povezan, je povezan tudi G . Naj bo P_n koren grafa C_{n+5} in K_1 koren grafa H . Moč korena $P_n \circ K_1$ v produktu je enaka n . Ker je $d_{P_n} = 3$, je razdaljni ostanek $Res(C_{n+5} \circ H, P_n \circ K_1)$ po 4. točki izreka 64 izomorfen grafu $Res(C_{n+5}, P_n) \circ H \cong K_1 \circ H \cong H$. \square

Primer 6. S pomočjo izreka 66 lahko konstruiramo vozliščno tranzitivne grafe, ki imajo vozliščne razdaljne ostanke izomorfne Petersenovemu grafu. Slednji pa se pojavi tudi kot VRO Clebschevega grafa na sliki 4.22, ki je simetričen, krepko regularen graf na 16 vozliščih stopnje 5. ■



Slika 4.22: Clebschev graf, ki ima vse VRO izomorfne Petersenovemu grafu.

Direktni produkt ima nekaj neobičajnih lastnosti. Razdalj v produktu na primer ni možno določiti tako enostavno kot v prej omenjenih produktih, kar je razvidno iz naslednje leme.

Lema 67 ([8]). Naj bosta $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ in $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ dve različni vozlišči grafa $G := G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$. Potem je

$$d_G(u, v) = \min\{m \in \mathbb{N} \mid G_i \text{ ima sprehod } u_i-v_i \text{ dolžine } m \text{ za vsak } 1 \leq i \leq n\}.$$

Če takšno število m ne obstaja, vozlišči v produktu nista povezani.

Lema 67 nam pomaga definirati razdaljni ostanek direktnega produkta dveh grafov, ki ga lahko trivialno posplošimo tudi na produkt večih grafov.

Izrek 68. Naj bosta G in H grafa, od katerih vsaj eden ni dvodelen. Naj bosta R in S pripadajoča korena. Potem je razdaljni ostanek $Res(G \times H, R \times S)$ induciran na vozliščih $(u, v) \in V(G \times H)$, za katere velja:

$$d_{G \times H}(R \times S, (u, v)) = \max_{(g,h) \in V(G \times H)} \min_{(r,s) \in V(R \times S)} \{m \in \mathbb{N} \mid G \text{ ima sprehod } r-g \text{ dolžine } m \text{ in } H \text{ ima sprehod } s-h \text{ dolžine } m\}. \quad (4.4)$$

Dokaz. Ker vsaj eden od faktorjev ni dvodelen in sta oba povezana, je tudi produkt povezan. Vozlišča razdaljnega ostanka so najdlje od korena, zato moramo najti maksimalno vrednost $d_{G \times H}(R \times S, (g, h))$ po vseh $(g, h) \in G \times H$. Po definiciji je $d_{G \times H}(R \times S, (g, h)) := \min_{(r,s) \in V(R \times S)} d_{G \times H}((r, s), (g, h))$. Če to uporabimo v formuli za razdaljo iz leme 67, dobimo zgoraj omenjeni rezultat. \square

Da bi našli razdaljni ostanek direktnega produkta, moramo poiskati najkrajše poti sodih in lihih dolžin med korenem R in poljubnim vozliščem v v vsakem izmed faktorjev. Ti razdalji označimo z $d_{soda}(R, v)$ in $d_{liha}(R, v)$. Možni sprehodi med korenem R in vozliščem v so tedaj dolžin $d_{soda}(R, v) + 2k$ in $d_{liha}(R, v) + 2k$, kjer je $k \in \mathbb{N}$. Ker mora biti dolžina sprehoda enaka v obeh faktorjih, so možni sprehodi med korenem $R \times S$ ter vozliščem $(g, h) \in V(G \times H)$ dolžin $\max\{d_{soda}(R, g), d_{soda}(S, h)\} + 2k$ za sprehode sode dolžine ter podobno za sprehode lihe dolžine. Tako lahko pogoj (4.4) iz izreka 68 zapišemo kot

$$d_{G \times H}(R \times S, (u, v)) = \max_{(g,h) \in V(G \times H)} \min \left\{ \max\{d_{soda}(R, g), d_{soda}(S, h)\}, \right. \\ \left. \max\{d_{liha}(R, g), d_{liha}(S, h)\} \right\}. \quad (4.5)$$

Pogoj (4.5) nam omogoča lažje iskanje razdaljnega ostanka, kar je razvidno iz naslednjega primera.

Primer 7. Naj bo $G = H := C_{2n+1}$, kjer je $n \in \mathbb{N}$. Ker sta oba cikla lihe dolžine vozliščno tranzitivna, je njun direktni produkt povezan vozliščno tranzitiven graf [61]. Da bi našli njegov VRO, moramo najprej poiskati najkrajše poti sode in lihe dolžine od korena r do poljubnega vozlišča $v_i \in V_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, n+1$, iz razdaljne particije $P(C_{2n+1}, \{r\})$:

$$d_{soda}(r, v_i) = \begin{cases} i, & \text{če je } i \text{ sod,} \\ 2n+1-i, & \text{če je } i \text{ lih,} \end{cases}$$

$$d_{liha}(r, v_i) = \begin{cases} 2n+1-i, & \text{če je } i \text{ sod,} \\ i, & \text{če je } i \text{ lih.} \end{cases}$$

Ker je $G = H$ in $R = S := K_1$, se pogoj (4.5) v našem primeru poenostavi v

$$\max_{(v_i, v_j)} \min \left\{ \begin{array}{l} \max\{i, j\}, \max\{2n+1-i, 2n+1-j\}, \text{ če je } i+j \text{ sod;} \\ \max\{i, 2n+1-j\}, \max\{2n+1-i, j\}, \text{ če je } i+j \text{ lih.} \end{array} \right\}$$

Optimalna vrednost zgornjega izraza je $2n$, takrat ko je $i+j = 1$. Torej je bodisi $i = 0$ in $j = 1$ bodisi $i = 1$ in $j = 0$. VRO tako sestoji iz vozlišč (v_0, v_1) ter (v_1, v_0) , kjer je $v_i \in V_i$ razdaljne particije $P(C_{2n+1}, \{r\})$. Ker koren vsebuje le vozlišče r , red grafa $C_{2n+1}[V_1]$ pa je dve, VRO

vsebuje štiri vozlišča. Vozlišči (v_0, v_1) ter (v_1, v_0) sta po definiciji direktnega produkta sosednji, zato je $Res(C_{2n+1} \times C_{2n+1}, K_1 \times K_1) \cong C_4$. Pravilnost rezultata lahko preverimo s pomočjo dejstva, da je $C_{2n+1} \times C_{2n+1} \cong C_{2n+1} \square C_{2n+1}$; glej [84]. S pomočjo izreka 60 dobimo enak rezultat kot zgoraj:

$$Res(C_{2n+1} \square C_{2n+1}, K_1 \square K_1) \cong Res(C_{2n+1}, K_1) \square Res(C_{2n+1}, K_1) \cong K_2 \square K_2 \cong C_4.$$

Seveda pa lahko zgornji postopek uporabimo splošneje pri iskanju razdaljnih ostankov direktnih produktov ciklov različnih dolžin. ■

4.6 Sorodni razdaljni koncepti

Koncept regularnosti razdaljnih stopenj v grafu G lahko posplošimo tako, da definiramo pojem *regularnosti n -tega reda stopnje k* .⁸ To pomeni, da za vsako vozlišče $v \in V(G)$ velja $d_n(G, v) = k$. Graf G pa je *regularen za stopnje n -tega reda*⁹ oziroma *razdaljno n -regularen*¹⁰, če obstaja nek $k \geq 1$, da je G regularen graf n -tega reda stopnje k . Henning in Swart [54, 55] sta dokazala, da je povezan graf regularen n -tega reda stopnje 1, kjer je $n \geq 2$, bodisi pot dolžine $2n - 1$ bodisi ima premer n . V primeru, ko je G drevo, velja le prva od obeh možnosti [55]. V omenjenem članku je podana tudi karakterizacija grafov, ki so regularni za stopnje n -tega reda za $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

V članku Freda Buckleya [16] so analizirana še nekatera druga zaporedja, ki uporabljajo koncept razdalj v grafu. *Razdaljna porazdelitev* grafa G je zaporedje $D(G) := (D_1(G), D_2(G), \dots, D_{\text{diam}(G)}(G))$, kjer je $D_i(G)$ število parov vozlišč na razdalji i , medtem ko je *sosednja porazdelitev* zaporedje $(n_1, n_2, \dots, n_{|V(G)|-2})$, kjer n_i označuje število parov vozlišč, ki imajo i skupnih sosedov. Tretje od v članku omenjenih zaporedij pa je *geodetska porazdelitev* (g_1, g_2, \dots) , kjer g_i predstavlja število parov vozlišč, ki imajo med seboj i najkrajših poti. Očitno je, da lahko iz zaporedja razdaljnih stopenj dobimo razdaljno porazdelitev, saj je $D_i(G) = 1/2 \sum_{v \in V(G)} d_i(G, v)$. Iz $DDS(G_1) = DDS(G_2)$ tako sledi tudi enakost razdaljnih porazdelitev. Po drugi strani enakost sosednjih porazdelitev ne implicira enakosti DDS niti ne velja obratno [16, slika 3]. Enakost DDS ne pogojuje niti enakosti geodetskih porazdelitev ali obratno [16, slika 4]. V članku [72] so preučevali tudi *zaporedje ekscentričnosti* in dokazali, katera zaporedja je mogoče realizirati kot ekscentričnosti vozlišč v grafih.

⁸angl. *n*th order regular of degree k

⁹angl. *n*th order degree regular [54]

¹⁰angl. distance n -regular [20]

Poleg razdaljnih stopenj so Bloom in soavtorji [9] uvedli tudi pojem *zaporedja stopenj poti*¹¹ vozlišča v v grafu G , tj. $(p_0(G, v), p_1(G, v), \dots, p_i(G, v), \dots)$, kjer je $p_i(G, v)$ število poti dolžine i v G z začetkom v vozlišču v , n -terki iz razdaljnih stopenj vseh vozlišč, urejenih v leksikografskem vrstnem redu, pa pravimo *zaporedje stopenj poti grafa G* . Ker je v drevesih med poljubnima vozliščema natanko ena pot, je pri njih zaporedje stopenj poti izbranega vozlišča kar enako zaporedju razdaljnih stopenj tega vozlišča. Izkaže se, da v primeru povezanih grafov ta lastnost velja le v drevesih [96]. Kot DDS tudi zaporedje stopenj poti ne nosi dovolj informacij, da bi ločilo neizomorfne grafe [96].

Kot smo omenili, imajo DDR-grafi zaporedja razdaljnih stopenj za vsa vozlišča enaka. Na drugi strani pa lahko definiramo DDI-grafe¹², ki imajo vsa zaporedja različna. Več o DDI-grafih si bralec lahko ogleda v članku [9], kjer so podani pogoji za obstoj DDI-grafov glede na red, premer ter regularnost grafa, omenjeno pa je tudi, da ima DDI-graf trivialno grupo avtomorfizmov, pri čemer obratno ne drži. Protiprimer so kar DDR-grafi, ki imajo trivialno grupo avtomorfizmov.

Na podoben način lahko kot nasprotje razdaljno uravnoteženim grafom definiramo razdaljno injektivne grafe, kjer so razdalje vseh vozlišč različne. Le-te je preučeval Pachter [86], ki je dokazal, da obstajajo neskončne družine grafov, katerih razdalje so zaporedna števila, in tako odgovoril na vprašanje, ki sta ga zastavila Buckley in Harary [17].

Nekateri avtorji so obravnavali tudi optimizacijske probleme s področja razdalj vozlišč v grafu. Miller [85] je na primer iskal omejitve za minimalno število povezav, ki jih ima lahko graf reda n z največjo razdaljo enako k , Erdős in Renyi [35] pa sta preučevala enak problem na grafih premera 2 in stopnje $\leq k$.

¹¹angl. path degree sequence

¹²angl. distance degree injective (DDI) graph

Poglavje 5

Primeri uporabe rasti

V tem poglavju si pogledjmo nekaj primerov uporabe rasti, ki segajo na področja matematike, kemije ter računalništva, z njimi pa se da opisati tudi bolj družboslovne pojme, kot je status oz. moč posameznikov ter odnose med njimi.

V matematiki srečamo DDR-grafe in DB-grafe pri *lokacijskih problemih*. Koncept centra grafa namreč sovпада s postavitvijo servisa na lokaciji, ki je najmanj oddaljena od najbolj oddaljenega uporabnika. Sebi-centralni grafi, med katere spadajo DDR-grafi, imajo to lastnost, da vsako njihovo vozlišče zadošča omenjenemu pogoju. Razdaljno uravnoreženi grafi niso več nujno sebi-centralni, kot kaže primer posplošenega Petersenovega grafa $GP(35, 8)$, so pa natanko sebi-medianski grafi. Mediana grafa pa je pomembna pri lokaciji storitev, ki morajo pogosto dostopati do vseh ostalih vozlišč, saj s tem minimiziramo stroške dostopa do vseh vozlišč (za razliko od prvega problema, kjer minimiziramo čas dostopa do najbolj oddaljene lokacije). Več o omenjenih lokacijskih problemih ter njihovih posplošitvah si lahko bralec prebere v [23, poglavji 5 in 6].

Teorija grafov igra pomembno vlogo tudi v kemiji, saj je naravna predstavitev kemijskih struktur z grafi, še posebej pa je to uporabno pri organskih spojinah. Najbolj pogosto kot orodja kemijske teorije grafov srečamo matrike sosednosti, karakteristične polinome, obstoj 1-faktorjev (t. i. Kekuléjevi grafi) ter kombinatorične preštevalne metode (metoda Pólye); glej [114]. Razdalje v grafih pa služijo kot merilo sorodnosti kemijskih struktur ter napovedujejo lastnosti novo generiranih spojin. Razdaljne stopnje so temelj mnogih tako imenovanih topoloških indeksov, saj se je kemijska teorija grafov razvijala skoraj vzporedno z matematično, čeprav večkrat v obliki domnev, ki so bile kasneje potrjene ali ovržene s pomočjo matematičnih orodij.

V razdelkih, kjer prikažemo uporabo rasti v računalništvu, na primeru računalniških omre-

žij z razdaljnimi stopnjami opišemo omejitve pri prenašanju podatkov, z njimi ugotavljamo zanesljivost omrežij ter si pogledamo razdalje med vozlišči v grafih, ki simulirajo omrežja. Koncept razdalj lahko namreč povežemo s časom, potrebnim za prenos podatkov, kar je še posebej pomembno pri porazdeljenem računanju.

5.1 Rast v matematični kemiji

V kemiji lahko grafi predstavljajo različne objekte: molekule, reakcije, polimere, kristale itd. Posebna skupina kemijskih grafov so t. i. *molekularni grafi*, ki opisujejo zgradbo molekul. Vozlišča teh grafov predstavljajo atome, povezave pa kemijske vezi med njimi, pri čemer ne upoštevamo večkratnih vezi, ponavadi pa se izpušča tudi vodikove atome ter njihove vezi. Molekularni grafi so zato enostavni povezani grafi, ki predstavljajo topologijo molekul, katero lahko opišemo tudi s topologijo odprtih množic ali topologijo sosednosti [114]. Vendar se zaradi velikega števila molekul za opis njihovih grafov uporabljajo števila, ki jih imenujemo *topološki indeksi*. Ti indeksi so večinoma vezani bodisi na relacije sosednosti bodisi na razdalje v grafu in spadajo med grafovske invariante. Seveda se pri uporabi topoloških indeksov mnogo podatkov o grafu izgubi, kar onemogoča njegovo rekonstrukcijo, vendar se je izkazalo, da indeksi omogočajo dobro napovedovanje kvantitativnih strukturnih lastnosti molekul (QSPR¹) ter njihovih reaktivnosti (QSAR²). Trenutno se uporablja prek 100 različnih indeksov; nekatere bolj, druge manj pogosto. Cilj večine od njih je na čim bolj enostaven in računsko nezahteven način shraniti čim več informacij o grafu in tako ločevati med različnimi grafi. V sklopu disertacije smo podrobneje analizirali najbolj znan in preučevan indeks, ki temelji na razdaljah v grafu, ter nekatere njegove izpeljanke.

Wienerjev indeks [46] je bil predlagan leta 1947 in velja za prvega od sodobnih topoloških indeksov. Prvotno je bil definiran kot število vezi med vsemi pari atomov v acikličnih molekulah. Izkazalo se je, da precej dobro napoveduje vrelišča teh spojin, ki jim danes pravimo alkani, pa tudi njihova tališča, volumne itd. Posledično je bil Wienerjev indeks posplošen tudi na druge strukture, zato ostaja med najbolj raziskanimi od vseh topoloških indeksov. V jeziku teorije grafov zapišemo Wienerjev indeks grafa G kot

$$W(G) := \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} d(u,v) = \sum_{i=1}^{\text{diam}(G)} i \cdot D_i(G), \quad (5.1)$$

¹angl. quantitative structure-property relationship

²angl. quantitative structure-activity relationship

kjer $D_i(G)$ predstavlja število parov vozlišč na razdalji i . Če v formulo vpeljemo še razdaljne stopnje, dobimo

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\text{diam}(G)} i \cdot D_i(G) &= \sum_{i=1}^{\text{diam}(G)} i \cdot \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} d_i(G, v) = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} \sum_{i=1}^{\text{diam}(G)} i \cdot d_i(G, v) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} d_G(v), \end{aligned}$$

kar pomeni, da je indeks natanko določen z razdaljami vozlišč grafa. Ker pa vemo, da niti razdalje niti razdaljne stopnje ne določajo nujno grafa enolično [109], se pojavi vprašanje o njegovi učinkovitosti. Pachter je celo pokazal, da za vsako naravno število n obstaja n neizomorfni grafov z enakim zaporedjem razdalj, ki vsebuje dani graf G kot inducirani podgraf, pri čemer so razdalje vseh vozlišč različne [86, izrek 1]. Ta težava se pojavi tudi pri drugih indeksih, ki temeljijo na matriki razdalj, kot je na primer *Balabanov indeks* [3]

$$J(G) := \frac{|E(G)|}{|E(G)| - |V(G)| + 2} \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} (d_G(u)d_G(v))^{-1/2}.$$

Rešitve problema izrojenosti omenjenih indeksov so vsebovale kombinacije Balabanovega indeksa s pojmi iz teorije informacij [64] ter povezave z indeksi, ki temeljijo na matriki sosednosti kot je npr. *razdalja stopenj* $D'(G) := \sum_{v \in V(G)} \deg(v)d_G(v)$ [29]. To reši težavo le delno, saj tudi ti indeksi vrnejo enako vrednost za neizomorfne grafe z enakim zaporedjem razdaljnih stopenj.

Naj bo G graf z n vozlišči in m povezavami. Ker za ugotavljanje razdaljne uravnoteženosti, tj. pregled vseh razdalj vozlišč, potrebujemo $\mathcal{O}(mn)$ časa, je v splošnem enaka časovna zahtevnost potrebna tudi za izračun Wienerjevega indeksa grafa G . Vendar se ga da izračunati hitreje na posebnih družinah grafov, kot so drevesa, fasciografi in rotagrafi [67] ter benzenoidni grafi, ki predstavljajo grafe aromatičnih cikličnih ogljikovodikov. Časovna zahtevnost izračuna indeksa v teh grafih je linearna glede na število vozlišč [22]. Vrednosti Wienerjevega indeksa v različnih družinah grafov znotraj benzenoidnih grafov ter grafe z minimalno (maksimalno) vrednostjo indeksa znotraj teh družin je moč najti v [31].

Harold Wiener je sicer v svojem delu [46] definiral postopek izračuna indeksa le za aciklične grafe kot

$$W(T) := \sum_{\{u,v\} \subseteq E(G)} |W_{uv}| \cdot |W_{vu}|, \quad (5.2)$$

kjer je, kot omenjeno, graf T drevo, množici W_{uv} in W_{vu} pa že poznamo iz razdelka o razdaljni uravnoteženosti. Dokaz, da je njegova definicija (5.2) na primerih dreves enaka splošni definiciji (5.1), izhaja iz dejstva, da je pot med poljubnima vozliščema w in z v drevesu T enolična,

zato za vsako povezavo $\{u, v\}$, ki leži na tej poti, w in z prispevata 1 k zgornji vsoti. Povedano drugače, za vsako povezavo $\{u, v\}$ je $|W_{uv}| \cdot |W_{vu}|$ ravno število parov vozlišč, ki vsebujejo dano povezavo na poti med elementoma posameznega para. Formalen dokaz ekvivalentnosti definicij si bralec lahko ogleda v [30, izrek 8].

Wienerjev indeks, definiran z (5.1), je torej le ena od možnih posplošitev originalne definicije na vse grafe. Gutman je zato v [44] predlagal kar uporabo indeksa (5.2) na splošnih grafih, kjer ga danes poznamo pod imenom *Szegedski indeks* iz označimo z $Sz(G)$. V [69, izrek 3.1] je pokazano, da je $Sz(G) \geq W(G)$ za vsak (povezan) graf G ter, da enakost velja za grafe, v katerih za poljubni vozlišči $w \in W_{uv}$ in $z \in W_{vu}$ obstaja najkrajša pot med njima, ki vsebuje povezavo $\{u, v\}$. Temu pogoju zadoščajo drevesa in tudi polni grafi. Za poljuben graf G veljata omejitvi $|E(G)| \leq Sz(G) \leq |E(G)| \cdot |V(G)|^2 / 4$; glej [68, izrek 3.8]. Spodnja meja je dosežena za polne grafe, zgornja pa je povezana z razdaljno uravnoteženimi grafi.

Trditev 69 ([60]). Dvodelen graf G je razdaljno uravnotežen, če in samo če velja $Sz(G) = \frac{|E(G)| \cdot |V(G)|^2}{4}$.

Našli smo torej zanimivo karakterizacijo dvodelnih DB-grafov, a podobno lahko naredimo tudi za splošne razdaljno uravnotežene grafe, če posplošimo Szegedski indeks. M. Randić je v članku [98] predlagal dopolnitev indeksa z vozlišči, ki so enako oddaljena od obeh krajišč dane povezave. Tako imenovani *dopolnjeni Szegedski indeks* grafa G [92] je definiran kot

$$Sz^*(G) := \sum_{\{u,v\} \subseteq E(G)} \left(|W_{uv}| + \frac{1}{2} |{}_u W_v| \right) \cdot \left(|W_{vu}| + \frac{1}{2} |{}_u W_v| \right).$$

Dopolnjeni Szegedski indeks je tako v dvodelnih grafih enak osnovnemu, v splošnem pa velja $Sz(G) \leq Sz^*(G)$. S pomočjo indeksa Sz^* lahko opišemo razdaljno uravnotežene grafe v splošnem.

Trditev 70. Graf G je razdaljno uravnotežen, če in samo če velja $Sz^*(G) = \frac{|E(G)| \cdot |V(G)|^2}{4}$.

Dokaz. Če upoštevamo, da je $|W_{uv}| + |{}_u W_v| + |W_{vu}| = |V(G)|$, dobimo

$$\begin{aligned} Sz^*(G) &= \sum_{\{u,v\} \subseteq E(G)} (|W_{uv}| + \frac{1}{2}(|V(G)| - |W_{uv}| - |W_{vu}|)) (|W_{vu}| + \frac{1}{2}(|V(G)| - |W_{uv}| - |W_{vu}|)) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{\{u,v\} \subseteq E(G)} (|V(G)| + |W_{uv}| - |W_{vu}|)(|V(G)| - (|W_{uv}| - |W_{vu}|)) \\ &= \frac{|E(G)| \cdot |V(G)|^2}{4} - \frac{1}{4} \sum_{\{u,v\} \subseteq E(G)} (|W_{uv}| - |W_{vu}|)^2. \end{aligned}$$

Torej je indeks enak $|E(G)| \cdot |V(G)| / 4$ natanko tedaj, ko velja $|W_{uv}| = |W_{vu}|$ za vsako povezavo $\{u, v\} \in E(G)$, tj. ko je G razdaljno uravnotežen graf. \square

Posledica 71. Graf z n vozlišči in m povezavami ima vrednost dopolnjenega Szegedskega indeksa kvečjemu $\frac{m \cdot n^2}{4}$.

Omenimo še, da je za izračun (dopolnjenega) Szegedskega indeksa grafa z n vozlišči in m povezavami potrebno $\mathcal{O}(mn)$ časa, saj izhajamo iz matrike razdalj in za vsako povezavo naredimo $\mathcal{O}(n)$ operacij kot pri računanju razdaljne uravnoveženosti po prvotni definiciji. V nekaterih primerih, kot so benzenoidni grafi, je moč Szegedski indeks izračunati tudi hitreje, tj. v linearnem času glede na število vozlišč grafa [22, izrek 6]. Če pa pogledamo problem še s teorije grafov, so povezavno in vozliščno tranzitivni grafi tisti, pri katerih se zaradi avtomorfizmov čas izračuna indeksa zmanjša na $\mathcal{O}(m)$.

Leta 1988 je Haruo Hosoya v članku [59] predlagal grafovsko invarianto

$$H_G(x) := \sum_{i=1}^{\text{diam}(G)} D_i(G)x^i$$

in jo poimenoval *Wienerjev polinom*, čeprav je kasneje dobila ime po njenem predlagatelju, tj. *Hosoyev polinom*. Kot vidimo, je ta polinom ravno (običajna) rodovna funkcija števila parov vozlišč na določeni razdalji, njegov odvod v točki 1 pa je enak Wienerjevemu indeksu, tj. $H'_G(1) = W(G)$. Omenimo, da se v člankih pojavlja tudi definicija polinoma, kjer indeks i teče od 0 dalje. V teh primerih velja $D_0(G) = |V(G)|$; glej npr. [45].

Na podoben način je definiran tudi *Hosoyev polinom vozlišča* $v \in V(G)$:

$$H_G(v; x) := \sum_{i=0}^{\text{diam}(G)} d_i(G, v)x^i,$$

ki predstavlja rodovno funkcijo zaporedja razdaljnih stopenj oziroma rasti glede na vozlišče v . Iz Hosoyevih polinomov vozlišč lahko dobimo Hosoyev polinom kot $\sum_{v \in V(G)} H_G(v; x) - |V(G)| = 2H_G(x)$. V [45] so si podrobneje pogledali vrednosti Hosoyevega polinoma v grafih katakondenziranih benzenoidov [114], tj. v grafih, kjer si isto vozlišče delita največ dva šestkotnika, ki predstavljata benzenova obroča. V sklopu disertacije pa si oglejmo rezultate, ki smo jih pridobili pri računanju Hosoyevih polinomov vozlišč v grafih katakondenziranih benzenoidov [77, 78].

Poglejmo si torej povezane ravninske grafe, ki so vloženi v šestkotniško mrežo, kjer so vsi šestkotniki medsebojno kongruentni. Vsa vozlišča grafov naj ležijo na zunanem licu, zato imajo stopnjo enako bodisi 2 bodisi 3. Da bi izračunali rast vozlišča, tj. Hosoyev polinom vozlišča, v grafu takšne oblike, izhajamo iz šestkotnika, ki dano vozlišče vsebuje ter uporabimo postopek dodajanja šestkotnikov dokler ne dobimo zahtevanega grafa. Rast se tako izračuna rekurzivno po spodnjem algoritmu 5.1.

Analizirajmo delovanje algoritma 5.1. Najprej ugotovimo, v kateri šestkotnik spada dano vozlišče. Če spada v dva, izberemo enega od njiju. Potem po poljubnem vrstnem redu označimo šestkotnike, ki so sosednji izbranemu, tj. tiste, ki si z njim delijo eno od stranic. Če le-ti ne obstajajo, imamo le en šestkotnik, zato je rast vozlišča v kar $H_{C_6}(v; x)$. S tem tudi zaključimo izvajanje algoritma. Če pa sosednji šestkotniki obstajajo, za vsakega od njih izvedemo korake 5–7. Najprej poiščemo vozlišče $v_i \in S_i$, ki je najbližje vozlišču v . Zaradi zgradbe grafov katalondenziranih benzenoidov je takšno vozlišče eno samo (glej tudi tabeli 5.1 ter 5.2). Graf G razbijemo na povezane komponente, od katerih vsaka vsebuje enega od šestkotnikov S_i , ki so sosednji S , nato pa rekurzivno izračunamo Hosoyev polinom vozlišča v_i v grafu, ki vsebuje S_i . Ko imamo Hosoyeve polinome komponent, jih združimo po formuli iz vrstice 8. Upoštevati moramo tudi prispevke k rasti vozlišč šestkotnika S , ki ne spadajo v nobeno od komponent, polinomom rasti komponent pa dodati razdaljo do vozlišča, katerega polinom računamo.

Algoritem 5.1: RAST(G, v)

VHOD: graf G , vozlišče v

IZHOD: Hosoyev polinom vozlišča v ; $H_G(v; x)$

- ```

{
1. naj bo S šestkotnik, ki vsebuje vozlišče v ;
2. z S_i po vrsti označimo šestkotnike, ki mejijo na S ;
3. če S nima sosednjih šestkotnikov vrni $H_{C_6}(v; x)$;
4. za vsak i
 {
5. naj bo v_i vozlišče S_i , ki je najbližje S ;
6. naj bo G_i povezana komponenta grafa G , ki vsebuje S_i , po tem,
 ko mu odstranimo vozlišča $S \setminus S_i$;
7. $H_{G_i}(v_i; x) := \text{RAST}(G_i, v_i)$;
 }
8. vrni $\bigcup_i H_{G_i}(v_i; x) \cdot x^{d(v_i, v)} + \sum_{u \in S \setminus \bigcup_i S_i} x^{d(u, v)}$;
}

```

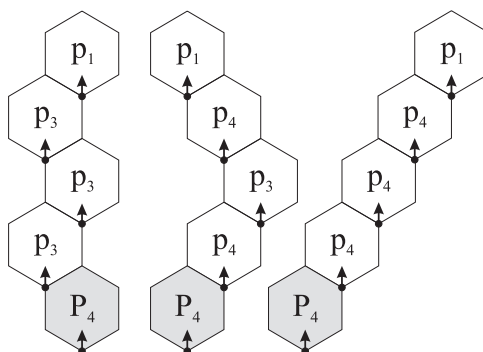
Problem algoritma je določiti razdalje nadaljevanj strukture od vozlišča, katerega rast računamo. Zato je smotrno vnaprej pregledati možne primere, napisati sistem enačb, ki ga dobimo iz 8. koraka algoritma, ter ga rešiti. V tabeli 5.1 so predstavljeni vsi možni začetki omenjene strukture  $P_i$ , kjer je  $1 \leq i \leq 10$ , ter formule za izračun njihovih rasti. V tabeli 5.2 pa vidimo, na kakšen način se lahko struktura nadaljuje ( $p_i$  za  $1 \leq i \leq 5$ ). Povedano drugače, vsakemu

šestkotniku s pomočjo tabel 5.1 in 5.2 določimo, kakšen tip ima ter uporabimo postopek, ki smo ga predstavili pri preučevanju rasti v neskončnih grafih, le da namesto posameznih vozlišč gledamo šestkotnike.

Poglejmo si uporabo postopka na primeru s slike 5.1. Hosoyev polinom označenih vozlišč v šestkotnikih sive barve je za vse tri grafe enak, saj velja  $H(p_3; x) = H(p_4; x)$  (op. oznako grafa bomo izpuščali, kjer ne bo potrebna). Dobimo ga iz sistema enačb

$$\begin{aligned} H(P_4; x) &= 1 + 2x + (1 + H(p_3^1; x))x^2, \\ H(p_3^{(i)}; x) &= 1 + 2x + (1 + H(p_3^{(i+1)}; x))x^2 \text{ za } 1 \leq i \leq 2, \\ H(p_3^{(3)}; x) &= 1 + 2x + (1 + H(p_1; x))x^2, \\ H(p_1; x) &= 1 + 2x + 2x^2 + x^3. \end{aligned}$$

Kot rezultat dobimo  $H(P_4; x) = (x^{11} - 1)(x + 1)/(x - 1) = 1 + 2 \sum_{i=1}^{10} x^i + x^{11}$ , vendar je potrebno opozoriti, da imajo šestkotniki na sliki 5.1 5 tipov kot smo jih definirali v poglavju o rasti v neskončnih grafih, saj lahko vsaka struktura na slikah 5.2 predstavlja več različnih tipov.



Slika 5.1: Trije benzenoidni grafi z istim Hosoyevim polinomom za izbrana vozlišča, ki so odebeljena v sivo obarvanih šestkotnikih (spodaj).

Tabeli 5.1 in 5.2 sta uporabni tudi za izračun razdaljnih ostankov benzenoidnega grafa, kot je razvidno iz naslednjih trditev.

**Trditev 72 ([77]).** Naj bo  $G$  graf katakondenziranega benzenoida, ki ima za koren vozlišče  $v \in V(G)$ . Potem je razdaljni ostanek  $Res(G, G[\{v\}])$  sestavljen iz unije nesosednjih vozlišč grafa  $G$ .

**Trditev 73 ([77]).** Naj bo  $G$  graf katakondenziranega benzenoida, ki ima za koren sosednji vozlišči  $\{u, v\} \in E(G)$ . Potem je razdaljni ostanek  $Res(G, G[\{u, v\}])$  bodisi

1. unija nesosednjih vozlišč,

2. *par sosednjih vozlišč,*
3. *unija možnosti 1. in 2.,*
4. *dva para sosednjih vozlišč.*


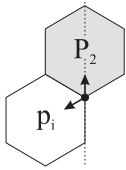
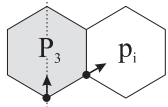
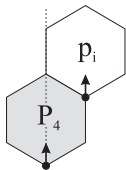
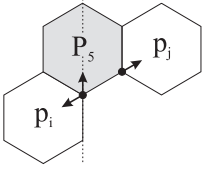
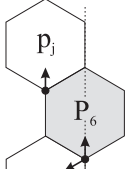
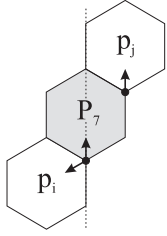
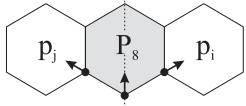
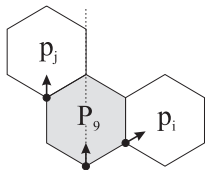
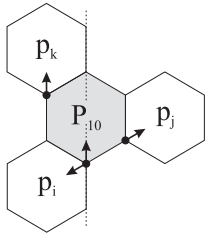
|                                                                                       |                                                        |
|---------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
|      | $H(P_1; x) = 1 + 2x + 2x^2 + x^3$                      |
|      | $H(P_2; x) = H(p_i; x) + x + 2x^2 + x^3$               |
|      | $H(P_3; x) = 1 + (1 + H(p_i; x))x + x^2 + x^3$         |
|    | $H(P_4; x) = 1 + 2x + (1 + H(p_i; x))x^2$              |
|    | $H(P_5; x) = H(p_i; x) + H(p_j; x)x + x^2 + x^3$       |
|    | $H(P_6; x) = H(p_i; x) + x + (1 + H(p_j; x))x^2$       |
|    | $H(P_7; x) = H(p_i; x) + x + (1 + H(p_j; x))x^2$       |
|    | $H(P_8; x) = 1 + (H(p_i; x) + H(p_j; x))x + x^3$       |
|   | $H(P_9; x) = 1 + (1 + H(p_i; x))x + H(p_j; x)x^2$      |
|  | $H(P_{10}; x) = H(p_i; x) + H(p_j; x)x + H(p_k; x)x^2$ |

Tabela 5.1: Vsi možni začetni šestkotniki (v sivem) ter nadaljevanja strukture ( $p_i$ ,  $p_j$  ter  $p_k$ ). Izbrano vozlišče je odebeljeno in opremljeno s puščicami, ki kažejo smer računanja rasti. Črtkane črte kažejo možne simetrije.

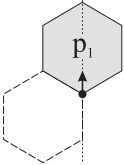
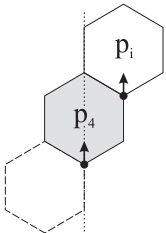
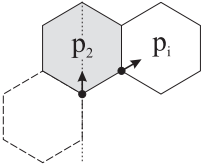
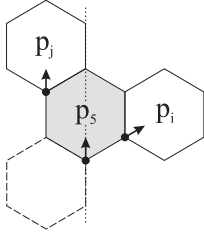
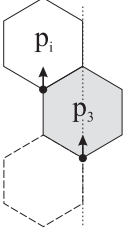
|                                                                                                                                    |                                                                                                                                        |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  $H(p_1; x) = 1 + 2x + 2x^2 + x^3$                |  $H(p_4; x) = 1 + 2x + (1 + H(p_i; x))x^2$           |
|  $H(p_2; x) = 1 + (1 + H(p_i; x))x + x^2 + x^3$ |  $H(p_5; x) = 1 + (1 + H(p_i; x))x + H(p_j; x)x^2$ |
|  $H(p_3; x) = 1 + 2x + (1 + H(p_i; x))x^2$      |                                                                                                                                        |

Tabela 5.2: Vsi možni nadaljevalni šestkotniki (v sivem), šestkotniki predhodne strukture (črtkani) ter nadaljevanja strukture ( $p_i$  in  $p_j$ ). Izbrano vozlišče je odebeljeno in opremljeno s puščicami, ki kažejo smer računanja rasti. Črtkane črte kažejo možne simetrije.

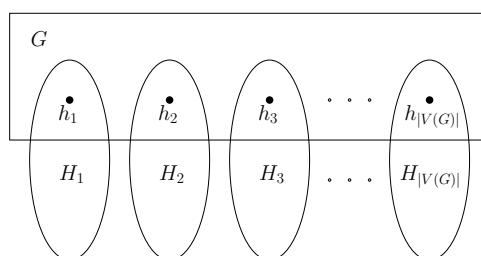
## 5.2 Razdaljne porazdelitve v računalniških omrežjih

V prvem od primerov uporabe rasti v računalništvu si oglejmo razdalje med vozlišči v grafih, ki predstavljajo računalniška omrežja. Razdalje med vozlišči so namreč sorazmerne s časom, ki je potreben za komunikacijo med procesorji v omrežjih, kar je še posebej uporabno pri porazdeljenem računanju. Privzeli bomo, da je velikost sporočil enaka in frekvenca sporočanja porazdeljena enakomerno. Poglejmo si omrežja, ki sestojijo iz hrbteničnega omrežja ter perifernih omrežij. Vsako od slednjih ima poseben prehodni procesor, ki je bodisi del hrbteničnega omrežja bodisi povezan z natanko enim procesorjem hrbteničnega omrežja. Omrežja naj bodo tudi *homogena*, tj. vsi procesorji hrbteničnega omrežja so bodisi hkrati prehodni procesorji bodisi hkrati povezani s prehodnimi procesorji.

Izračunajmo, kakšne so razdalje med vozlišči, če ustvarimo zgoraj omenjeni vrsti omrežij. Pomagali si bomo s Hosoyevim polinomom, ki je ravno rodovna funkcija razdaljne porazdelitve. Naj graf  $G$  predstavlja hrbtenično omrežje. Dodajmo mu  $|V(G)|$  kopij grafa  $H$ , tako da vozlišče  $h \in V(H)$  (prehodni procesor) iz vsake kopije identificiramo z enim od vozlišč grafa  $G$ . Tedaj dobimo omrežje na sliki 5.2. Operacijo, s katero naredimo omenjeni postopek, imenujemo *sklepni produkt*<sup>3</sup>  $Art[G, (H, r)]$ . Razdaljna porazdelitev sledi iz naslednjega izreka.

**Izrek 74 ([32]).** Za grafa  $G$  in  $H$  ter vozlišče  $h \in V(H)$  velja

$$H_{Art[G, (H, h)]}(x) = H_G(x)H_H(h; x)^2 + |V(G)|H_H(x).$$



Slika 5.2: Omrežje, dobljeno z uporabo sklepnega produkta grafov  $G$  in  $H$ , kjer je vsako vozlišče  $v_i \in V(G)$  identificirano z vozliščem  $h_i \in V(H_i)$ , ki predstavlja  $i$ -to kopijo vozlišča  $h$  v grafu  $H$ .

Drugo vrsto omrežja zgradimo s tako imenovanim *visečim produktom*<sup>4</sup>, ki je v resnici poseben primer sklepnega produkta, kjer grafu  $H$  dodamo povezavo  $\{h, h'\}$ , da dobimo nov graf  $H'$ , vozlišče  $h'$  pa identificiramo s hrbteničnim omrežjem; glej sliko 5.3. Tako velja

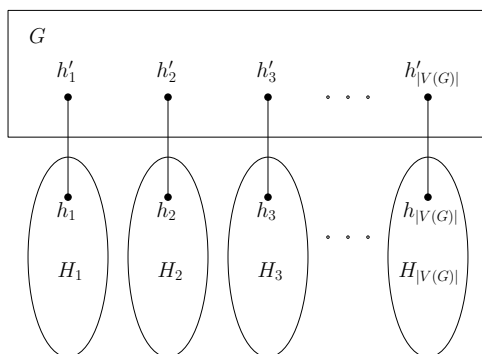
<sup>3</sup>angl. articulated product; odtod oznaka *Art*

<sup>4</sup>angl. suspended product; odtod oznaka *Susp*

$Susp[G, (H, h)] = Art[G, (H', h')]$ , zato lahko izpeljemo naslednji izrek za razdaljno porazdelitev v visečem produktu.

**Izrek 75 ([32]).** Za grafa  $G$  in  $H$  ter vozlišče  $h \in V(H)$  velja

$$H_{Susp[G, (H, h)]}(x) = H_G(x)(1 + xH_H(h; x))^2 + |V(G)|(H_H(x) + xH_H(h; x)).$$



Slika 5.3: Omrežje, dobljeno z uporabo visečega produkta grafov  $G$  in  $H$ , kjer je vsako vozlišče  $v_i \in V(G)$  identificirano z vozliščem  $h'_i \in V(H'_i)$ , ki predstavlja  $i$ -to kopijo vozlišča  $h'$  v grafu  $H$  z dodano povezavo  $\{h', h\}$ .

V članku [32] si bralec lahko ogleda povprečne razdalje med vozlišči v konkretnih primerih grafov, ki sestavljajo omenjeni vrsti omrežij. Poleg tega so tam prikazani tudi izračuni Hosoyevega polinoma v nehomogenih in uteženih omrežjih.

### 5.3 Zanesljivost računalniških omrežij

Računalniško omrežje lahko v najbolj preprosti obliki predstavimo z grafom  $G$ , kjer vozlišča označujejo računalnike, povezave pa nam povedo, kateri izmed njih so povezani direktno. Denimo, da se vsaka povezava prekine neodvisno od ostalih s fiksno verjetnostjo  $q$  ( $0 < q < 1$ ). Zanesljivost omrežja  $(G, q)$  se ponavadi definira z izrazom, ki meri stopnjo povezanosti. Najbolj splošna mera izraža verjetnost, da je omrežje  $(G, q)$  nepovezano [11] in jo zapišemo kot

$$P(G, q) := \sum_{S \subseteq E(G)} f(S)q^{|S|}(1 - q)^{|E(G) \setminus S|},$$

kjer je  $f(S)$  enaka 1, če je  $S$  prerezna množica grafa  $G$ , in 0 sicer. Ta mera je preproba za drevesa, kjer je  $P(T, q)$  kar verjetnost, da je v omrežju  $(T, q)$  prekinjena vsaj ena povezava, tj.  $P(T, q) = 1 - (1 - q)^{|V(T)| - 1}$ . Zaradi tega je bila predlagana finejša mera  $PC(G, q)$  [2], ki loči

tudi med različnimi drevesi in ugotavlja zanesljivost povezav med pari vozlišč. Definirana je kot

$$PC(G, q) := \binom{n}{2} - \sum_{S \subseteq E(G)} CN(S)q^{|S|}(1-q)^{|E(G) \setminus S|},$$

kjer je  $CN(S)$  število parov vozlišč, ki niso povezana v grafu  $G$  z odstranjenimi  $S$  povezavami. Če označimo s  $P_{u,v}(G, q)$  verjetnost, da sta  $u$  in  $v$  povezana v  $(G, q)$ , lahko zapišemo  $PC(G, q) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} P_{u,v}(G, q)$ . Če je graf  $G$  drevo, potem obstaja med vsakima vozliščema natanko ena pot. Torej je verjetnost, da sta dve vozlišči povezani, v drevesu  $T$  enaka verjetnosti, da na poti med njima ni prekinjena nobena povezava, tj.  $P_{u,v}(T, q) = (1-q)^{d(u,v)}$ . Tako velja

$$PC(T, q) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(T)} (1-q)^{d(u,v)} = \sum_{i=1}^{|V(T)|-1} D_i(T)(1-q)^i,$$

kjer je  $D_i(T)$   $i$ -ti element razdaljne porazdelitve drevesa  $T$  in označuje število neurejenih parov vozlišč, ki so v  $T$  na razdalji  $i$ . Torej razdaljna porazdelitev drevesa  $T$  natančno določa *polinom zanesljivosti*  $PC(T, q)$  omrežja  $(T, q)$ .

Za omrežje  $(G, q)$  rečemo, da je *maksimalno uniformno zanesljivo*, če je  $PC(G, q) > PC(H, q)$  za vsak  $0 < q < 1$  ter vsak graf  $H$  z enakim številom vozlišč in povezav. Podobno definiramo *minimalno uniformno zanesljivost*. Izkaže se, da je  $K_{1,n-1}$  maksimalno,  $P_n$  pa minimalno uniformno zanesljivo drevo na  $n$  vozliščih [2, izreka 3 in 4].

Ker dobimo razdaljno porazdelitev iz zaporedja razdaljnih stopenj, lahko definiramo tudi *zanesljivost vozlišča*  $v \in V(G)$  kot pričakovano število vozlišč iz  $G$ , ki so povezana z  $v$ . V drevesu  $T$  to zapišemo kot

$$PC(T, v, q) = \sum_{i=1}^{e(v)} d_i(T, v)(1-q)^i,$$

zato je  $PC(T, q) = 1/2 \sum_{v \in V(T)} PC(T, v, q)$ .

Drevo z določeno zanesljivostjo torej lahko zgradimo s pomočjo bodisi zaporedja razdaljnih stopenj bodisi s pomočjo razdaljne porazdelitve. Vendar, kot smo omenili v izrekih 14 in 15, je problem realizacije drevesa z danim (celotnim ali delnim) zaporedjem razdaljnih stopenj  $\mathcal{NP}$ -poln. Medtem je za delno razdaljno porazdelitev, ko imamo znana le prva dva člena, problem rešljiv v polinomskem času [118], v ostalih primerih pa težavnost še ni znana.

## 5.4 Problem prenosa podatkov

V tem razdelku si bomo pogledali problem prenosa podatkov, ki je pomemben pri uporabi porazdeljenega računanja, še posebej pri uporabi paralelnih algoritmov. Predstavili bomo *eno-izvorni model*, kjer vozlišče  $v$  grafa  $G$ , s katerim predstavimo računalniško omrežje, pošlje nek podatek ostalim vozliščem ob naslednjih omejitvah:

- vsak prenos podatka poteka med dvema vozliščema,
- vsak prenos podatka traja eno časovno enoto oz. en korak,
- v enem koraku lahko vozlišče pošlje podatek le enemu od sosedov.

Čas prenosa iz vozlišča  $v$ , ki ga označimo z  $B(v)$ , definiramo kot minimalno število korakov, ki je potrebno za obvestitev ostalih vozlišč o danem podatku. Ker se število obveščenih vozlišč z vsakim korakom največ podvoji, je  $B(v) \geq \log_2 |V(G)|$ . To mejo, ki ne upošteva lastnosti danega grafa, se da z uporabo razdaljnih stopenj še izboljšati, zato si oglejmo uporabljen postopek.

Osredotočimo se na poti dolžine  $n$ , ki se začnejo v vozlišču  $v$ . Število vozlišč, ki so vsaj na razdalji  $n$  od  $v$ , je enako  $R_n(G, v) = \sum_{i=n}^{e(v)} d_i(G, v)$ . Vsem tem vozliščem je potrebno poslati podatek v korakih  $n$  do  $B(v)$  po poteh dolžine vsaj  $n$ . S tem razmislekom pridemo do naslednjega izreka.

**Izrek 76 ([27]).** Naj bo  $R_n(G, v)$  število vozlišč grafa  $G$ , ki so na razdalji vsaj  $n$  od izvora podatka  $v$ . Naj bo  $\mathcal{T}$  minimalen  $t$ , za katerega velja  $\sum_{i=n}^t \binom{t}{i} \geq R_n(G, v)$ . Potem je  $B(v) \geq \mathcal{T}$  oziroma čas prenosa je vsaj  $\mathcal{T}$ .

Če ne vemo nič o grafu  $G$ , lahko izrek 76 uporabimo le za primer  $n = 0$  ter posledično  $R_0(G, v) = |V(G)|$ , od koder dobimo znano mejo  $B(v) \geq \log_2 |V(G)|$ . Lahko pa izrek uporabimo tudi v obratni smeri. Če je  $\mathcal{T} = e(v)$ , sledi  $R_{e(v)}(G, v) \leq 1$ , tj. obstajati mora le eno samo vozlišče, ki je najbolj oddaljeno od  $v$ . Za  $\mathcal{T} = e(v) + 1$  ugotovimo, da je najbolj oddaljenih od  $v$  lahko od 2 do  $e(v) + 1$  vozlišč itd. Približne omejitve za čas prenašanja, ki sledijo iz izreka 76, vidimo v naslednji posledici.

**Posledica 77 ([27]).** Čas prenašanja podatka  $B(v)$  je enak vsaj

$$\mathcal{T} = \begin{cases} 2n - 1, & \text{če je } R_n(G, v) = 4^{n-1}, \\ \log_2(4^{n-1} + R_n(G, v)), & \text{če je } R_n(G, v) > 4^{n-1}, \\ \frac{n}{2} + (n!(R_n(G, v) - 1))^{1/(n+1)}, & \text{če je } R_n(G, v) < 4^{n-1}. \end{cases}$$

Ker način prenašanja podatkov ustvari vpeto drevo v izbranem grafu, je zanimivo pogledati, kaj se zgodi, če je prvoten graf enak drevesu. V tem primeru so vozlišča, ki so obveščena prek poti dolžine  $n$ , ravno toliko oddaljena od izvora podatka, zato dobimo naslednjo posledico izreka 76.

**Posledica 78 ([27]).** Naj bo  $T$  drevo in  $\mathcal{T}$  minimalen  $t$ , za katerega velja  $\binom{t}{n} \geq d_n(G, v)$ . Potem je  $B(v) \geq \mathcal{T}$ .

Če želimo prenašanje zaključiti v minimalnem številu korakov, tj.  $e(v)$ , potem dobimo iz posledice 78 pogoj, da je lahko na razdalji  $n$  od izvora največ  $\binom{e(v)}{n}$  vozlišč. Grafi, ki imajo natanko toliko vozlišč na vsakem nivoju in zato omogočajo prenos podatka v  $e(v)$  korakih, so tako imenovana *binomska drevesa*.

## 5.5 Status

V članku Hararyja [53] srečamo zanimivo aplikacijo razdaljnih stopenj v družboslovju, ki se nanaša na položaj posameznika v družbi. *Status osebe*  $A$  v neki organizaciji, označen z  $s(A)$ , je definiran kot število oseb direktno podrejenih njej, ki mu prištejemo dvakratno število oseb, ki so direktno podrejeni njim itd. Strukturo, ki jo s tem opišemo, lahko predstavimo z grafom, ki je tokrat usmerjen, saj moramo prikazati relacijo podrejenosti oziroma nadrejenosti. Če z  $a_i(A)$  označimo število podrejenih  $A$ -ju na  $i$ -tem nivoju, z  $(a_1(A), a_2(A), \dots, a_{e(A)}(A))$  označimo *statusni vektor* osebe  $A$ , ki je sicer skladen z definicijo zaporedja razdaljnih stopenj v grafu, vendar vsota njegovih elementov ni nujno enaka številu vseh oseb v organizaciji. Status osebe  $A$  je tako  $s(A) = \sum_{i=1}^{e(A)} ia_i$ , kar sovpada z definicijo razdalje vozlišča. Seveda to velja le za hierarhične organizacije, katerih grafi ne vsebujejo ciklov, sicer bi bila vsota neskončna. Alternativno lahko definiramo pogoj, da je isti podrejeni štet le prvokrat.

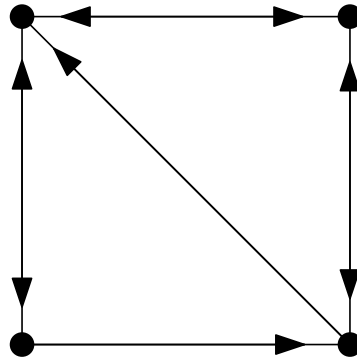
*Standardna organizacija* je definirana kot usmerjeno polno  $b$ -tiško drevo, kjer so vse povezave usmerjene stran od korena. Če definiramo izraz  $s_{b,i}$  kot status osebe na nivoju  $i$  v  $b$ -tiškem drevesu, velja

$$s_{b,i} = \frac{b}{(b-1)^2} (1 - (h-i+1)b^{h-i} + (h-i)b^{h-i+1}),$$

kjer je  $h$  višina drevesa.

Denimo, da ima oseba  $A$  fiksno število podrejenih, npr.  $n$ . Kako naj jih razporedimo, da bo njen status največji (najmanjši) mogoč? Ker oseba  $A$  definira drevo, v katerem sama nastopa kot koren, je moč hitro ugotoviti, da je njen najmanjši status  $n$ , ko so ji vsi direktno podrejeni, največji pa  $n(n+1)/2$ , ko je drevo v resnici pot [53, izrek 3].

V primeru, ko je status vseh oseb enak, govorimo o enakopravni organizaciji, kar sovpada z lastnostjo sebi-medianskosti grafa, ki to organizacijo predstavlja. Medtem ko je pri neusmerjenih grafih najmanjši primer sebi-medianskega (in hkrati DDR-grafa), ki ni vozliščno tranzitiven, reda 7, je pri usmerjenih grafih takšen graf že reda 4, kot je razvidno s slike 5.4.



Slika 5.4: Najmanjši primer usmerjenega sebi-medianskega grafa, ki ni vozliščno tranzitiven. Razdalja vsakega vozlišča je namreč enaka 4.

# Poglavje 6

## Zaključek

V doktorski disertaciji smo predstavili ter podrobno analizirali koncept rasti v neskončnih (lokalno končnih) in končnih grafih. Hkrati smo obravnavali tudi rasti sorodne koncepte razdalje vozlišča oziroma grafa, razdaljno uravnoveženost grafa, razdaljni ostanek grafa ter razdaljno porazdelitev v grafu. Naš osnovni cilj je obsegal pripravo celovitega in poenotenega pregleda področja rasti v grafih od izvora pojma prek obstoječih rezultatov do odprtih problemov, ki smo se jih v sklopu disertacije lotili in jih nekaj tudi rešili. Poleg že sprejetih [76] ter objavljenih prispevkov [77, 78], smo svoje rezultate predstavili tudi na konferencah [74], pripravljamo pa tudi nove izvirne znanstvene prispevke s tega področja [18, 75].

### 6.1 Prispevki k znanosti

Še enkrat pogledjmo bistvene izvirne prispevke k znanosti, ki so nastali v okviru disertacije.

#### **Izpeljava algoritma za izračun rasti**

Na podlagi ideje iz neobjavljenega rokopisa [88] smo izpeljali algoritem, ki vsakemu vozlišču grafa priredi tip posplošenega stožca, kateri predstavlja rodovno funkcijo (sferične) rasti za podgraf, definiran z izbranim vozliščem. V kolikor je različnih tipov končno mnogo, dobimo rodovno funkcijo rasti celotnega grafa iz sistema linearnih enačb, ki ga z Gaussovo eliminacijo rešimo v obsegu racionalnih funkcij (razdelek 3.4).

#### **Izračun rasti v polpravilnih tlakovanjih Evklidske ravnine**

Algoritem za izračun rasti smo uporabili na znani družini grafov, za katere je bila do tedaj rast izračunana le v nekaj posameznih primerih. Zaradi vozliščne tranzitivnosti ter drugih simetrij v tlakovanjih smo uspeli najti končno število tipov posplošenih stožcev

in izpeljati rodovne funkcije rasti, iz katerih smo s pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto pridobili funkcije rasti za vsa tlakovanja (razdelek 3.5 ter dodatek A).

### Problem I (Bloom in soavtorji [10])

Prvi problem je spraševal po odstotku  $r$ -regularnih grafov, ki spadajo med DDR-grafe. Nanj smo poskušali odgovoriti v splošnem (tabela 4.1 na str. 41) ter v primeru kubičnih grafov (tabela 4.2 na str. 41). V splošnem se je izkazalo, da med grafi reda od 2 do 14 okoli 90% regularnih grafov spada med DDR-grafe, kar je posledica dejstva, da so DDR-grafi vsi regularni grafi s premerom 2 ali manj. Pri kubičnih grafih pa rezultati kažejo, da je število DDR-grafov zanemarljivo v primerjavi s številom kubičnih grafov reda od 4 do 22. Pridobili smo torej neke ocene, a vprašanje ostaja odprto.

### Problem IV (Bloom in soavtorji [10])

Četrti problem je spraševal po obstoju kubičnih in 4-regularnih DDR-grafov s trivialno grupo avtomorfizmov. V primeru kubičnih grafov je bilo znano, da le-ti, če obstajajo, niso manjši od reda 16, a smo s preverjanjem vseh grafov odkrili, da morajo biti vsaj reda 24 (v kolikor obstajajo). Med 4-regularnimi grafi pa smo našli dva grafa reda 10, ki imata le en avtomorfizem in sta hkrati najnižjega možnega reda (slika 4.5 na strani 44).

### Karakterizacija razdaljno uravnoveženih grafov stopnje 2

Handa [52] je pokazal, da imajo dvodelni razdaljno uravnoveženi grafi, ki niso sodi cikli ali  $K_2$ , minimalno stopnjo 3. To trditev smo posplošili in dokazali, da imajo razdaljno uravnoveženi grafi vozlišče stopnje 2 natanko tedaj, ko so cikli (izrek 37 na strani 52).

### Obstoj neskončnih družin razdaljno uravnoveženih grafov, ki niso DDR-grafi

Dokazali smo obstoj neskončne družine neregularnih in regularnih razdaljno uravnoveženih grafov, ki niso DDR-grafi (izreka 40 in 41 na str. 56). Našli smo tudi semisimetričen graf ter družino posplošenih Petersenovih grafov  $GP((2k - 1)(k + 1), 2k)$  za  $k \geq 4$ , ki zadoščata temu pogoju (izrek 50 na str. 71).

### Določitev zahtevnosti problema dopolnitve do razdaljno uravnoveženega grafa (PRU)

Dokazali smo, da je odločitvena oblika problema iskanja najmanjšega števila povezav, ki jih je potrebno dodati grafu, da le-ta postane razdaljno uravnovežen,  $\mathcal{NP}$ -poln problem (izrek 46 na str. 63). Enako smo dokazali tudi v primeru DDR-grafov. Dalje smo pokazali, da problem postane polinomski na grafih s premerom 2 (izrek 48) ter da je polinomski, če dodamo fiksno število povezav.

### Uporaba hevristik za reševanje problema PRU

Na ciklu z dodano povezavo smo poskušali s pomočjo uporabe hevristik ugotoviti, koliko povezav je potrebno dodati, da zopet postane razdaljno uravnovežen. Najbolje se je odrezala metoda MAX-VSE, ki poišče vse pare vozlišč z največjo razdaljo ter vodi pos-

topek reševanja vzporedno, vendar je njena časovna zahtevnost prevelika. Zato je bolje vzeti le en par vozlišč (npr. kar prvega po vrsti) in nadaljevati postopek. Ta algoritem (MAX-MAX) je sicer približno polovico slabši od optimalne rešitve (slika 4.18 na str. 70), vendar vrne rešitev v polinomskem času  $\mathcal{O}(n^3m)$ .

### Razdaljni ostanek grafa

Definirali smo nov koncept, vezan na razdalje v grafu, ki opisuje množico vozlišč najdlje od korena. Pregledali smo razdaljne ostanke v dvodelnih grafih, produktnih grafih ter vozliščno tranzitivnih grafih (razdelek 4.5).

### Rast v kemijski teoriji grafov

Izpeljali smo algoritem za izračun Hosoyevega polinoma vozlišč v grafih katakondenziranih benzenoidov, ki uporablja isti postopek ter tipe stožcev kot smo jih definirali v razdelku 3.4, vendar vlogo vozlišča prevzame cikel  $C_6$ . Dokazali smo tudi, da imajo natančno razdaljno uravnoveženi grafi posplošeni Szegedski indeks enak  $|E(G)||V(G)|^2/4$  (razdelek 5.1).

Disertacija vsebuje tudi več manjših prispevkov k znanosti, ki dopolnjujejo obstoječe znanje predvsem na področju produktov DDR- ter DB-grafov. Prikazali smo nekaj primerov uporabe trditev in izrekov o rasti. Dokazali smo, da sebi-medianski grafi niso nujno sebi-centralni, da imajo le dvodelni DDR-grafi vrednost  $|D_i^{i-1}(u, v)|$  enako za vse povezave  $\{u, v\}$  itd.

## 6.2 Odprti problemi

V disertaciji lahko bralec opazi tudi nekaj vprašanj oziroma domnev. Na nekatere smo naleteli pri našem delu, druge pa so obstajale že od prej, a nanje nismo uspeli podati (popolnega) odgovora. Na tem mestu zato navajamo najbolj pomembne, ki predstavljajo motivacijo za nadaljnje delo na tem področju.

### Problem I (Bloom in soavtorji [10])

Kot smo omenili v prejšnjem razdelku, nam je uspelo pridobiti podatke o številu DDR-grafov med regularnimi grafi le za grafe do določenega reda. Še vedno torej obstaja odprto vprašanje o limitah  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{DDR}(n)}{\text{regularni}(n)}$  ter  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{kubični DDR}(n)}{\text{kubični}(n)}$ , kjer  $n$  predstavlja red grafa.

### Problem III (Bloom in soavtorji [10])

Tretji problem sprašuje po karakterizaciji DDR-grafov s premerom  $\geq 3$ . DDR-grafi s premerom 2 ali manj so namreč ravno regularni grafi. Balakrishnan in soavtorji [4]

so sicer postavili domnevo, da je  $G$  DDR-graf, če in samo če velja  $\sum_{x \in W_{uv}} d(u, x) = \sum_{x \in W_{vu}} d(v, x)$  za vsako povezavo  $\{u, v\} \in E(G)$ , vendar za zdaj ni niti dokazana niti ovržena.

#### **Problem IV (Bloom in soavtorji [10])**

Še vedno je odprto vprašanje o obstoju kubičnih DDR-grafov s trivialno grupo avtomorfizmov. Mi smo uspeli dokazati le, da morajo biti vsaj reda 24 (v kolikor obstajajo).

#### **Realizacija grafov**

Vemo, da je realizacija drevesa z danim (celim ali delnim) zaporedjem razdaljnih stopenj  $\mathcal{NP}$ -poln problem (izreka 14 in 15). Medtem je realizacija grafa z danim zaporedjem razdalj grafa še vedno odprt problem. Če pa privzamemo, da so vse razdalje enake npr.  $n$ , lahko takoj konstruiramo razdaljno uravnotežen graf  $K_{n+1}$  s temi razdaljami. Na drugi strani je realizacija drevesa iz delne razdaljne porazdelitve (prvih dveh členov) rešljiva v polinomskem času [118], v ostalih primerih pa njena težavnost še ni poznana.

#### **3-povezanost razdaljno uravnoteženih grafov**

Handa [52], ki je dokazal, da so razdaljno uravnoteženi grafi (razen  $K_2$ ) 2-povezani, je podal vprašanje ali so dvodelni razdaljno uravnoteženi grafi celo 3-povezani, ki je še vedno nerešeno.

#### **Povezavna tranzitivnost razdaljno uravnoteženih grafov**

Vemo, da razdaljno uravnoteženi grafi vsebujejo DDR-grafe in zato tudi grafe z različnimi oblikami simetrije (glej sliko 4.6 na str. 45). Ne vsebujejo le vseh povezavno tranzitivnih grafov ter seveda regularnih grafov. Vemo, da obstajajo regularni in neregularni DB-grafi, ki niso DDR-grafi in niso povezavno tranzitivni (Sabidussijev graf ter  $GP(35,8)$ ). Obstajajo tudi regularni DB-grafi, ki niso DDR-grafi, a so povezavno tranzitivni (graf  $C4[150,9]$  v [123]). Odprto pa obstaja vprašanje o obstoju neregularnih razdaljno uravnoteženih grafov, ki so povezavno tranzitivni.

#### **Karakterizacija razdaljno uravnoteženih posplošenih Petersenovih grafov**

V sklopu disertacije smo našli neskončno družino grafov  $GP((2k-1)(k+1), 2k)$ , ki so za  $k \geq 4$  razdaljno uravnoteženi, a niso DDR-grafi. Sumimo, da obstaja neskončno takšnih družin, vendar tega nismo uspeli dokazati. Poleg tega obstaja domneva, da za skoraj vsak  $n$  obstajajo razdaljno uravnoteženi posplošeni Petersenovi grafi  $GP(n, k)$ , kjer je  $k \geq 2$ .

# Dodatek A

## Izračun rasti v polpravilnih tlakovanjih

V poglavju o rasti v neskončnih grafih smo si na koncu pogledali tudi rast v polpravilnih tlakovanjih Evklidske ravnine. Tam smo predstavili le dobljene rezultate, tj. sferične funkcije rasti tlakovanj. Opisan je bil tudi postopek, ki vsakemu od vozlišč dodeli svoj tip posplošenega stožca glede na število in vrsto neposrednih naslednikov ter število neposrednih predhodnikov. Postopek je zahteval, da iz grafa tlakovanja najprej naredimo usmerjen graf, kjer izpustimo povezave med vozlišči na isti razdalji od korena, ostale povezave pa usmerimo stran od korena.

V dodatku so prikazani tipi posplošenih stožcev za vozlišča vseh polpravilnih tlakovanj ter izpeljani sistemi linearnih enačb, ki porodijo rodovne funkcije rasti tlakovanj. Zaradi simetrij, ki se pojavljajo v tlakovanjih, so nekateri grafi prikazani le delno, saj lahko preostale dele dobimo z zrcaljenjem. Razdaljna particija je pri posameznem tlakovanju prikazana do razdalje, do katere se še pojavljajo novi tipi posplošenih stožcev. Da so to res vsi možni tipi, je pri nekaterih tlakovanjih razvidno takoj, pri drugih pa to postane jasno s povečanjem prikazane particije, kar je prepuščeno bralcu.

Pri sistemih enačb smo zaradi preglednosti namesto oznake za rodovno funkcijo vozlišča z danim tipom posplošenega stožca pisali kar oznako tipa, tj.  $A$  namesto  $\Delta_G(A; x)$ .

Sistem linearnih enačb, iz katerega dobimo rodovno funkcijo rasti tlakovanja 3.3.3.3.6, poleg korena vsebuje 35 tipov posplošenih stožcev; glej tudi sliko [A.1](#).

$$\begin{aligned} \Delta_{3.3.3.3.6}(r; x) &= 1 + (A + B + C + D_2 + E)x, & 2K_1 &= 1 + (F_1 + J)x, \\ A &= 1 + (B + G_2 + F_1)x, & L &= 1 + (M + P + R)x, \\ B &= 1 + (G_2 + H)x, & L_1 &= 1 + (R + P_1 + Z)x, \\ C &= 1 + (I + J)x, & L_2 &= 1 + (R + P + K_1)x, \\ D &= 1 + (K + J)x, & 2M &= 1 + (J + O)x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_1 &= 1 + (K + Q)x, & 2M_1 &= 1 + (O_1 + V)x, \\
D_2 &= 1 + (K_1 + J)x, & N &= 1 + (K + G_1)x, \\
E &= 1 + (L_2 + D_2 + K_1)x, & N_1 &= 1 + (G_1 + M_1)x, \\
F &= 1 + (R + T + G)x, & O &= 1 + (G_1 + G_2)x, \\
F_1 &= 1 + (R + T + G_2)x, & O_1 &= 1 + (G + G_1)x, \\
2G &= 1 + M_1x, & P &= 1 + (J + U)x, \\
2G_1 &= 1 + Vx, & P_1 &= 1 + (U + Q)x, \\
2G_2 &= 1 + Mx, & 2Q &= 1 + (U + L_1)x, \\
H &= 1 + (N + D + M)x, & 2R &= 1 + Ux, \\
H_1 &= 1 + (N + D_1 + Z)x, & T &= 1 + (U + H_1)x, \\
I &= 1 + (O + B + G_2)x, & 3U &= 1 + Zx, \\
2J &= 1 + (L + G_2)x, & 2V &= 1 + (G + N_1)x, \\
2K &= 1 + (F + V)x, & 2Z &= 1 + (R + Q)x.
\end{aligned}$$

Sistem linearnih enačb, iz katerega dobimo rodovno funkcijo rasti tlakovanja 3.3.3.4.4, poleg korena vsebuje 7 tipov posplošenih stožcev; glej tudi sliko [A.2](#).

$$\begin{aligned}
\Delta_{3.3.3.4.4}(r; x) &= 1 + (A + 2B + 2C)x, & D &= 1 + (C + E + G)x, \\
A &= 1 + (2C + 2G)x, & 2E &= 1 + Fx, \\
B &= 1 + (B + 2G)x, & F &= 1 + 2Ex, \\
C &= 1 + (D + G)x, & 2G &= 1 + 2Gx.
\end{aligned}$$

Sistem linearnih enačb, iz katerega dobimo rodovno funkcijo rasti tlakovanja 3.3.4.3.4, poleg korena vsebuje 11 tipov posplošenih stožcev; glej tudi sliko [A.3](#).

$$\begin{aligned}
\Delta_{3.3.4.3.4}(r; x) &= 1 + (2A + 2B + C)x, & F &= 1 + (E + F + I)x, \\
A &= 1 + (C + D + E)x, & 2G &= 1 + (C + 2E)x, \\
B &= 1 + (E + F + G)x, & H &= 1 + (G + J)x, \\
C &= 1 + 2Hx, & 2I &= 1 + (E + J)x, \\
D &= 1 + (J + D)x, & 2J &= 1 + (E + K)x, \\
2E &= 1 + Ix, & K &= 1 + (I + J)x.
\end{aligned}$$

Sistem linearnih enačb, iz katerega dobimo rodovno funkcijo rasti tlakovanja 3.4.6.4, poleg

korena vsebuje 8 tipov posplošenih stožcev; glej tudi sliko [A.4](#).

$$\begin{aligned}
 \Delta_{3.4.6.4}(r; x) &= 1 + (2A + 2B)x, & 2E &= 1 + Hx, \\
 A &= 1 + (C + D + E)x, & F &= 1 + (C + G)x, \\
 B &= 1 + (E + F)x, & 2G &= 1 + 2Ex, \\
 C &= 1 + (B + E + G)x, & H &= 1 + 2Gx. \\
 D &= 1 + (E + F)x,
 \end{aligned}$$

Sistem linearnih enačb, iz katerega dobimo rodovno funkcijo rasti tlakovanja 3.6.3.6, poleg korena vsebuje 7 tipov posplošenih stožcev; glej tudi sliko [A.5](#).

$$\begin{aligned}
 \Delta_{3.6.3.6}(r; x) &= 1 + 4Ax, & E &= 1 + (C + D)x, \\
 A &= 1 + (B + C)x, & D &= 1 + Gx, \\
 B &= 1 + (B + D)x, & 2F &= 1, \\
 C &= 1 + (E + F)x, & 2G &= 1 + 2Dx.
 \end{aligned}$$

Sistem linearnih enačb, iz katerega dobimo rodovno funkcijo rasti tlakovanja 3.12.12, poleg korena vsebuje 21 tipov posplošenih stožcev; glej tudi sliko [A.6](#).

$$\begin{aligned}
 \Delta_{3.12.12}(r; x) &= 1 + (2A + B)x, & K &= 1 + Ox, \\
 A &= 1 + Cx, & L &= 1 + Px, \\
 B &= 1 + 2Dx, & M &= 1 + Rx, \\
 C &= 1 + (E + F)x, & N &= 1 + (R + S)x, \\
 D &= 1 + Gx, & O &= 1 + Tx, \\
 E &= 1 + Hx, & P &= 1 + (F + K)x, \\
 F &= 1 + Ix, & 2R &= 1, \\
 G &= 1 + (E + J)x, & S &= 1 + Ux, \\
 H &= 1 + (E + K)x, & 2T &= 1 + Vx, \\
 I &= 1 + (L + M)x, & U &= 1 + (J + K)x, \\
 J &= 1 + Nx, & V &= 1 + 2Kx.
 \end{aligned}$$

Sistem linearnih enačb, iz katerega dobimo rodovno funkcijo rasti tlakovanja 4.6.12, poleg

korena vsebuje 40 tipov posplošenih stožcev; glej tudi sliko [A.7](#).

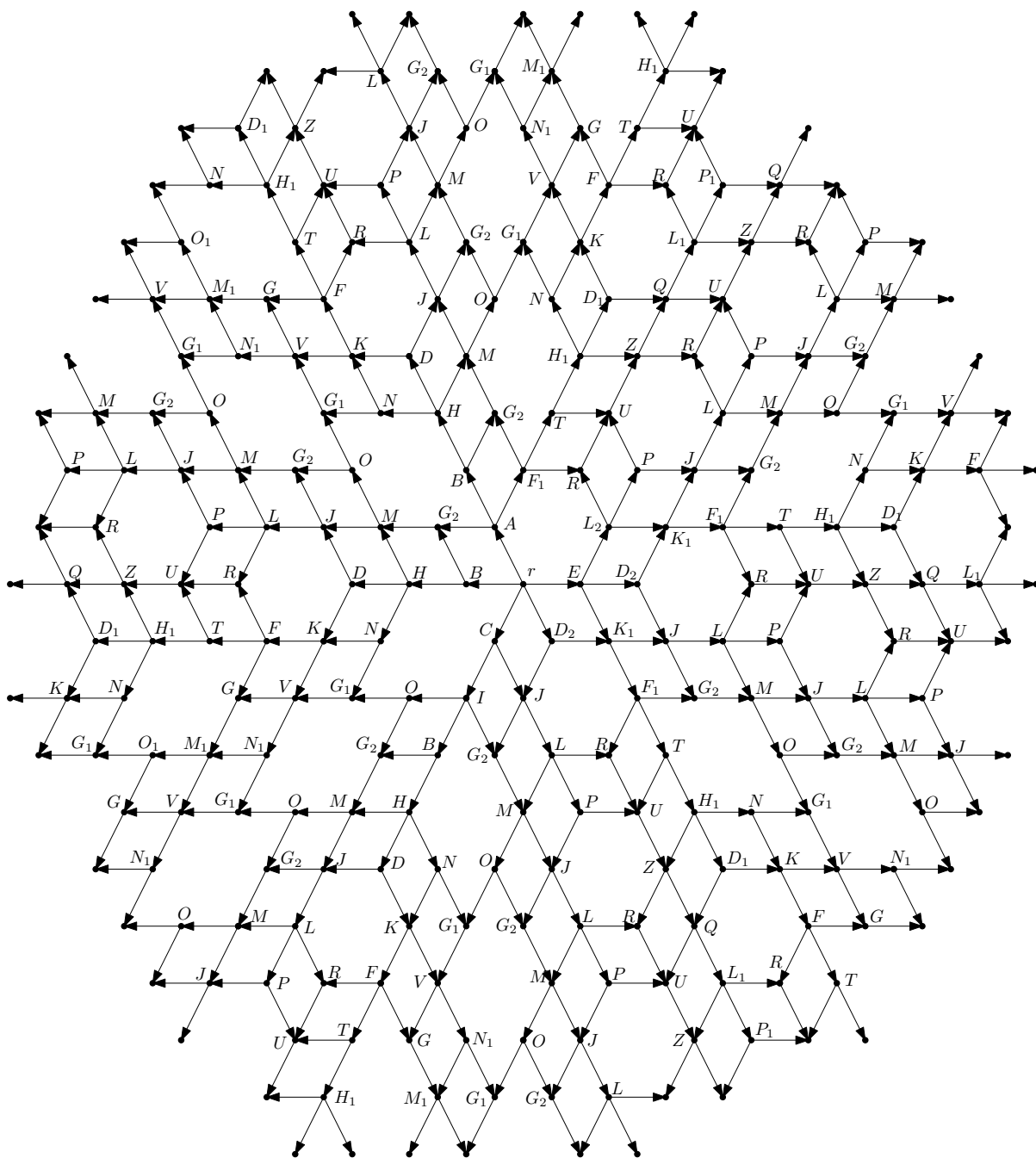
$$\begin{aligned} \Delta_{4.6.12}(r; x) &= 1 + (A_4 + B_{13} + B_{18})x, & B_{16} &= 1 + (A_3 + D_5)x, \\ A_1 &= 1 + (C_4 + C_5)x, & B_{17} &= 1 + (A_2 + D_5)x, \\ A_2 &= 1 + (C_5 + C_6)x, & B_{18} &= 1 + (A_5 + D_5)x, \\ A_3 &= 1 + (C_7 + B_{12})x, & C_1 &= 1 + (E_1 + E_3)x, \\ A_4 &= 1 + (C_7 + B_{16})x, & C_2 &= 1 + (E_3 + E_5)x, \\ A_5 &= 1 + (C_7 + B_{17})x, & C_3 &= 1 + (E_2 + D_3)x, \\ B_1 &= 1 + (B_2 + E_1)x, & C_4 &= 1 + (D_4 + E_5)x, \\ B_2 &= 1 + (B_3 + D_1)x, & C_5 &= 1 + (D_4 + E_2)x, \\ B_3 &= 1 + (C_1 + E_2)x, & C_6 &= 1 + (D_4 + E_1)x, \\ B_4 &= 1 + (B_5 + E_4)x, & C_7 &= 1 + (D_5 + E_1)x, \\ B_5 &= 1 + (B_6 + D_2)x, & 2D_1 &= 1 + B_1x, \\ B_6 &= 1 + (C_2 + E_2)x, & 2D_2 &= 1 + B_7x, \\ B_7 &= 1 + (C_3 + E_5)x, & 2D_3 &= 1 + B_4x, \\ B_8 &= 1 + (B_9 + E_4)x, & 2D_4 &= 1 + B_8x, \\ B_9 &= 1 + (A_1 + D_2)x, & 2D_5 &= 1 + B_{10}x, \\ B_{10} &= 1 + (B_{11} + E_1)x, & 2E_1 &= 1 + D_1x, \\ B_{11} &= 1 + (A_2 + D_1)x, & 2E_2 &= 1 + E_3x, \\ B_{12} &= 1 + (B_3 + D_5)x, & 2E_3 &= 1 + E_4x, \\ B_{13} &= 1 + (B_{14} + D_5)x, & 2E_4 &= 1 + D_2x, \\ B_{14} &= 1 + (B_{15} + E_1)x, & 2E_5 &= 1 + D_3x, \\ B_{15} &= 1 + (A_3 + D_1)x, \end{aligned}$$

Sistem linearnih enačb, iz katerega dobimo rodovno funkcijo rasti tlakovanja 4.8.8, poleg korena vsebuje 13 tipov posplošenih stožcev; glej tudi sliko [A.8](#).

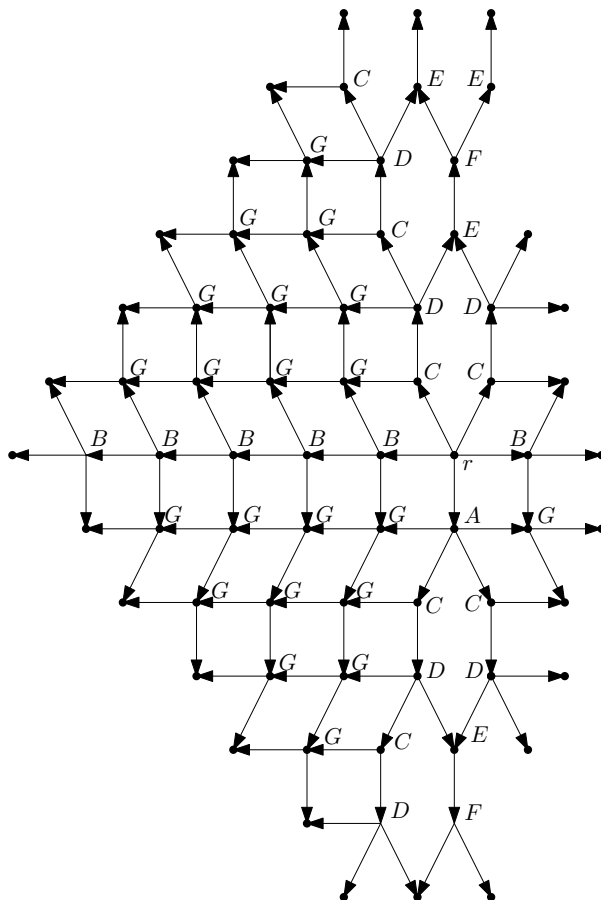
$$\begin{aligned} \Delta_{4.8.8}(r; x) &= 1 + (2A + B)x, & G &= 1 + (C + I)x, \\ A &= 1 + (C + D)x, & H &= 1 + (I + J)x, \\ B &= 1 + 2Ex, & 2I &= 1 + Kx, \\ 2C &= 1 + Fx, & J &= 1 + (H + K)x, \\ D &= 1 + (E + G)x, & 2K &= 1 + Lx, \\ E &= 1 + (C + H)x, & L &= 1 + (I + M)x, \end{aligned}$$

$$F = 1 + 2Gx,$$

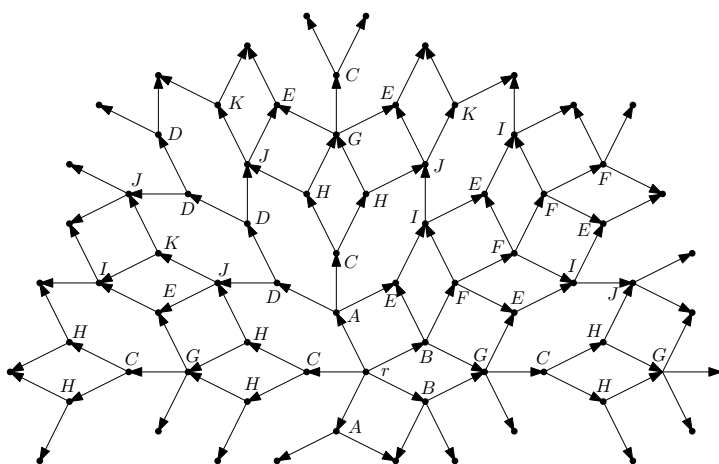
$$M = 1 + (I + K)x.$$



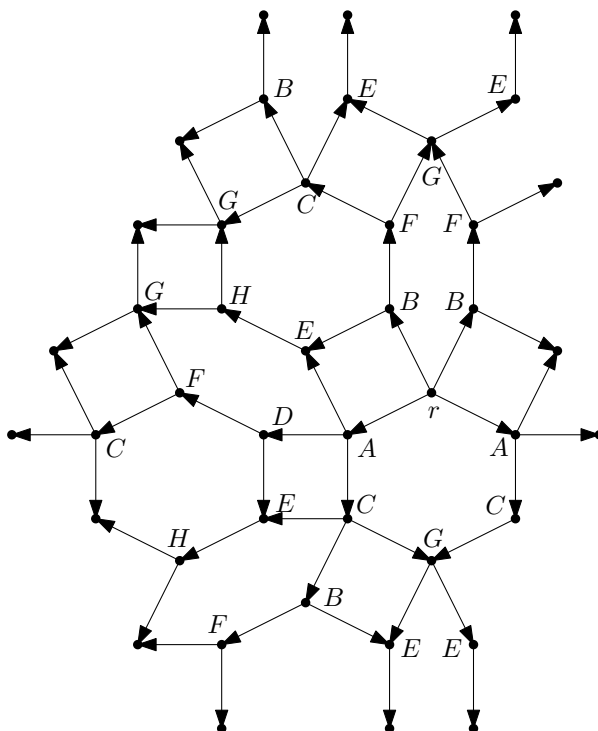
Slika A.1: V tlakovanju 3.3.3.3.6 je 35 tipov posplošenih stožcev. Vsi tipi se prvič pojavijo na razdalji  $\leq 8$  od korena  $r$ .



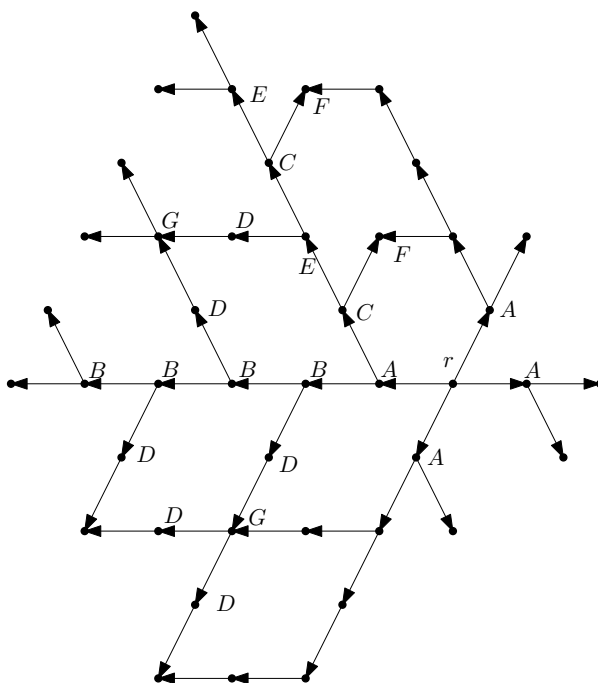
Slika A.2: V tlakovanju 3.3.3.4.4 je 7 tipov posplošenih stožcev. Vsi tipi se prvič pojavijo na razdalji  $\leq 4$  od korena  $r$ . Zaradi simetrij so nekatere oznake izpuščene.



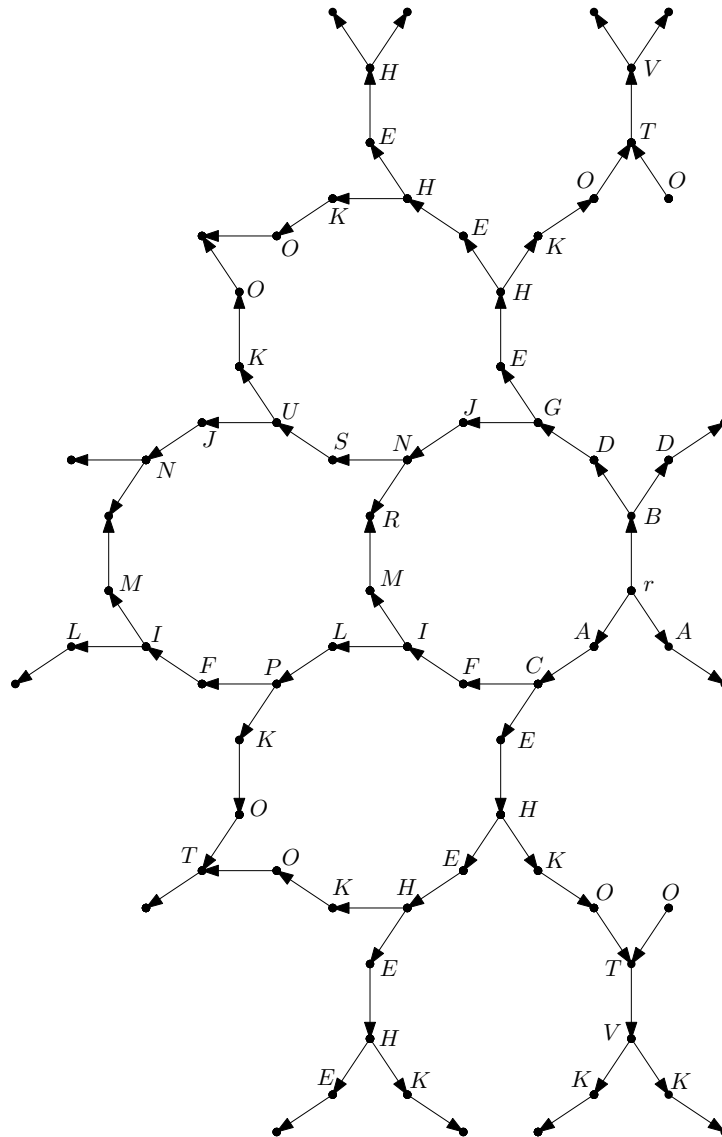
Slika A.3: V tlakovanju 3.3.4.3.4 je 11 tipov posplošenih stožcev. Vsi tipi se prvič pojavijo na razdalji  $\leq 4$  od korena  $r$ . Zaradi simetrij so nekatere oznake izpuščene.



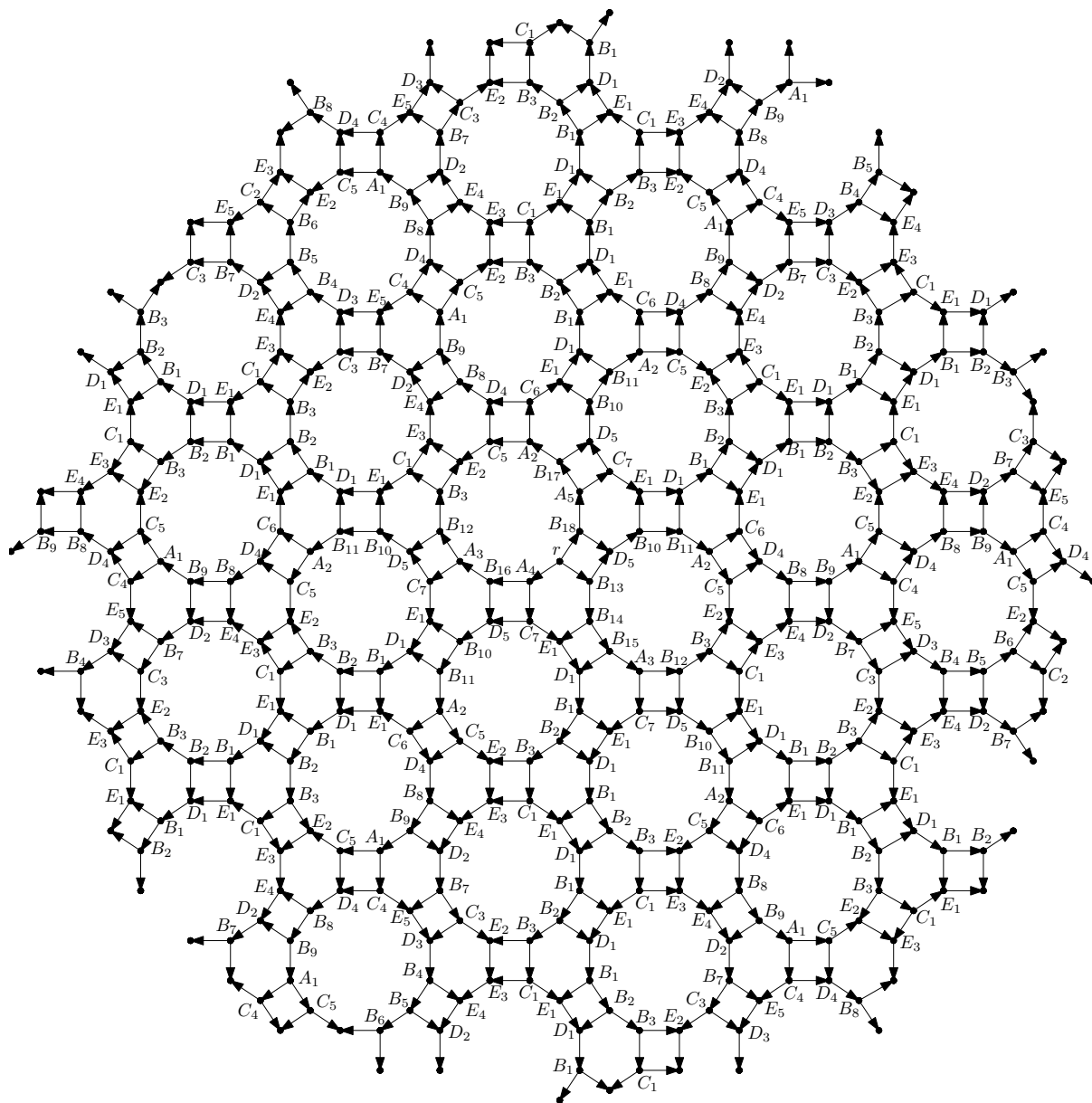
Slika A.4: V tlakovanju 3.4.6.4 je 8 tipov posplošenih stožcev. Vsi tipi se prvič pojavijo na razdalji  $\leq 3$  od korena  $r$ . Zaradi simetrij so nekatere oznake izpuščene.



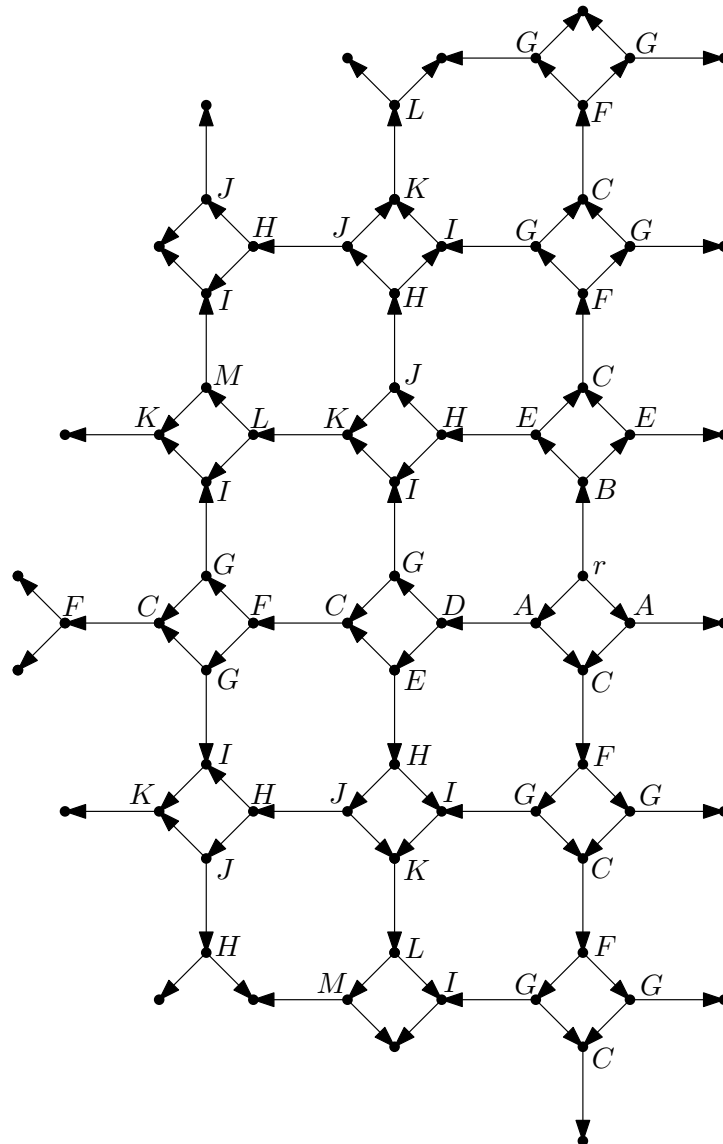
Slika A.5: V tlakovanju 3.6.3.6 je 7 tipov posplošenih stožcev. Vsi tipi se prvič pojavijo na razdalji  $\leq 4$  od korena  $r$ . Zaradi simetrij so nekatere oznake izpuščene.



Slika A.6: V tlakovanju 3.12.12 je 21 tipov posplošenih stožcev. Vsi tipi se prvič pojavijo na razdalji  $\leq 8$  od korena  $r$ . Zaradi simetrij so nekatere oznake izpuščene.



Slika A.7: V tlakovanju 4.6.12 je 40 tipov posplošenih stožcev. Vsi tipi se prvič pojavijo na razdalji  $\leq 16$  od korena  $r$ .



Slika A.8: V tlakovanju 4.8.8 je 13 tipov posplošenih stožcev. Vsi tipi se prvič pojavijo na razdalji  $\leq 7$  od korena  $r$ . Zaradi simetrij so nekatere oznake izpuščene.

# Dodatek B

## Seznam razdaljnih oznak

| oznaka                      | pomen                                                                                     |
|-----------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|
| $d_G(u, v), d(u, v)$        | razdalja med vozliščema $u$ in $v$ v grafu $G$                                            |
| $d_G(R, v)$                 | razdalja med vozliščem $v$ in podgrafom $R$ v grafu $G$                                   |
| $d_G(R, S)$                 | razdalja med dvema podgrafoma $R$ in $S$ v grafu $G$                                      |
| $d_i(G, v), \delta_G(v, i)$ | število vozlišč na razdalji $i$ od vozlišča $v$ v grafu $G$                               |
| $\gamma_G(v, i)$            | število vozlišč na razdalji največ $i$ od vozlišča $v$ v grafu $G$                        |
| $d_G(v)$                    | razdalja vozlišča $v$ v grafu $G$ , tj. vsota razdalj do vseh ostalih vozlišč             |
| $d(G)$                      | razdalja grafa $G$ ; tudi Wienerjev indeks<br>tj. polovica vsote vseh razdalj vozlišč     |
| $d_i$                       | število vozlišč na razdalji $i$ od poljubnega vozlišča v DDR-grafu                        |
| $d_R$                       | razdalja med korenom $R \subset G$ ter razdaljnim ostankom $Res(G, R)$                    |
| $D_i(G)$                    | razdaljna porazdelitev grafa $G$<br>tj. število parov vozlišč na razdalji $i$ v grafu $G$ |
| $D_i^G(S)$                  | število parov vozlišč iz $S \subset V(G)$ , ki so na razdalji $i$ v $G$                   |
| $D_j^i(u, v)$               | množica vozlišč, ki so za $i$ oddaljena od $u$ ter za $j$ oddaljena od $v$                |
| $W_{uv}^G$                  | množica vozlišč grafa $G$ , ki so bližje vozlišču $u$ kot njegovemu sosedu $v$            |
| ${}_uW_v^G$                 | množica vozlišč grafa $G$ , ki so enako oddaljena od sosednjih vozlišč $u$ in $v$         |



# Literatura

- [1] G. Adel'son-Vel'skii and Y. Shreider. The Banach mean on groups. *Uspekhi Mat. Nauk*, 12(6):131–136, 1957.
- [2] A. T. Amin, K. T. Siegrist, and P. J. Slater. Pair-connected reliability of a tree and its distance degree sequences. *Congr. Numer.*, 58:29–42, 1987. Eighteenth Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing (Boca Raton, Fla., 1987).
- [3] A. T. Balaban. Highly discriminating distance-based topological index. *Chem. Phys. Lett.*, 89(5):399–404, 1982.
- [4] K. Balakrishnan, M. Changat, I. Peterin, S. Špacapan, P. Šparl, and A. R. Subhamathi. Strongly distance-balanced graphs and graph product. *European J. Combin.*, 30(5):1048–1053, 2009.
- [5] H.-J. Bandelt and V. Chepoi. Metric graph theory and geometry: a survey. In *Surveys on discrete and computational geometry*, volume 453 of *Contemp. Math.*, pages 49–86. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.
- [6] L. Bartholdi and T. G. Ceccherini-Silberstein. Growth series and random walks on some hyperbolic graphs. *Monatsh. Math.*, 136(3):181–202, 2002.
- [7] H. Bass. The degree of polynomial growth of finitely generated nilpotent groups. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 25:603–614, 1972.
- [8] S. Bendall and R. Hammack. Centers of  $n$ -fold tensor products of graphs. *Discuss. Math. Graph Theory*, 24(3):491–501, 2004.
- [9] G. S. Bloom, J. W. Kennedy, and L. V. Quintas. Some problems concerning distance and path degree sequences. In *Graph theory (Łagów, 1981)*, volume 1018 of *Lecture Notes in Math.*, pages 179–190. Springer, Berlin, 1983.

- [10] G. S. Bloom, L. V. Quintas, and J. W. Kennedy. Distance degree regular graphs. In *The theory and applications of graphs (Kalamazoo, Mich., 1980)*, pages 95–108. Wiley, New York, 1981.
- [11] F. T. Boesch. On unreliability polynomials and graph connectivity in reliable network synthesis. *J. Graph Theory*, 10(3):339–352, 1986.
- [12] D. Bonchev and G. A. Buck. Quantitative measures of network complexity. In *Complexity in chemistry, biology, and ecology*, Math. Comput. Chem., pages 191–235. Springer, New York, 2005.
- [13] A. E. Brouwer, A. M. Cohen, and A. Neumaier. *Distance-regular graphs*, volume 18 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [14] G. O. Brunner and F. Laves. Zum Problem der Koordinationszahl. *Wiss. Z. Techn. Univ. Dresden*, 20:387–390, 1971.
- [15] F. Buckley. Self-centered graphs with a given radius. In *Proceedings of the Tenth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Florida Atlantic Univ., Boca Raton, Fla., 1979)*, Congress. Numer., XXIII–XXIV, pages 211–215, Winnipeg, Man., 1979. Utilitas Math.
- [16] F. Buckley. Equalities involving certain graphical distributions. In *Graph theory, Singapore 1983*, volume 1073 of *Lecture Notes in Math.*, pages 179–192. Springer, Berlin, 1984.
- [17] F. Buckley and F. Harary. *Distance in graphs*. Addison-Wesley Publishing Company Advanced Book Program, Redwood City, CA, 1990.
- [18] S. Cabello and P. Lukšič. The complexity of distance-balanced edge addition problem. Manuscript in preparation, 2009.
- [19] J. W. Cannon. The combinatorial structure of cocompact discrete hyperbolic groups. *Geom. Dedicata*, 16(2):123–148, 1984.
- [20] G. Chartrand, P. Erdős, and O. R. Oellermann. How to define an irregular graph. *College Math. J.*, 19(1):36–42, 1988.

- [21] F. Cheah and D. G. Corneil. The complexity of regular subgraph recognition. *Discrete Appl. Math.*, 27(1-2):59–68, 1990. Computational algorithms, operations research and computer science (Burnaby, BC, 1987).
- [22] V. Chepoi and S. Klavžar. The Wiener index and the Szeged index of benzenoid systems in linear time. *J. Chem. Inf. Comput. Sci.*, 37(4):752–755, 1997.
- [23] N. Christofides. *Graph theory*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1975. An algorithmic approach, Computer Science and Applied Mathematics.
- [24] H. S. M. Coxeter. Self-dual configurations and regular graphs. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 56:413–455, 1950.
- [25] P. de la Harpe and P. Grigorchuk. Local convexity of the growth function of finitely generated groups and question 5.2 in the Kourovka Notebook. *Algebra and Logic*, 37(6):353–356, 1998.
- [26] J. W. Demmel. *Applied numerical linear algebra*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1997.
- [27] V. V. Dimakopoulos and N. J. Dimopoulos. On broadcasting time. *Parallel Process. Lett.*, 9(1):3–8, 1999.
- [28] D. Ž. Djoković. Distance-preserving subgraphs of hypercubes. *J. Combinatorial Theory Ser. B*, 14:263–267, 1973.
- [29] A. Dobrynin and A. Kochetova. Degree distance of a graph: A degree analog of the Wiener index. *J. Chem. Inf. Comput. Sci.*, 34(5):1082–1086, 1994.
- [30] A. A. Dobrynin, R. Entringer, and I. Gutman. Wiener index of trees: theory and applications. *Acta Appl. Math.*, 66(3):211–249, 2001.
- [31] A. A. Dobrynin, I. Gutman, S. Klavžar, and P. Žigert. Wiener index of hexagonal systems. *Acta Appl. Math.*, 72(3):247–294, 2002.
- [32] B. Elenbogen and J. F. Fink. Distance distributions for graphs modeling computer networks. *Discrete Appl. Math.*, 155(18):2612–2624, 2007.
- [33] R. C. Entringer, D. E. Jackson, and D. A. Snyder. Distance in graphs. *Czechoslovak Math. J.*, 26(2):283–296, 1976.

- [34] D. B. A. Epstein, J. W. Cannon, D. F. Holt, S. V. F. Levy, M. S. Paterson, and W. P. Thurston. *Word processing in groups*. Jones and Bartlett Publishers, Boston, MA, 1992.
- [35] P. Erdős and A. Rényi. On a problem in the theory of graphs. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*, 7:623–641, 1963.
- [36] J. Folkman. Regular line-symmetric graphs. *J. Combinatorial Theory*, 3:215–232, 1967.
- [37] R. Frucht, J. E. Graver, and M. E. Watkins. The groups of the generalized Petersen graphs. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 70:211–218, 1971.
- [38] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and intractability*. W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1979. A guide to the theory of NP-completeness, A Series of Books in the Mathematical Sciences.
- [39] S. Graves, T. Pisanski, and M. E. Watkins. Growth of edge-homogeneous tessellations. *SIAM J. Discrete Math.*, 23(1):1–18, 2008/09.
- [40] R. Grigorchuk and P. de la Harpe. On problems related to growth, entropy, and spectrum in group theory. *J. Dynam. Control Systems*, 3(1):51–89, 1997.
- [41] M. Gromov. Groups of polynomial growth and expanding maps. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 53:53–73, 1981.
- [42] J. L. Gross and J. Yellen, editors. *Handbook of graph theory*. Discrete Mathematics and its Applications (Boca Raton). CRC Press, Boca Raton, FL, 2004.
- [43] B. Grünbaum and G. C. Shephard. *Tilings and patterns*. A Series of Books in the Mathematical Sciences. W. H. Freeman and Company, New York, 1989.
- [44] I. Gutman. A formula for the Wiener number of trees and its extension to graphs containing cycles. *Graph Theory Notes NY*, 27:9–15, 1994.
- [45] I. Gutman, S. Klavžar, M. Petkovšek, and P. Žigert. On Hosoya polynomials of benzenoid graphs. *Match*, 43:49–66, 2001.
- [46] W. H. Structural determination of paraffin boiling points. *J. Am. Chem. Soc.*, 69(1):17–20, 1947.
- [47] P. Hage and F. Harary. *Island Networks : Communication, Kinship, and Classification Structures in Oceania (Structural Analysis in the Social Sciences)*. Cambridge University Press, October 1996.

- [48] S. L. Hakimi. On realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a linear graph. I. *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 10:496–506, 1962.
- [49] F. Halberstam and J. Žak. A note on planarity and distance degree sequences. In *Graph theory (Łagów, 1981)*, volume 1018 of *Lecture Notes in Math.*, pages 286–289. Springer, Berlin, 1983.
- [50] R. Halin. Über unendliche Wege in Graphen. *Math. Ann.*, 157:125–137, 1964.
- [51] R. Halin. Automorphisms and endomorphisms of infinite locally finite graphs. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 39:251–283, 1973.
- [52] K. Handa. Bipartite graphs with balanced  $(a, b)$ -partitions. *Ars Combin.*, 51:113–119, 1999.
- [53] F. Harary. Status and contrastatus. *Sociometry*, 22:23–43, 1959.
- [54] M. A. Henning and H. C. Swart. On a conjecture on  $n$ th order degree regular graphs. *Quaestiones Math.*, 17(3):339–348, 1994.
- [55] M. A. Henning and H. C. Swart. On  $n$ th order degree regular trees. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 26(8):777–786, 1995.
- [56] T. Hilano. Distance degrees of vertex-transitive graphs. *Graphs Combin.*, 5(3):223–228, 1989.
- [57] T. Hilano and K. Nomura. Distance degree regular graphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 37(1):96–100, 1984.
- [58] D. A. Holton and J. Sheehan. *The Petersen graph*, volume 7 of *Australian Mathematical Society Lecture Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [59] H. Hosoya. On some counting polynomials in chemistry. *Discrete Appl. Math.*, 19(1-3):239–257, 1988. Applications of graphs in chemistry and physics.
- [60] A. Ilić, S. Klavžar, and M. Milanović. On distance-balanced graphs. *IMFM Preprint Ser.* 47 (1090), 2009.
- [61] W. Imrich and S. Klavžar. *Product graphs*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. Wiley-Interscience, New York, 2000. Structure and recognition, With a foreword by Peter Winkler.

- [62] W. Imrich and N. Seifter. A survey on graphs with polynomial growth. *Discrete Math.*, 95(1-3):101–117, 1991. Directions in infinite graph theory and combinatorics (Cambridge, 1989).
- [63] G. Indulal. Sharp bounds on the distance spectral radius and the distance energy of graphs. *Linear Algebra Appl.*, 430(1):106–113, 2009.
- [64] O. Ivanciuc, T.-S. Balaban, and A. T. Balaban. Chemical graphs with degenerate topological indices based on information on distances. *J. Math. Chem.*, 14(1):21–33, 1993. Applications of discrete and continuous mathematics in chemistry (Dubrovnik, 1991).
- [65] J. Jerebic, S. Klavžar, and D. F. Rall. Distance-balanced graphs. *Ann. Comb.*, 12(1):71–79, 2008.
- [66] D. Jungnickel. *Graphs, networks and algorithms*, volume 5 of *Algorithms and Computation in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [67] M. Juvan, B. Mohar, A. Graovac, S. Klavžar, and J. Žerovnik. Fast computation of the Wiener index of fasciagraphs and rotagraphs. *J. Chem. Inf. Comput. Sci.*, 35(5):834–840, 1995.
- [68] M. H. Khalifeh, H. Yousefi-Azari, A. R. Ashrafi, and S. G. Wagner. Some new results on distance-based graph invariants. *European J. Combin.*, 30(5):1149–1163, 2009.
- [69] S. Klavžar, A. Rajapakse, and I. Gutman. The Szeged and the Wiener index of graphs. *Appl. Math. Lett.*, 9(5):45–49, 1996.
- [70] J. Kratochvíl and M. Křivánek. On the computational complexity of codes in graphs. In *Mathematical foundations of computer science, 1988 (Carlsbad, 1988)*, volume 324 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 396–404. Springer, Berlin, 1988.
- [71] K. Kutnar, A. Malnič, D. Marušič, and Š. Miklavič. Distance-balanced graphs: symmetry conditions. *Discrete Math.*, 306(16):1881–1894, 2006.
- [72] L. M. Lesniak-Foster. Eccentric sequences in graphs. *Period. Math. Hungar.*, 6(4):287–293, 1975.
- [73] A. Lukács and N. Seifter. Lattices in graphs with polynomial growth. *Discrete Math.*, 186(1-3):227–236, 1998.

- [74] P. Lukšič. Coordination sequences for semi-regular tilings of the plane. In A. Graovac, B. Pokrić, and V. Smrečki, editors, *The 24th Dubrovnik International Course & Conference on the Interfaces among Mathematics, Chemistry and Computer Sciences*, page 47. Zagreb: Hum naklada, 2009.
- [75] P. Lukšič. Infinite families of distance-balanced graphs. Manuscript prepared for *Discrete Math.*, 2009.
- [76] P. Lukšič and T. Pisanski. Distance-residual graphs. *Arxiv preprint math. CO/0609810*, 2006. Accepted to *Discrete Math.* on Nov. 21, 2008.
- [77] P. Lukšič and T. Pisanski. Growth in catacondensed benzenoid graphs. *J. Chem. Inf. Model*, 47(3):891–896, 2007.
- [78] P. Lukšič and T. Pisanski. Growth in  $[n]$ helicenes. *Croat. Chem. Acta*, 81(2):247–252, 2008.
- [79] B. McKay. Combinatorial data – graphs. <http://cs.anu.edu.au/~bdm/data/graphs.html>, 2009.
- [80] B. McKay. Combinatorial data – trees. <http://cs.anu.edu.au/~bdm/data/trees.html>, 2009.
- [81] B. McKay. The nauty page. <http://cs.anu.edu.au/~bdm/nauty/>, 2009.
- [82] M. Meringer. Fast generation of regular graphs and construction of cages. *J. Graph Theory*, 30(2):137–146, 1999.
- [83] M. Meringer. Regular graphs page. <http://www.mathe2.uni-bayreuth.de/markus/reggraphs.html>, 2009.
- [84] D. J. Miller. The categorical product of graphs. *Canad. J. Math.*, 20:1511–1521, 1968.
- [85] Z. Miller. Medians and distance sequences in graphs. *Ars Combin.*, 15:169–177, 1983.
- [86] L. Pachter. Constructing status injective graphs. *Discrete Appl. Math.*, 80(1):107–113, 1997.
- [87] W. Pegden. Distance sequences in locally infinite vertex-transitive digraphs. *Combinatorica*, 26(5):577–585, 2006.
- [88] T. Pisanski. Growth in infinite structures. Unpublished manuscript, 2006.

- [89] T. Pisanski et al. Vega version 0.2 quick reference manual and Vega graph gallery. *IMFM, Ljubljana*, 1995.
- [90] T. Pisanski et al. Vega: System for manipulating discrete mathematical structures. <http://vega.ijp.si>, 1995–2009.
- [91] T. Pisanski and T. W. Tucker. Growth in products of graphs. *Australas. J. Combin.*, 26:155–169, 2002.
- [92] T. Pisanski and J. Žerovnik. Edge-contributions of some topological indices and tree-likeness of molecular graphs. *Ars Math. Contemp.*, 2(1):49–58, 2009.
- [93] J. Plesník. On the sum of all distances in a graph or digraph. *J. Graph Theory*, 8(1):1–21, 1984.
- [94] P. Pr ea. Distance sequences in infinite regular tessellations. *Discrete Math.*, 146(1-3):211–233, 1995.
- [95] P. Pr ea. Distance sequences and percolation thresholds in Archimedean tilings. *Math. Comput. Modelling*, 26(8-10):317–320, 1997. Combinatorics and physics (Marseilles, 1995).
- [96] L. V. Quintas and P. J. Slater. Pairs of nonisomorphic graphs having the same path degree sequence. *Match*, 12:75–86, 1981.
- [97] M. Randi c. Characterization of atoms, molecules and classes of molecules based on paths enumerations. In *Proceedings of Bremer Konferenz zur Chemie (Univ. Bremen, Bremen, 1978), Part II*, volume 7, pages 5–64, 1979.
- [98] M. Randi c. On generalization of Wiener index for cyclic structures. *Acta Chim. Slov.*, 49:483–496, 2002.
- [99] B. Reed. Paths, stars and the number three. *Combin. Probab. Comput.*, 5(3):277–295, 1996.
- [100] M. Requardt. The continuum limit of discrete geometries. *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, 3(2):285–313, 2006.
- [101] B. Robi c. *Aproksimacijski algoritmi*. Zalo ba FE in FRI, Ljubljana, second revised and expanded edition, 2009.

- [102] J. J. Rotman. *An introduction to the theory of groups*, volume 148 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, fourth edition, 1995.
- [103] G. Royle. Cubic graphs. <http://people.csse.uwa.edu.au/gordon/remote/cubics/index.html>, 2009.
- [104] G. Sabidussi. The centrality index of a graph. *Psychometrika*, 31:581–603, 1966.
- [105] N. Seifter and V. I. Trofimov. Automorphism groups of graphs with quadratic growth. *J. Combin. Theory Ser. B*, 71(2):205–210, 1997.
- [106] J. B. Shearer and M. E. Watkins. Counterexamples to two conjectures about distance sequences. *Discrete Math.*, 66(3):289–298, 1987.
- [107] P. J. Slater. Medians of arbitrary graphs. *J. Graph Theory*, 4(4):389–392, 1980.
- [108] P. J. Slater. Centrality of paths and vertices in a graph: cores and pits. In *The theory and applications of graphs (Kalamazoo, Mich., 1980)*, pages 529–542. Wiley, New York, 1981.
- [109] P. J. Slater. Counterexamples to Randić’s conjecture on distance degree sequences for trees. *J. Graph Theory*, 6(1):89–92, 1982.
- [110] N. J. A. Sloane et al. The on-line encyclopedia of integer sequences. <http://www.research.att.com/~njas/sequences>, 2009.
- [111] P. F. Stadler. Towards a theory of landscapes. In *Complex systems and binary networks (Guanajuato, 1995)*, volume 461 of *Lecture Notes in Phys.*, pages 77–163. Springer, Berlin, 1995.
- [112] D. E. Taylor and R. Levingston. Distance-regular graphs. In *Combinatorial mathematics (Proc. Internat. Conf. Combinatorial Theory, Australian Nat. Univ., Canberra, 1977)*, volume 686 of *Lecture Notes in Math.*, pages 313–323. Springer, Berlin, 1978.
- [113] J. Tits. Appendix to: “Groups of polynomial growth and expanding maps” [Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 53 (1981), 53–73] by M. Gromov. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 53:74–78, 1981.
- [114] N. Trinajstić. *Chemical graph theory*. CRC press, 1992.
- [115] V. I. Trofimov. Graphs with polynomial growth. *Math. USSR-Sb.*, 51(2):405–417, 1985.

- [116] W. T. Tutte. Graph factors. *Combinatorica*, 1(1):79–97, 1981.
- [117] I. Vidav. *Algebra*. Zbirka univerzitetnih učbenikov in monografij. Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije, Ljubljana, 1989.
- [118] H. Wang and A. T. Amin. Realizability of a tree with a given sequence as its partial distance distribution. In *Proceedings of the Twenty-sixth Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Boca Raton, FL, 1995)*, volume 110, pages 193–199, 1995.
- [119] M. E. Watkins. A theorem on Tait colorings with an application to the generalized Petersen graphs. *J. Combinatorial Theory*, 6:152–164, 1969.
- [120] M. E. Watkins. Ends and automorphisms of infinite graphs. In *Graph symmetry (Montreal, PQ, 1996)*, volume 497 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 379–414. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997.
- [121] H. S. Wilf. *generatingfunctionology*. A K Peters Ltd., Wellesley, MA, third edition, 2006.
- [122] R. Wilson and J. Watkins. Uvod v teorijo grafov. *DMFA Slovenije, Ljubljana*, 1997.
- [123] S. Wilson and P. Potočnik. A census of edge-transitive tetravalent graphs. <http://jan.ucc.nau.edu/~swilson/C4Site/index.html>, 2009.
- [124] J. A. Wolf. Growth of finitely generated solvable groups and curvature of Riemannian manifolds. *J. Differential Geometry*, 2:421–446, 1968.
- [125] Wolfram Research. Mathematica, version 6.0. <http://www.wolfram.com/products/mathematica>, 2007.
- [126] R. Yang, X. Hou, N. Li, and W. Zhong. A note on the distance-balanced property of generalized Petersen graphs. *Electron. J. Combin.*, 16(1), 2009.
- [127] M. K. Zhou. Some properties about distance degree regular graphs. *J. Xinjiang Univ. Nat. Sci.*, 2(1):15–22, 1985.

# Stvarno kazalo

- algoritem, 13
  - časovna zahtevnost, 14
  - hevrstika, 13, 67
  - $\mathcal{O}$ -zapis, 14
- graf, 7
  - avtomorfizem grafa, 10
  - center grafa, 10
  - DB-graf, *glej* razdaljno uravnovežen
  - DDR-graf, 36, 39, 50
  - invarianta grafa, 10, 90
  - izomorfizem grafov, 10
  - krepro razdaljno uravnovežen, *glej* DDR-graf
  - krožni, 13, 64
  - lokalno končen, 8
  - mediana grafa, 10
  - posplošeni Petersenov, 12, 71
  - povezavno tranzitiven, 11, 43
  - premer grafa, 10
  - produkt grafov, 11, 22, 23, 46, 60, 80
  - razdaljna particija grafa, 9
  - razdaljni ostanek grafa, 77, 95
  - razdaljno regularen, 11, 43
  - razdaljno tranzitiven, 10, 43
  - razdaljno uravnovežen, 48, 92
  - sebi-centralen, 45, 89
  - sebi-medianski, 45, 55
  - simetričen, 10, 43
  - spoj grafov, 11
  - vozliščno tranzitiven, 10, 43, 83
  - zaporedje stopenj grafa, 9
- grupa, 17
  - rast v grupah, 18
  - red rasti, 18
- omrežje
  - računalniško, 99, 100, 102
- problem, 14
  - dominantne množice, 63
  - $\mathcal{NP}$ -poln, 15, 38, 62
  - razdaljne uravnoveženosti, 62
- rast
  - algoritem za izračun rasti, 24, 25, 94
  - funkcija rasti, 19
  - rodovna funkcija rasti, 21, 32
  - v končnih grafih, 35
  - v produktih grafov, 22, 46, 60
  - v tlakovanjih, 28, 33, 109
- razdaljna porazdelitev, 86, 99, 101
- topološki indeks, 90
  - Balabanov, 91
  - dopolnjeni Szegedski, 92
  - Hosoyev polinom, 93, 99
  - Szegedski, 92
  - Wienerjev, 90, 91
- zaporedje razdalj, 48
- zaporedje razdaljnih stopenj, 35, 101, 103